

Аналитическая геометрия

Аналитическая геометрия – раздел геометрии, в котором простейшие линии и поверхности (прямые, плоскости, кривые и поверхности второго порядка) исследуются средствами алгебры.

Линией на плоскости называют геометрическое место точек $M(x;y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x,y) = 0, \quad (1)$$

где $F(x,y)$ – многочлен степени n .

Поверхностью называют геометрическое место точек $M(x;y;z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x,y,z) = 0, \quad (2)$$

где $F(x,y,z)$ – многочлен степени n .

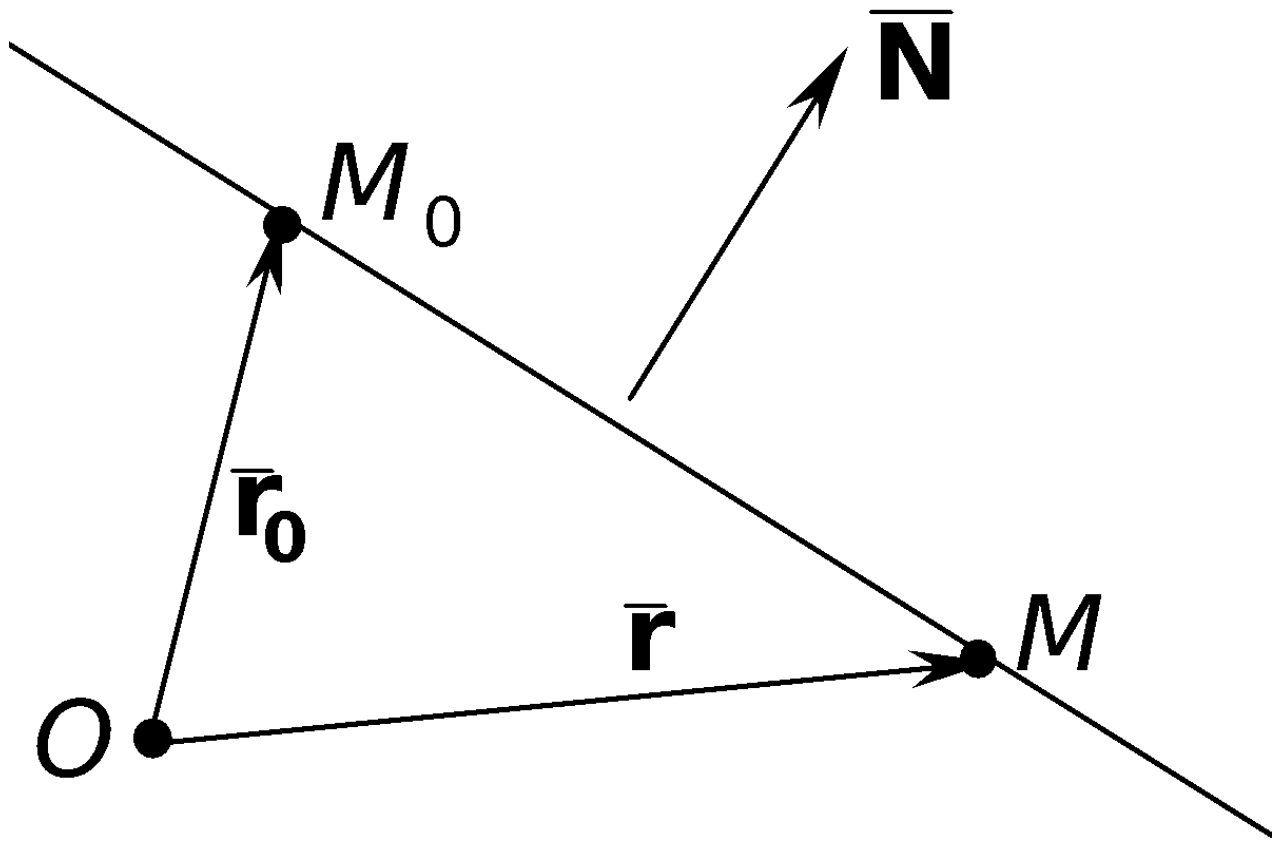
Линией в пространстве называют пересечение двух поверхностей.

Уравнения (1) и (2) называют **общими уравнениями линии на плоскости и поверхности** соответственно. Степень многочлена $F(x,y)$ ($F(x,y,z)$) называют **порядком линии (поверхности)**.

§ Прямая на плоскости

1. Общее уравнение прямой на плоскости и его исследование

ЗАДАЧА 1. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$, перпендикулярно вектору $\bar{N} = \{A, B\}$



Уравнения $(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0, \bar{\mathbf{N}}) = 0$ и $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ называют *уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{\mathbf{N}} = \{A, B\}$* (в векторной и координатной форме соответственно).

Уравнения $(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{N}}) + C = 0$ и $Ax + By + C = 0$ называют *общим уравнением прямой на плоскости* (в векторной и координатной форме соответственно).

ВЫВОДЫ:

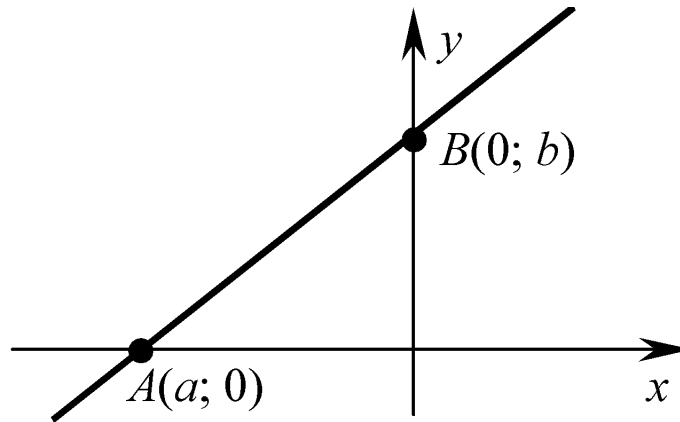
- 1) Прямая на плоскости является линией первого порядка. В общем случае она задается уравнением $Ax + By + C = 0$, где A, B, C – числа.
- 2) Коэффициенты A и B не обращаются в ноль одновременно, так как с геометрической точки зрения это координаты вектора, перпендикулярного прямой.

Вектор, перпендикулярный прямой, называют *нормальным вектором* этой прямой.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ.

Если в уравнении $Ax + By + C = 0$ все коэффициенты A, B и C отличны от нуля, то уравнение называют **полным**; если хотя бы один из коэффициентов равен нулю – уравнение называют **неполным**.

- 1) Пусть общее уравнение прямой – полное. Тогда его можно записать в виде
- $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (5)$$

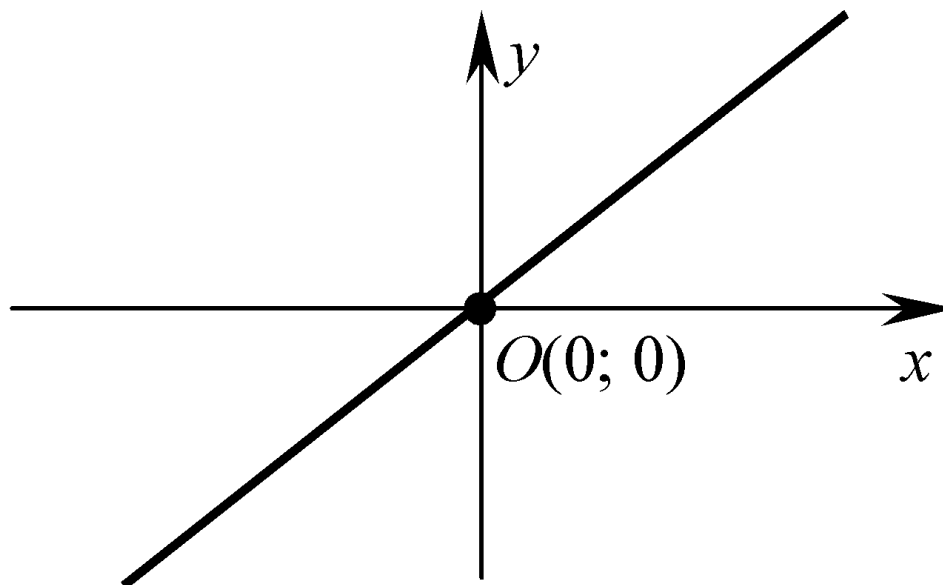


С геометрической точки зрения a и b – отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно. Уравнение (5) называют **уравнением прямой в отрезках**.

2) Пусть в общем уравнении прямой коэффициенты A и B – ненулевые, а $C = 0$, т.е. уравнение прямой имеет вид

$$Ax + By = 0.$$

Такая прямая проходит через начало координат $O(0;0)$.

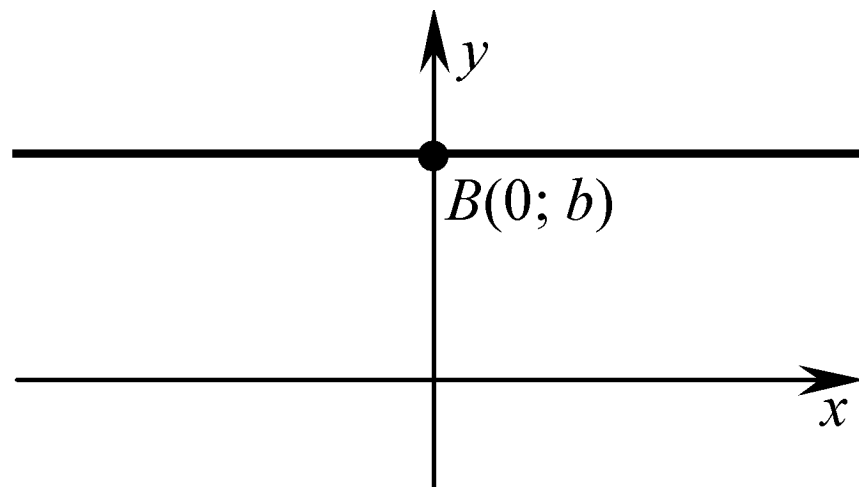
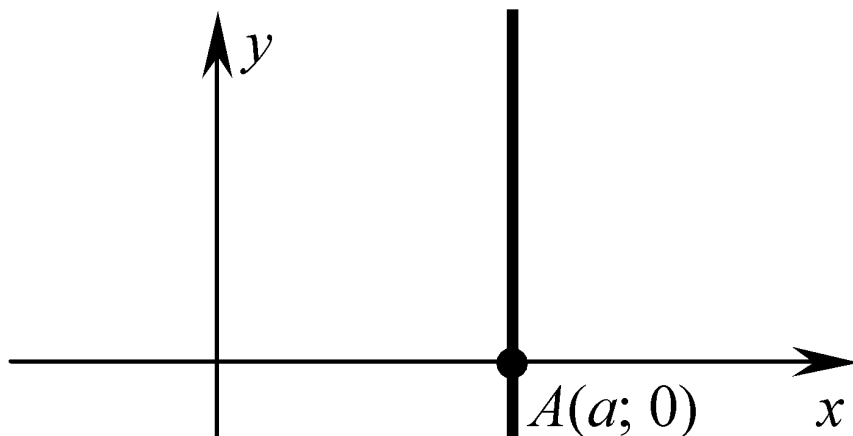


3) Пусть в общем уравнении прямой один из коэффициентов A или B – нулевой, а $C \neq 0$, т.е. уравнение прямой имеет вид

$$Ax + C = 0 \quad \text{или} \quad By + C = 0.$$

Эти уравнения можно записать в виде

$$x = a \quad \text{и} \quad y = b.$$



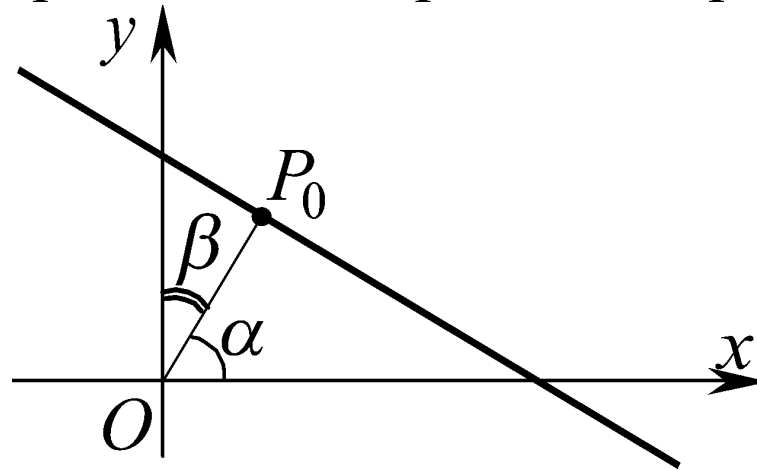
4) Пусть в общем уравнении прямой $C = 0$ и один из коэффициентов A или B тоже нулевой, т.е. уравнение прямой имеет вид $Ax = 0$ или $By = 0$.

Эти уравнения можно записать в виде

$$x = 0 \quad (\text{уравнения координатной оси } Oy)$$

и $y = 0$ (уравнения координатной оси Ox).

Замечание. Пусть прямая ℓ не проходит через $O(0;0)$.



Обозначим:

1) $P_0(x_0; y_0)$ – основание перпендикуляра, опущенного на ℓ из начала координат,

2) $\bar{\mathbf{n}} = \{\cos \alpha, \cos \beta\}$ – орт вектора $\overline{\mathbf{OP}_0}$.

3) $\rho = |\overline{\mathbf{OP}_0}|$ – расстояние от начала координат до прямой \square

Тогда уравнение ℓ можно записать в виде

$$\cos \alpha \cdot x + \cos \beta \cdot y + C = 0,$$

где $C = -\rho$ (доказать самим).

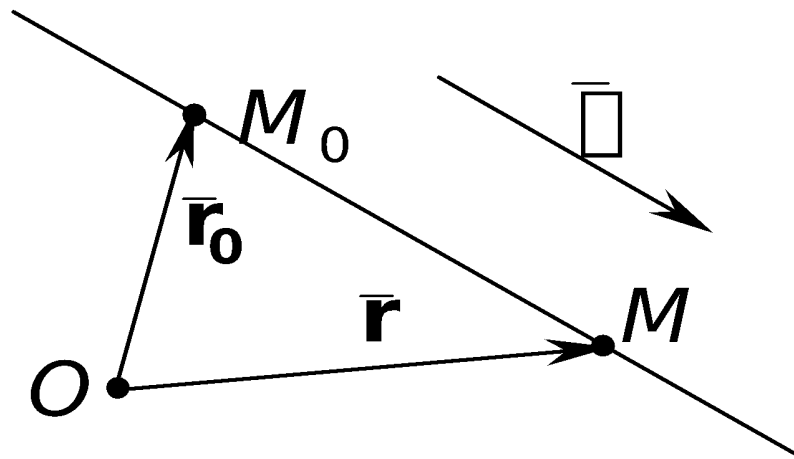
Этот частный случай общего уравнения прямой называется **нормальным уравнением прямой**.

2. Другие формы записи уравнения прямой на плоскости

1) Параметрические уравнения прямой

ЗАДАЧА 2. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$, параллельно вектору $\bar{\pi} = \{m; n\}$

Вектор, параллельный прямой, называют **направляющим вектором** этой прямой.



Уравнение $\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{\pi}$ и систему уравнений
$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n. \end{cases}$$

называют **параметрическими уравнениями прямой** (в векторной и координатной форме соответственно).

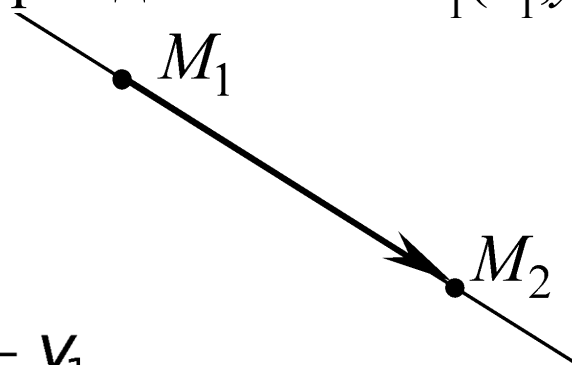
2) Каноническое уравнение прямой на плоскости

Пусть в задаче 2 вектор \vec{n} не параллелен ни одной из координатных осей (т.е. $m \neq 0$ и $n \neq 0$).

Уравнение $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$ называют **каноническим уравнением прямой на плоскости**.

3) Уравнение прямой, проходящей через две точки – частный случай канонического уравнения прямой.

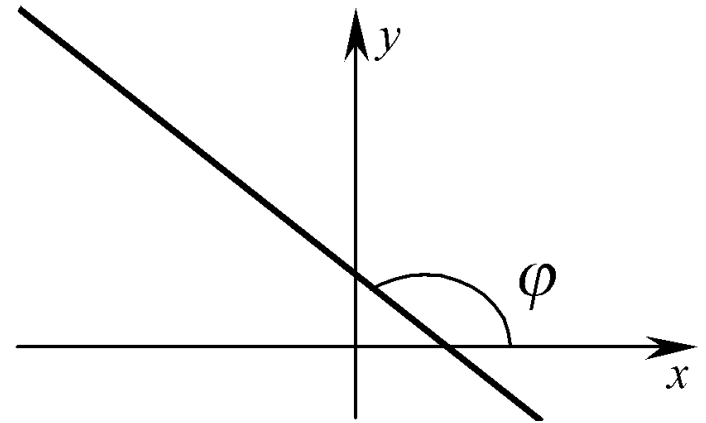
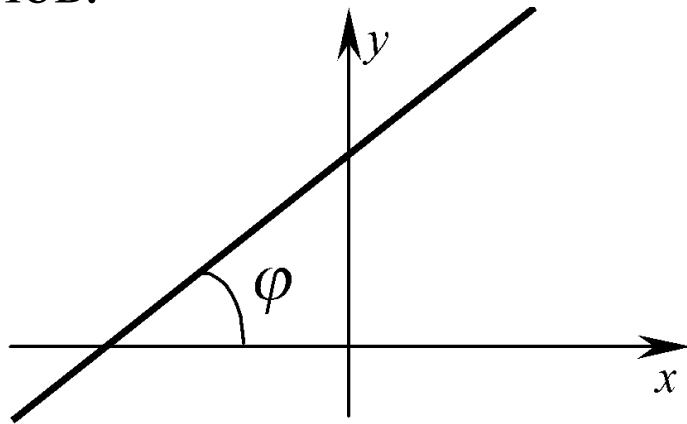
Пусть прямая проходит через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.



Уравнение $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ называют **уравнением прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$** .

4) Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть прямая ℓ не параллельна оси Ox . Тогда она пересекается с Ox , образуя при этом две пары вертикальных углов.

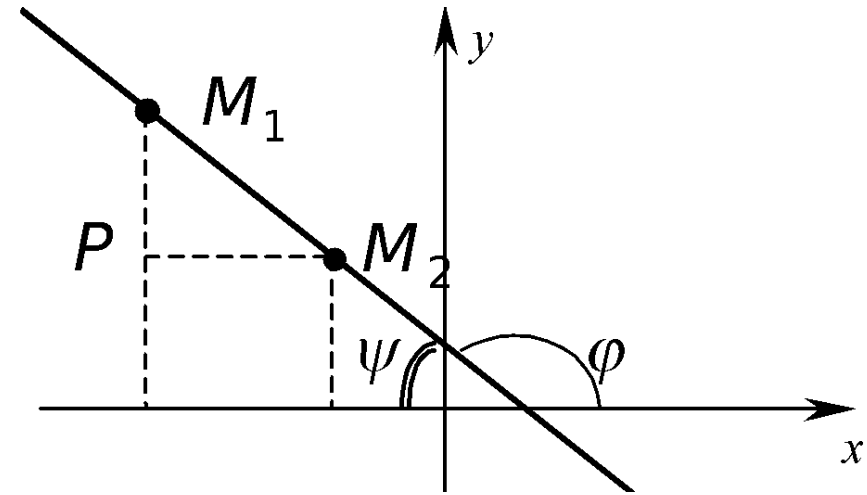
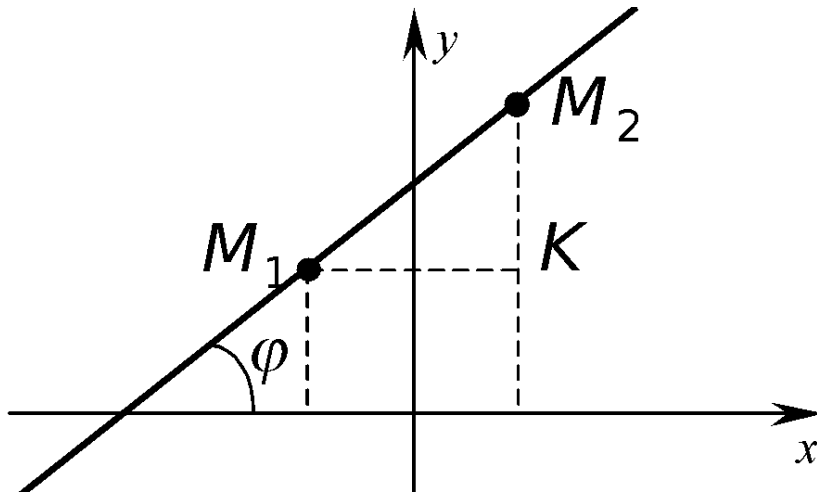


Угол φ , отсчитываемый от оси Ox к прямой ℓ против часовой стрелки, называют ***углом наклона прямой ℓ к оси Ox*** .

Число $k = \operatorname{tg}\varphi$ (если оно существует, т.е. если прямая ℓ не параллельна оси Oy) называют ***угловым коэффициентом прямой***.

Для прямой, параллельной оси Ox , угол наклона прямой к оси Ox считают равным нулю. Следовательно, угловой коэффициент такой прямой $k = \operatorname{tg}0 = 0$.

Пусть прямая ℓ не параллельна оси Ox и Oy и проходит через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (где $x_1 < x_2$). Найдем угловой коэффициент этой прямой.



Получили: $k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки перепишем в

виде:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

Уравнение $y - y_1 = k \cdot (x - x_1)$ – это **уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей угловой коэффициент k .**

Перепишем это уравнение в виде $y = kx + b$ (где $b = y_1 - kx_1$). Его называют **уравнением прямой с угловым коэффициентом**. С геометрической точки зрения b – отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy .

Замечание. Уравнение прямой с угловым коэффициентом было получено в предположении, что прямая не параллельна оси Ox и Oy . Для прямой, параллельной Ox общее уравнение можно рассматривать как уравнение с угловым коэффициентом. Действительно, уравнение такой прямой

$$y = b \quad \text{или} \quad y = 0 \cdot x + b,$$

где $k = 0$ – угловой коэффициент прямой.

3. Взаимное расположение прямых на плоскости

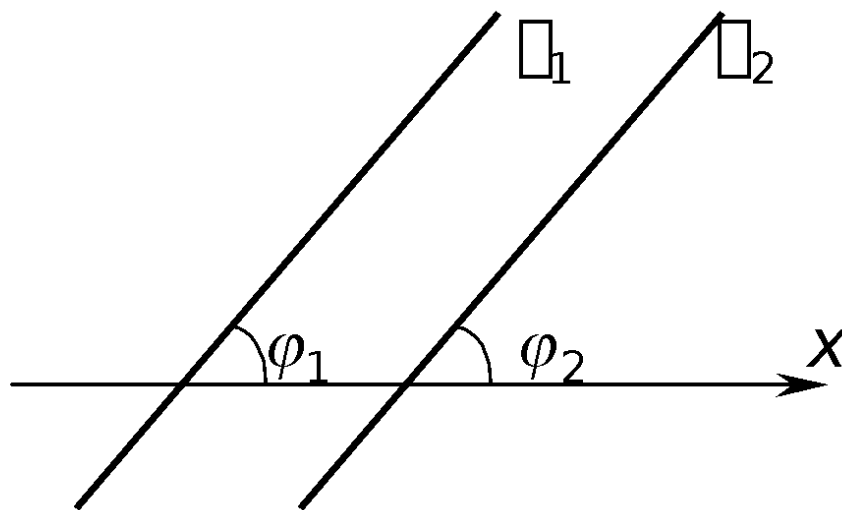
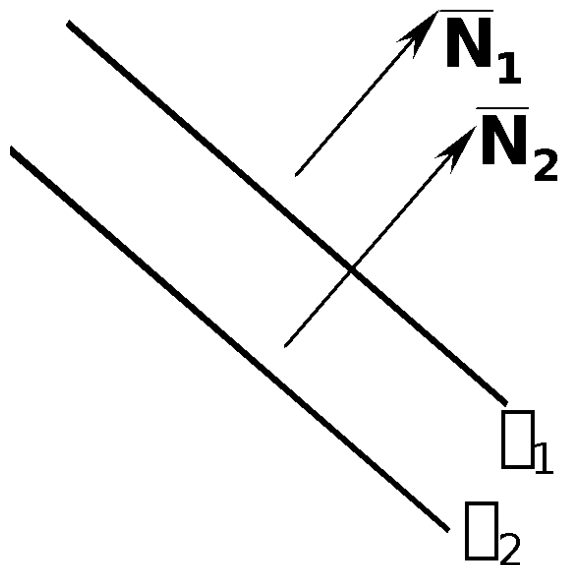
На плоскости две прямые могут:

- а) быть параллельны, б) пересекаться.

Пусть уравнения прямых ℓ_1 и ℓ_2 имеют вид:

$$\begin{aligned} \ell_1: A_1x + B_1y + C_1 &= 0 & \text{или} & \quad y = k_1x + b_1 \\ \ell_2: A_2x + B_2y + C_2 &= 0 & \text{или} & \quad y = k_2x + b_2 \end{aligned}$$

1) Пусть прямые параллельны:



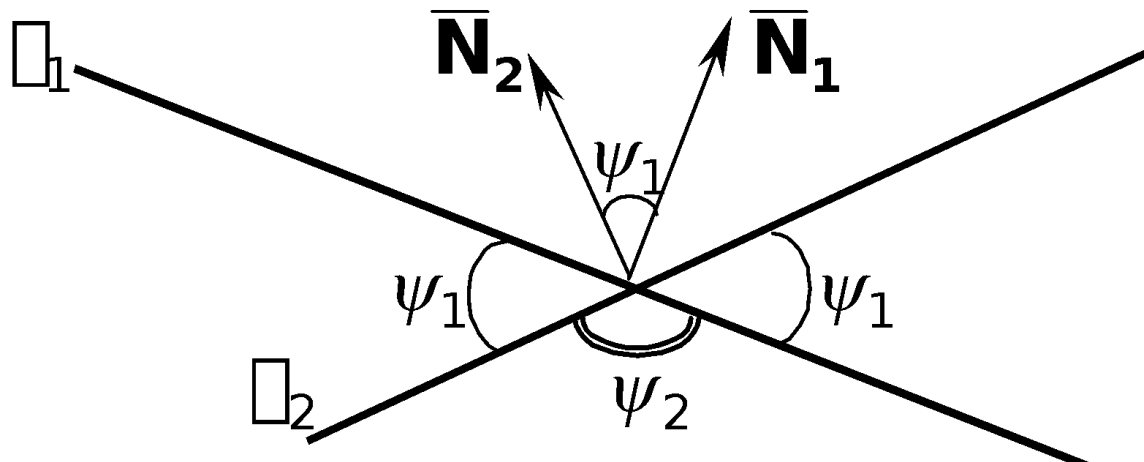
Получаем, что *прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны тогда и только тогда, когда в их общих уравнениях коэффициенты при соответствующих текущих координатах пропорциональны, т.е.*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

или их угловые коэффициенты равны, т.е.

$$k_1 = k_2.$$

2) Пусть прямые пересекаются

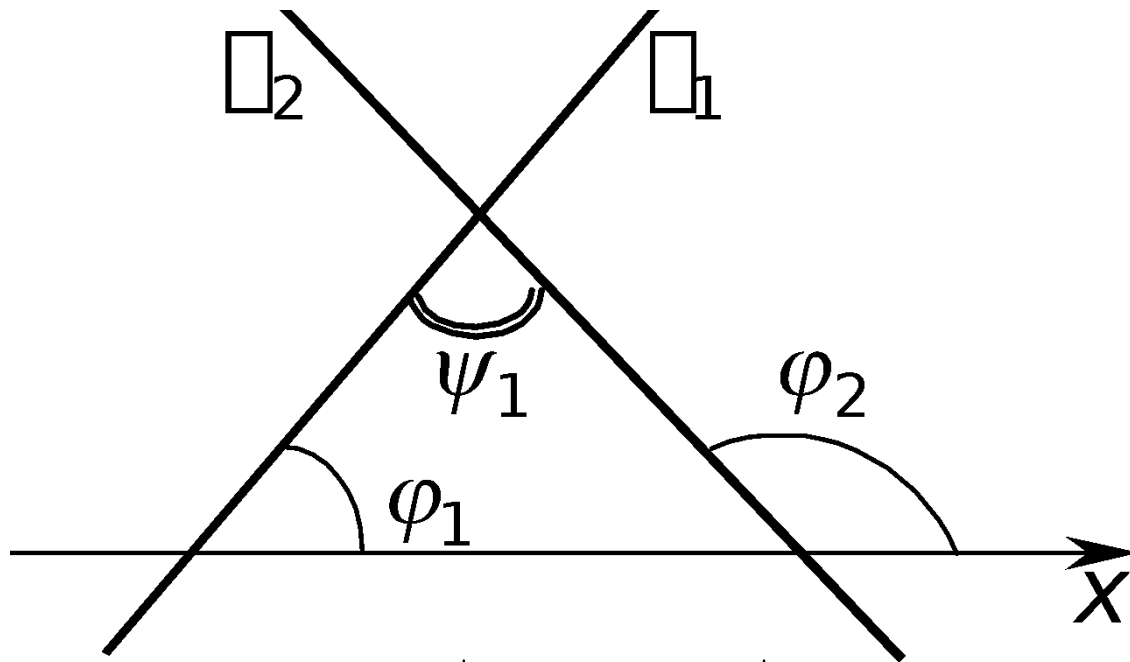


$$\cos \psi_{1,2} = \pm \frac{|(\bar{N}_1, \bar{N}_2)|}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|} = \pm \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}}$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

$$(\bar{N}_1, \bar{N}_2) = A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad -$$

критерий перпендикулярности прямых, заданных общими уравнениями.



$$\operatorname{tg}\psi_{1,2} = \pm \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \right|$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad -$$

критерий перпендикулярности прямых, имеющих угловые коэффициенты k_1 и k_2 .

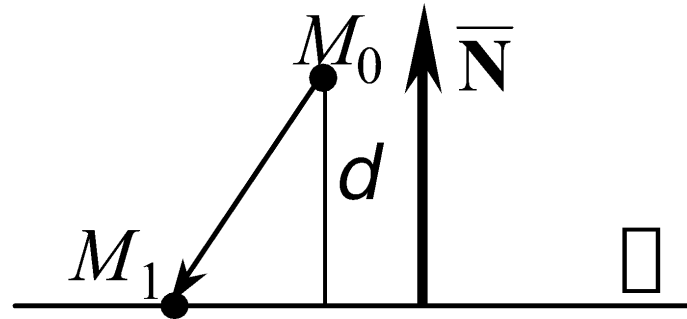
4. Расстояние от точки до прямой

ЗАДАЧА 3. Пусть прямая ℓ задана общим уравнением

$$Ax + By + C = 0,$$

$M_0(x_0; y_0)$ – точка, не принадлежащая прямой ℓ .

Найти расстояние от точки M_0 до прямой ℓ .



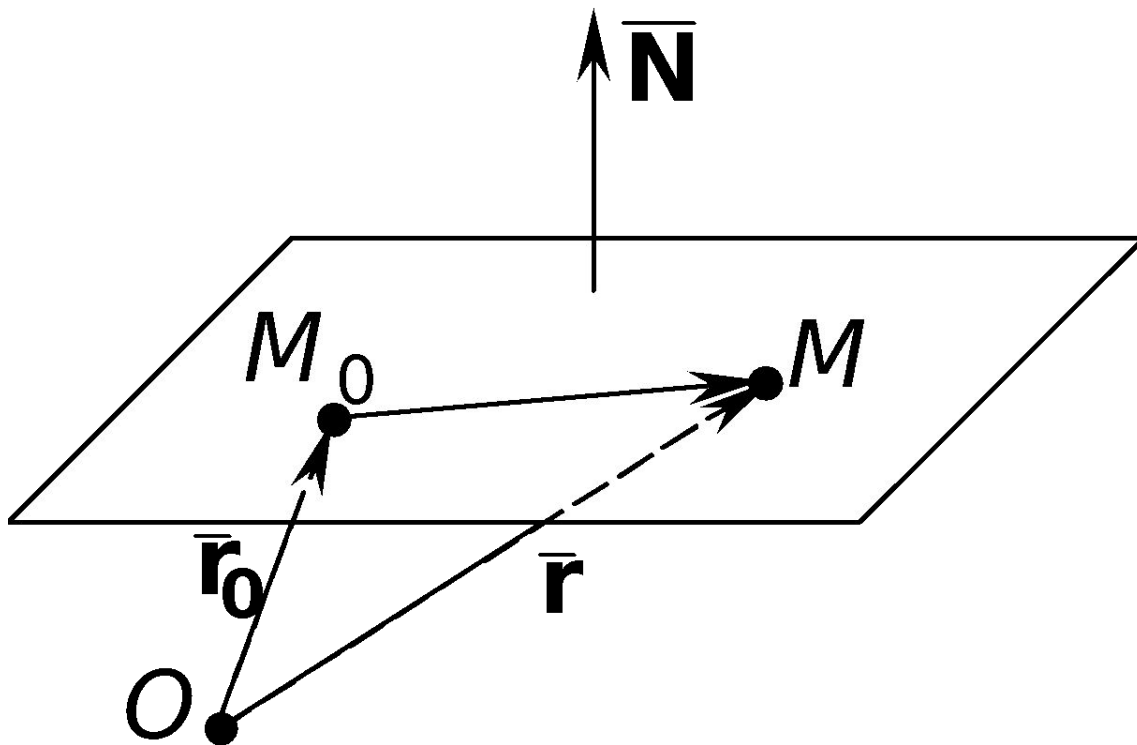
$$d = \frac{|(\bar{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_0})|}{|\bar{\mathbf{N}}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

§ Плоскость

1. Общее уравнение плоскости и его исследование

ЗАДАЧА 1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, перпендикулярно вектору $\bar{\mathbf{N}} = \{A, B, C\}$

Вектор, перпендикулярный плоскости, называют *нормальным вектором* этой плоскости.



Уравнения $(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0, \bar{\mathbf{N}}) = 0$ (1*)

и $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ (1)

называют *уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{\mathbf{N}} = \{A, B, C\}$* (в векторной и координатной форме соответственно).

Уравнения $(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{N}}) + D = 0$ (2*)

и $Ax + By + Cz + D = 0$ (2)

называют *общим уравнением плоскости* (в векторной и координатной форме соответственно).

ВЫВОДЫ:

- 1) Плоскость является поверхностью первого порядка. В общем случае она задается уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D – числа.
- 2) Коэффициенты A, B, C не обращаются в ноль одновременно, так как с геометрической точки зрения это координаты вектора, перпендикулярного плоскости.

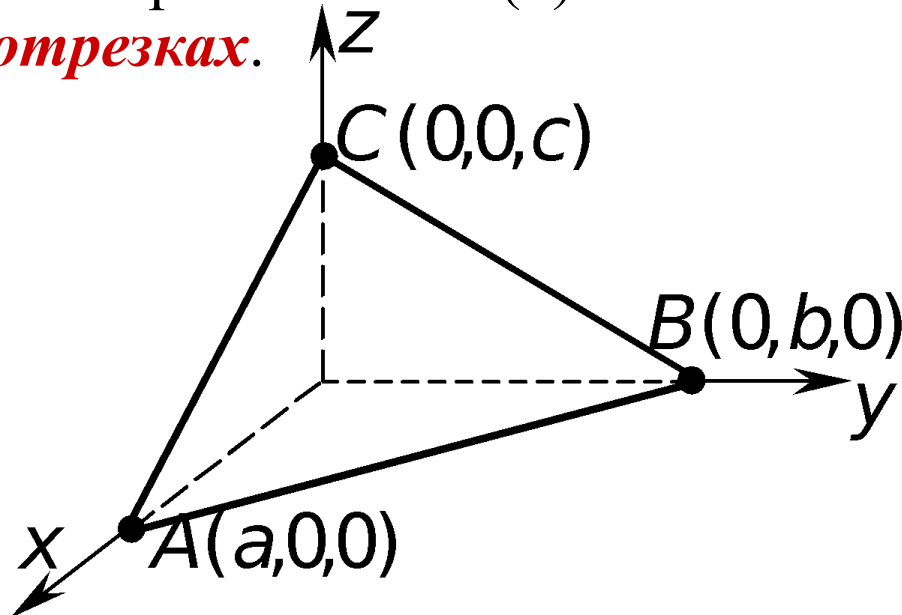
ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

Если в уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ все коэффициенты A, B, C и D отличны от нуля, то уравнение называют **полным**; если хотя бы один из коэффициентов равен нулю – **неполным**.

1) Пусть общее уравнение плоскости – полное. Тогда его можно записать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (3)$$

С геометрической точки зрения a, b и c – отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях Ox , Oy и Oz соответственно. Уравнение (3) называют **уравнением плоскости в отрезках**.



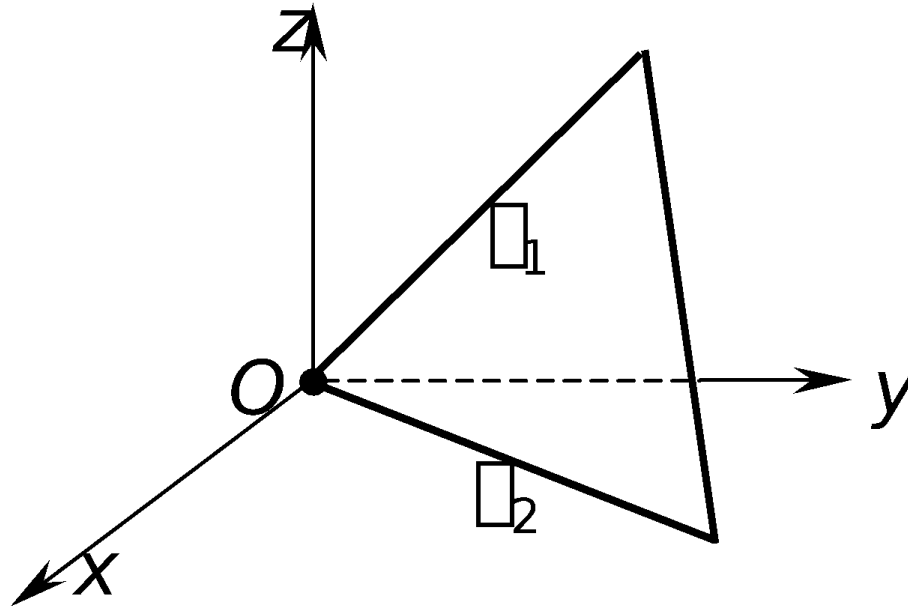
2) Пусть в общем уравнении плоскости коэффициенты A , B и C – ненулевые, а $D = 0$, т.е. уравнение плоскости имеет вид

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Такая плоскость проходит через начало координат $O(0;0;0)$.

$\ell_1: By + Cz = 0$ (пересечение с плоскостью Oyz)

$\ell_2: Ax + By = 0$ (пересечение с плоскостью Oxy)



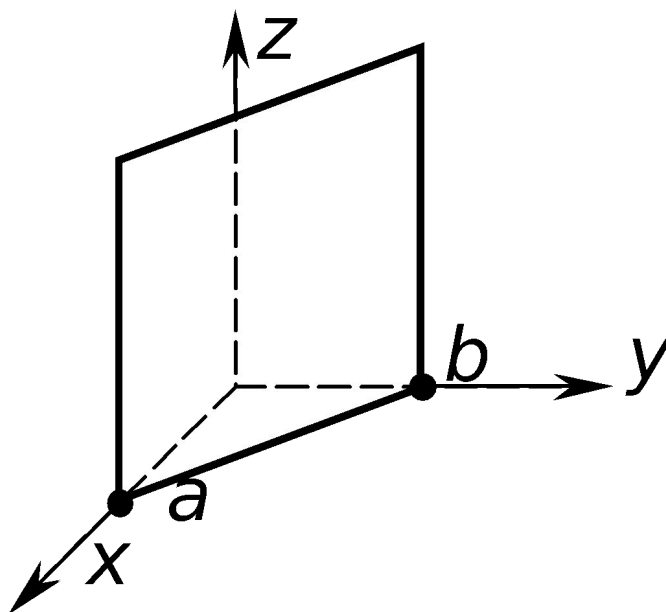
3) Пусть в общем уравнении плоскости один из коэффициентов A , B или C – нулевой, а $D \neq 0$, т.е. уравнение плоскости один из следующих трех видов:

а) $Ax + By + D = 0$ б) $Ax + Cz + D = 0$ в) $By + Cz + D = 0$.

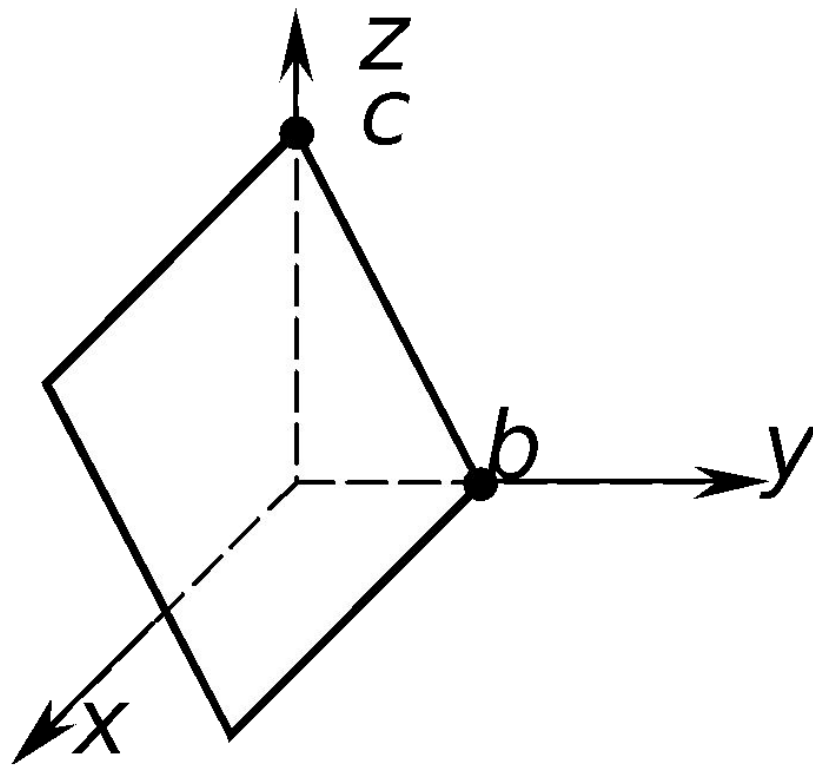
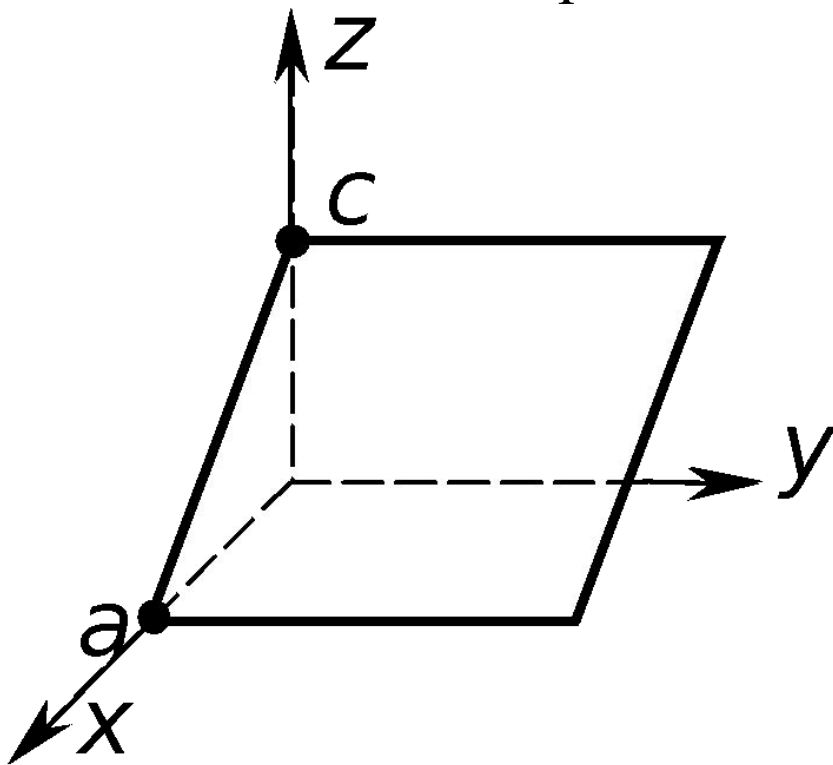
Эти уравнения можно записать соответственно в виде

а) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ б) $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$ в) $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

а) плоскость отсекает на осях Ox и Oy отрезки a и b соответственно и параллельна оси Oz ;



- б) плоскость отсекает на осях Ox и Oz отрезки a и c соответственно и параллельна оси Oy ;
- в) плоскость отсекает на осях Oy и Oz отрезки b and c соответственно и параллельна оси Ox .



Иначе говоря, плоскость, в уравнении которой отсутствует одна из координат, параллельна оси отсутствующей координаты.

4) Пусть в уравнении плоскости (2) два из трех коэффициентов A , B или C – нулевые, а $D \neq 0$, т.е. уравнение плоскости имеет вид: а) $Ax + D = 0$ или б) $Bu + D = 0$ или в) $Cz + D = 0$.

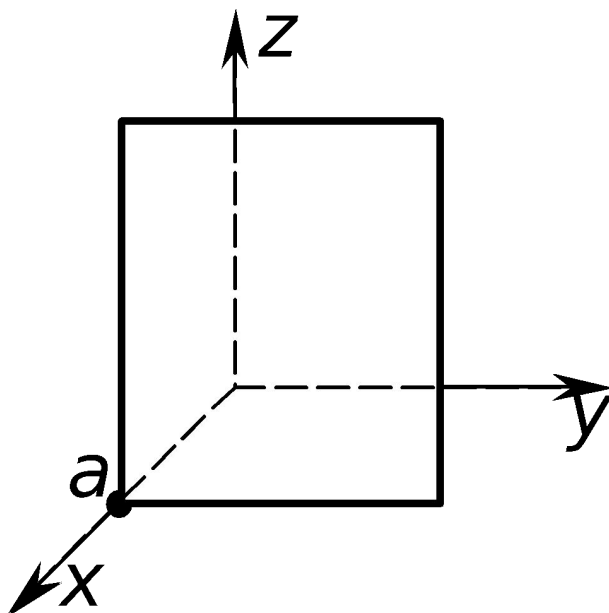
Эти уравнения можно записать соответственно в виде:

а) $\frac{x}{a} = 1$

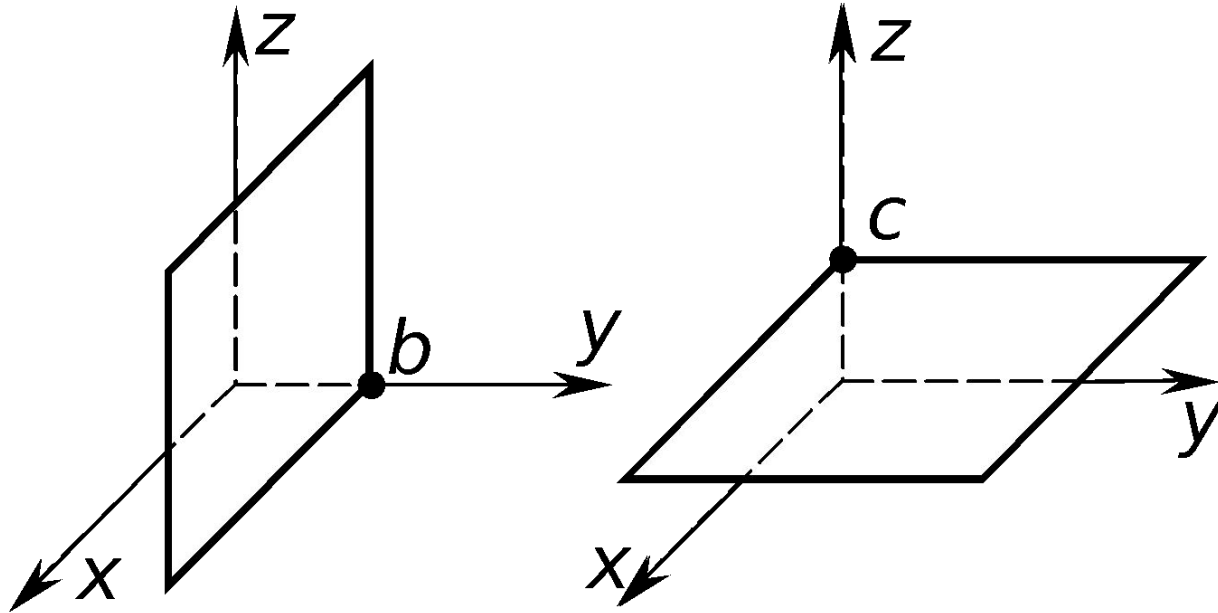
б) $\frac{y}{b} = 1$

в) $\frac{z}{c} = 1$

а) плоскость отсекает на оси Ox отрезок a и параллельна осям Oy и Oz (т.е. параллельна плоскости Oyz);



- б) плоскость отсекает на Oy отрезок b и параллельна осям Ox и Oz (т.е. параллельна плоскости Oxz);
- в) плоскость отсекает на Oz отрезок c и параллельна осям Ox и Oy (т.е. параллельна плоскости Oxy).

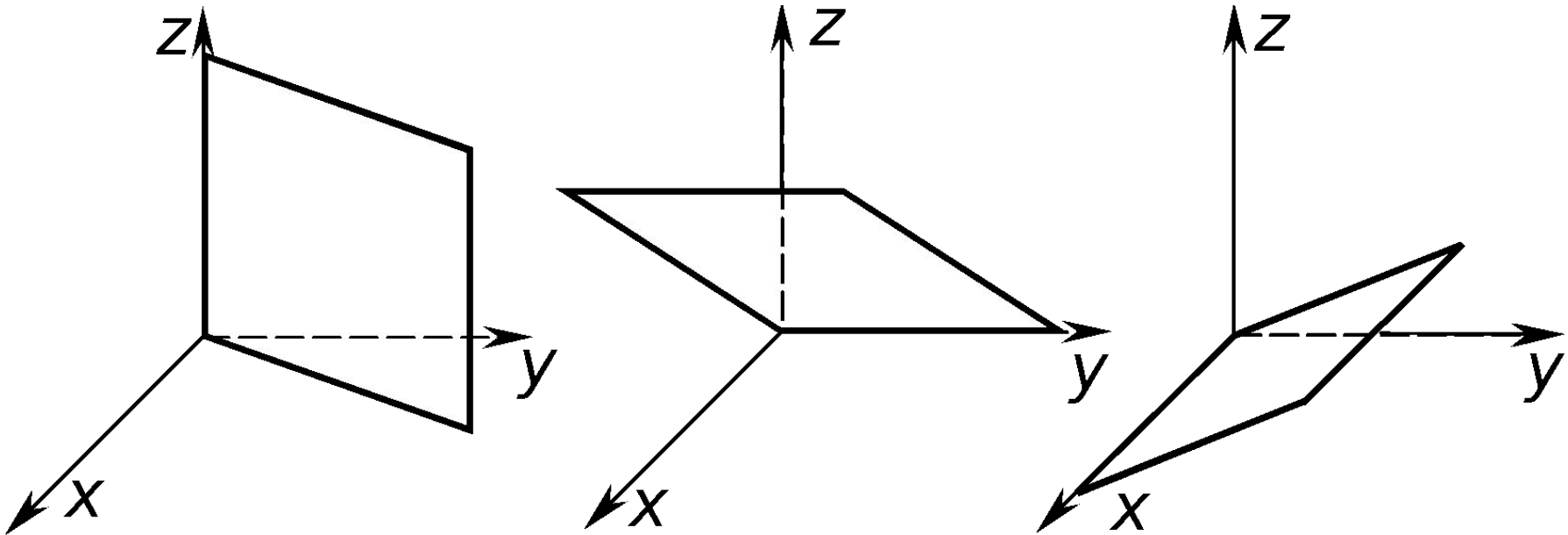


Иначе говоря, *плоскость, в уравнении которой отсутствуют две координаты, параллельна координатной плоскости, проходящей через оси отсутствующих координат.*

5) Пусть в общем уравнении плоскости (2) $D = 0$ и один из коэффициентов A , B или C тоже нулевой, т.е. уравнение плоскости имеет вид:

а) $Ax + By = 0$ или б) $Ax + Cz = 0$ или в) $By + Cz = 0$.

Плоскость проходит через начало координат и ось отсутствующей координаты



б) Пусть в общем уравнении плоскости (2) три коэффициента равны нулю, т.е. уравнение плоскости имеет вид

$$\text{а) } Ax = 0 \quad \text{или} \quad \text{б) } By = 0 \quad \text{или} \quad \text{в) } Cz = 0.$$

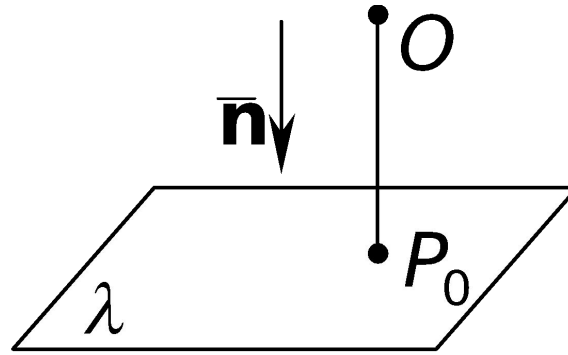
Эти уравнения можно записать соответственно в виде:

а) $x = 0$ – уравнение координатной плоскости Oyz ;

б) $y = 0$ – уравнение координатной плоскости Oxz ,

в) $z = 0$ – уравнение координатной плоскости Oxy .

Замечание. Пусть плоскость λ не проходит через $O(0;0;0)$.



Обозначим:

- 1) $P_0(x_0; y_0; z_0)$ – основание перпендикуляра, опущенного на λ из начала координат,
- 2) $\bar{\mathbf{n}} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ – орт вектора $\overline{\mathbf{OP}_0}$.
- 3) $p = |\overline{\mathbf{OP}_0}|$ – расстояние от начала координат до λ

Тогда уравнение λ можно записать в виде

$$\cos \alpha \cdot x + \cos \beta \cdot y + \cos \gamma \cdot z + D = 0,$$

где $D = -p$ (доказать самим).

Этот частный случай общего уравнения плоскости называется ***нормальным уравнением плоскости.***

2. Другие формы записи уравнения плоскости

Другие формы записи:

Уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору (см. уравнение (1) и (1*));

Уравнение плоскости в отрезках (см уравнение (2));

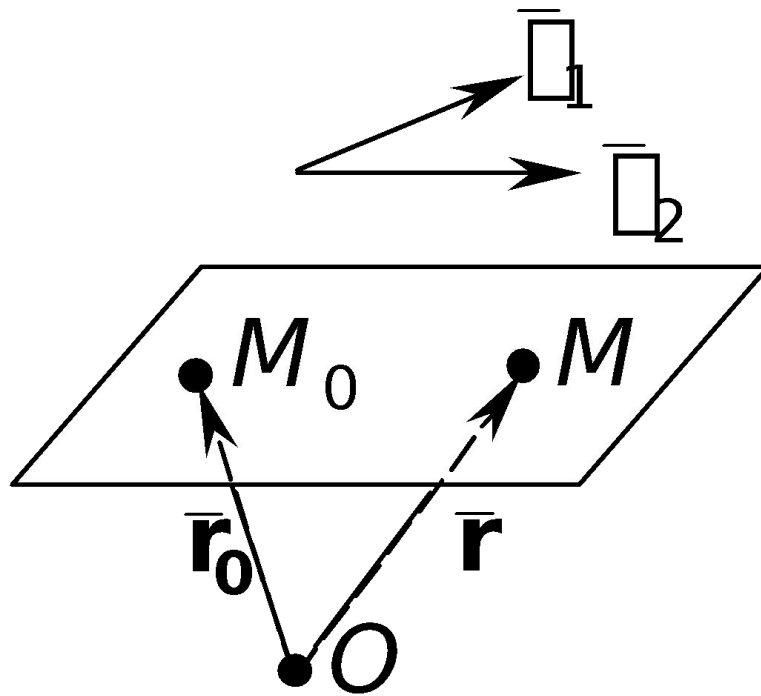
Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам;

Уравнение плоскости, проходящей через три точки;

1) Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам

ЗАДАЧА 2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, параллельно неколлинеарным векторам

$$\vec{p}_1 = \{m_1; n_1; p_1\} \text{ и } \vec{p}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$$



Уравнения

$$(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{l}_1, \bar{l}_2) = 0 \quad (4^*)$$

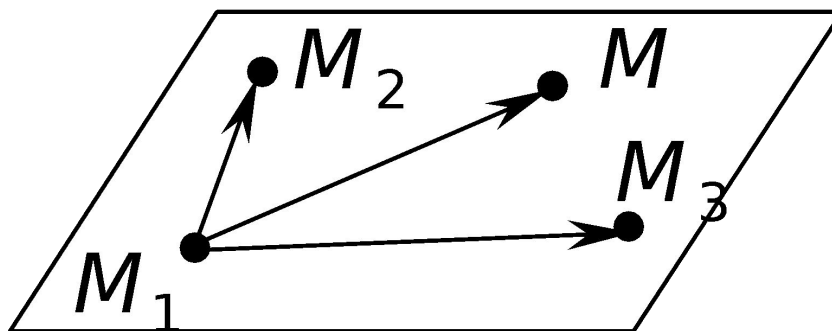
и

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

называют *уравнениями плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам* (в векторной и координатной форме соответственно).

2) Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой – частный случай уравнения (4)

Пусть плоскость проходит через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой.



Уравнения

$$(\bar{r} - \bar{r}_1, \bar{r}_2 - \bar{r}_1, \bar{r}_3 - \bar{r}_1) = 0 \quad (5^*)$$

и

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

называют **уравнениями плоскости, проходящей через три точки** $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$ (в векторной и координатной форме соответственно).

3. Взаимное расположение плоскостей

В пространстве две плоскости могут:

а) быть параллельны, б) пересекаться.

Пусть уравнения плоскостей λ_1 и λ_2 имеют вид:

$$\lambda_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

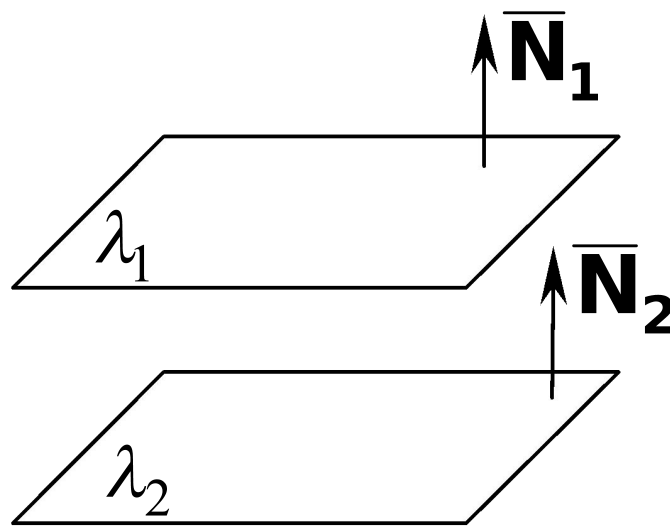
$$\lambda_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Тогда:

$$\bar{\mathbf{N}}_1 = \{A_1; B_1; C_1\} \text{ — нормаль к } \lambda_1;$$

$$\bar{\mathbf{N}}_2 = \{A_2; B_2; C_2\} \text{ — нормаль к } \lambda_2;$$

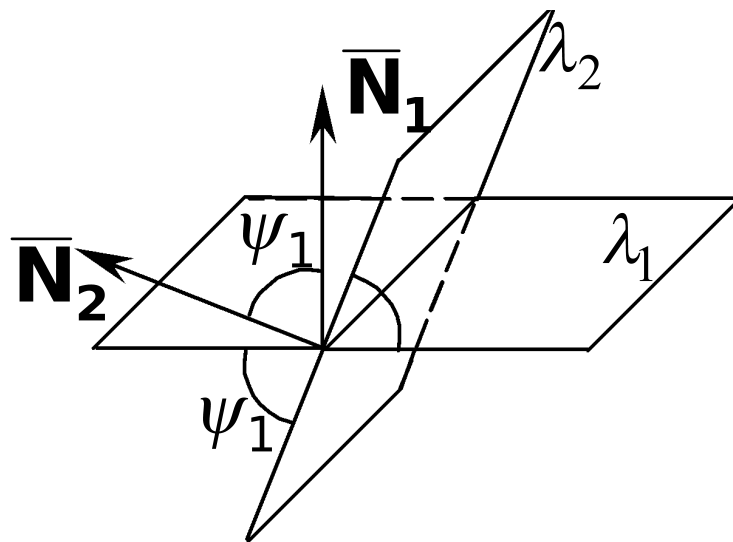
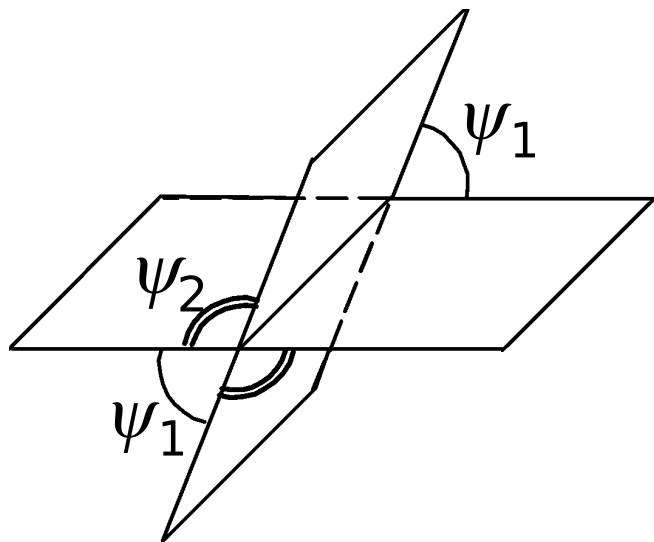
1) Пусть плоскости параллельны:



Получаем, что *плоскости λ_1 и λ_2 параллельны тогда и только тогда, когда в их общих уравнениях коэффициенты при соответствующих неизвестных пропорциональны, т.е.*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

2) Пусть плоскости пересекаются



$$\cos\psi_{1,2} = \pm \frac{|(\bar{\mathbf{N}}_1, \bar{\mathbf{N}}_2)|}{|\bar{\mathbf{N}}_1| \cdot |\bar{\mathbf{N}}_2|} = \pm \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2}}$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

Частный случай – плоскости перпендикулярны, т.е.

$$\psi_1 = \psi_2 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \cos\psi_1 = \cos\psi_2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos\psi_{1,2} = \pm \frac{|(\bar{\mathbf{N}}_1, \bar{\mathbf{N}}_2)|}{|\bar{\mathbf{N}}_1| \cdot |\bar{\mathbf{N}}_2|} = 0$$

$$(\bar{\mathbf{N}}_1, \bar{\mathbf{N}}_2) = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad -$$

критерий перпендикулярности плоскостей, заданных общими уравнениями.

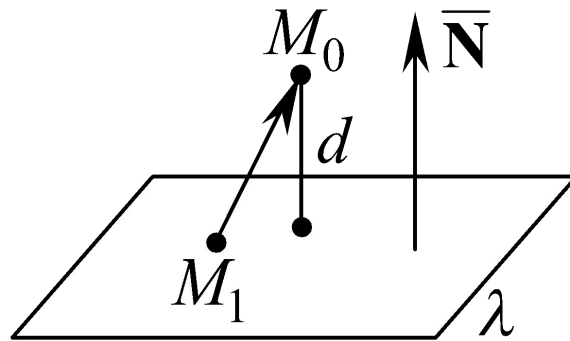
4. Расстояние от точки до плоскости

ЗАДАЧА 3. Пусть плоскость λ задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка, не принадлежащая плоскости λ .

Найти расстояние от точки M_0 до плоскости λ .



$$d = \frac{|(\bar{N}, \overline{M_1M_0})|}{|\bar{N}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

§ Прямая в пространстве

1. Уравнения прямой в пространстве

Пусть $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ – уравнения любых двух различных плоскостей, содержащих прямую ℓ .

Тогда координаты любой точки прямой ℓ удовлетворяют одновременно обоим уравнениям, т.е. являются решениями системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

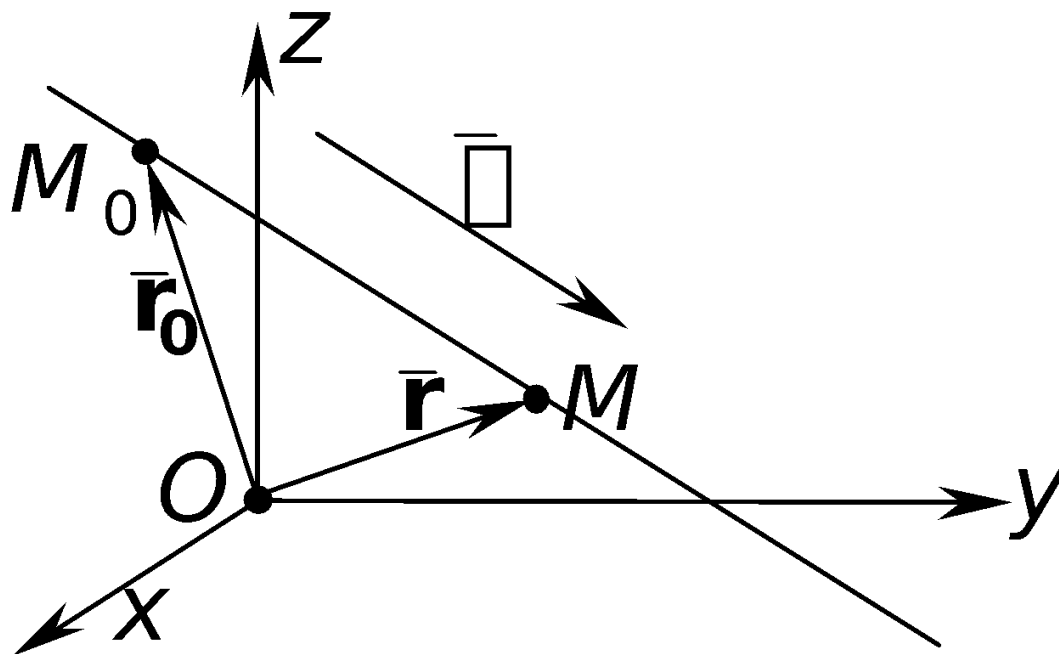
Систему (1) называют *общими уравнениями прямой в пространстве*.

Другие формы записи уравнений прямой в пространстве – ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ и КАНОНИЧЕСКИЕ уравнения.

ЗАДАЧА 1. Записать уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, параллельно вектору

$$\bar{s} = \{m; n; p\}$$

Вектор, параллельный прямой в пространстве, называют *направляющим вектором* этой прямой.



Уравнение

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_0 + t\bar{\mathbf{d}}, \quad (2^*)$$

и систему уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n, \\ z = z_0 + t \cdot p. \end{cases} \quad (2)$$

называют *параметрическими уравнениями прямой в пространстве* (в векторной и координатной форме соответственно).

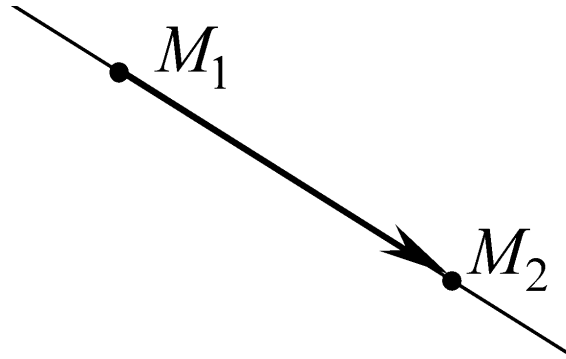
Пусть в задаче 1 вектор $\bar{\mathbf{d}}$ не параллелен ни одной из координатных осей (т.е. $m \neq 0$, $n \neq 0$ и $p \neq 0$).

Уравнения
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (3)$$

называют *каноническими уравнениями прямой в пространстве*.

Частным случаем канонических уравнений являются
УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ
ЗАДАННЫЕ ТОЧКИ.

Пусть прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.



Уравнения
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (4)$$

называют *уравнениями прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

2. Переход от общих уравнений прямой к каноническим

Пусть прямая ℓ задана общими уравнениями:

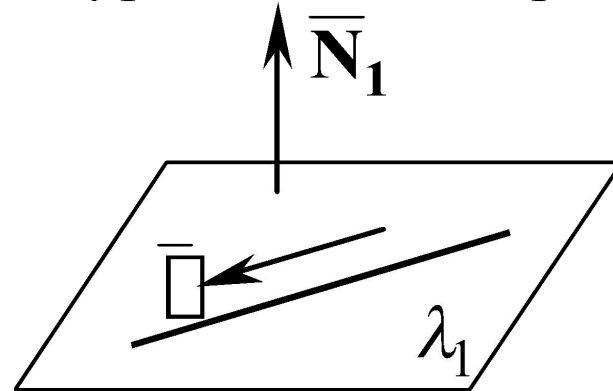
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Чтобы записать канонические (параметрические) уравнения этой прямой, необходимо найти ее направляющий вектор и координаты какой-нибудь точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на прямой.

а) Координаты точки M_0 – это одно из решений системы (1).

б) Направляющий вектор $\vec{s} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2]$

где $\vec{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ – нормальные векторы к плоскостям λ_1 и λ_2 , уравнения которых входят в общие уравнения прямой.



3. Взаимное расположение прямых в пространстве

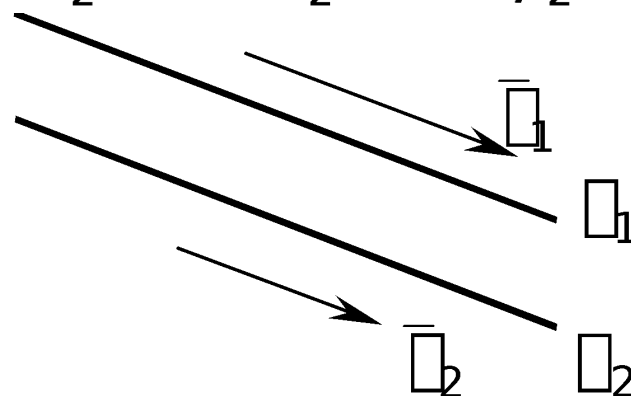
В пространстве две прямые могут:

а) быть параллельны, б) пересекаться, в) скрещиваться.

Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы каноническими уравнениями:

$$\square_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \quad \square_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

1) Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны:

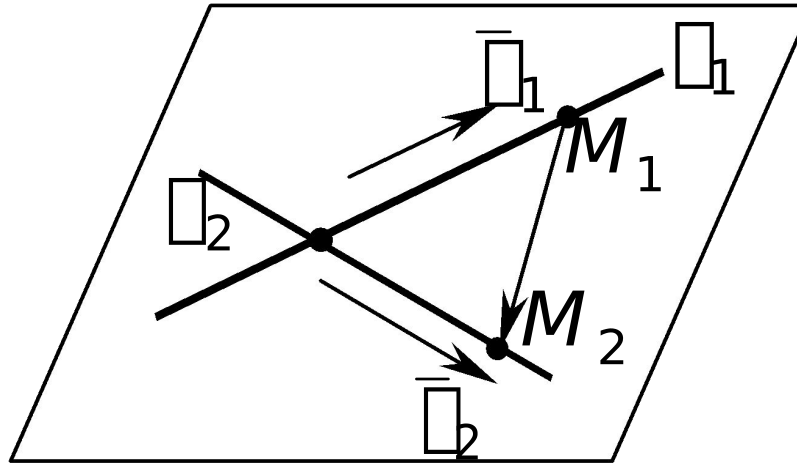


Получаем: *прямые параллельны* \Leftrightarrow *их направляющие векторы* $\bar{\square}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ и $\bar{\square}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$

коллинеарные, т.е. выполняется условие:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (6)$$

2) Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются:



Получили: *прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются \Leftrightarrow они не параллельны и для них выполняется $(\overline{M_1M_2}, \bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0$, (7*)*
 или, в координатной форме,

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

3) Если для прямых ℓ_1 и ℓ_2 не выполняется условие (6) и (7) ((7*)), то прямые скрещиваются.

4. Задачи, связанные с возможным взаимным расположением прямых

Возможное расположение прямых в пространстве приводит к следующим задачам:

- 1) параллельные прямые → расстояние между прямыми (т.е. расстояние от точки до прямой)?
- 2) пересекающиеся прямые → а) угол между прямыми?
б) точка пересечения прямых?
- 3) скрещивающиеся прямые → а) угол между прямыми?
б) расстояние между прямыми?

Пусть даны две прямые:

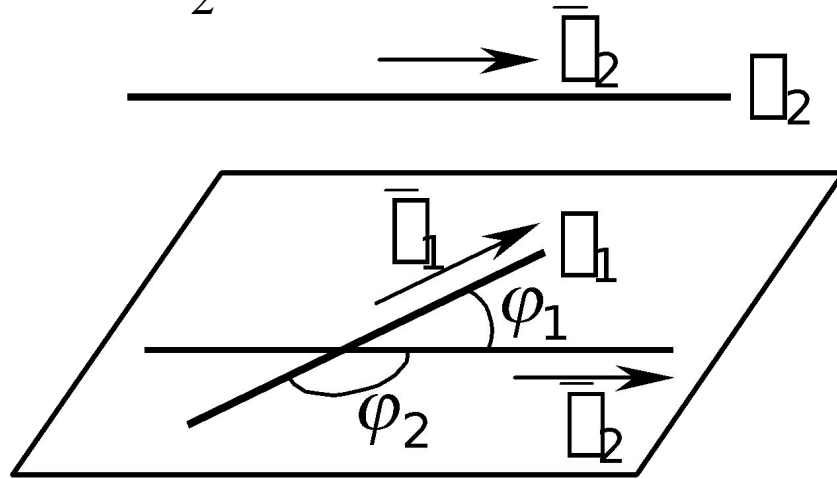
$$\square_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \square_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

$\bar{\square}_i = \{m_i; n_i; p_i\}$ – направляющий вектор прямой \square_i ,

$$M_i(x_i, y_i, z_i) \in \square_i \quad (i = 1, 2).$$

ЗАДАЧА 2. Найти угол между пересекающимися (скрещивающимися) прямыми в пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Углом между двумя скрещивающимися прямыми ℓ_1 и ℓ_2 называется угол между прямой ℓ_1 и проекцией прямой ℓ_2 на любую плоскость, проходящую через прямую ℓ_1 .



Т.е., угол между скрещивающимися прямыми – это угол между двумя пересекающимися прямыми, параллельными данным.

Получаем:

$$\cos \varphi_{1,2} = \pm \frac{|(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2)|}{|\bar{\rho}_1| \cdot |\bar{\rho}_2|} = \pm \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

где знак плюс берется для острого угла, а знак минус – для тупого.

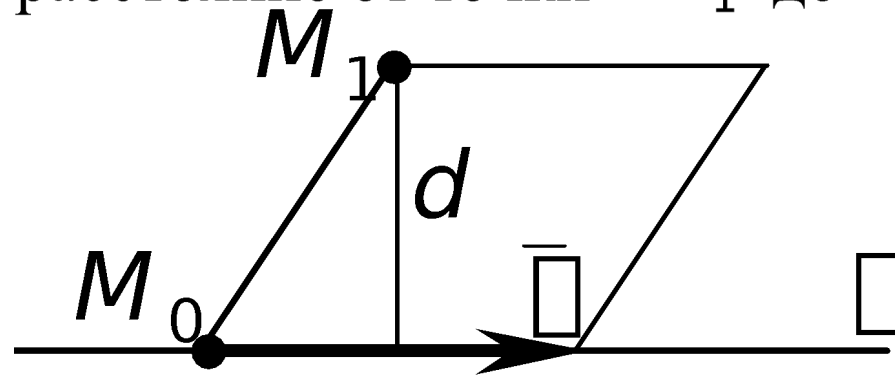
Пусть дана прямая $\bar{\square} : \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – точка, не принадлежащая этой прямой.

ЗАДАЧА 3. Найти расстояние от точки до прямой в пространстве.

Обозначим: $\bar{\square} = \{m, n, p\}$ – направляющий вектор прямой \square ,

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка на прямой \square ,

d – расстояние от точки M_1 до \square .



Получаем:

$$d = \frac{|\left[\bar{\square}, \overline{M_0 M_1} \right]|}{|\bar{\square}|}.$$

Пусть даны две скрещивающиеся прямые:

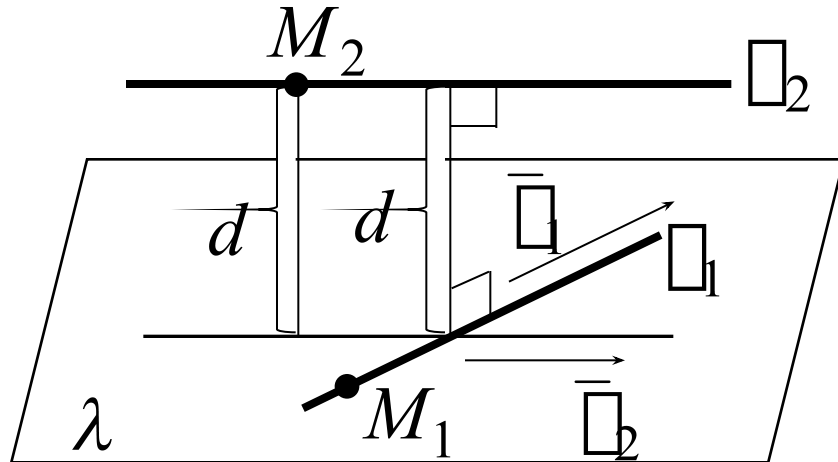
$$\ell_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \ell_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

$\vec{m}_i = \{m_i; n_i; p_i\}$ – направляющий вектор ℓ_i ,

$M_i(x_i, y_i, z_i) \in \ell_i$

ЗАДАЧА 4. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.

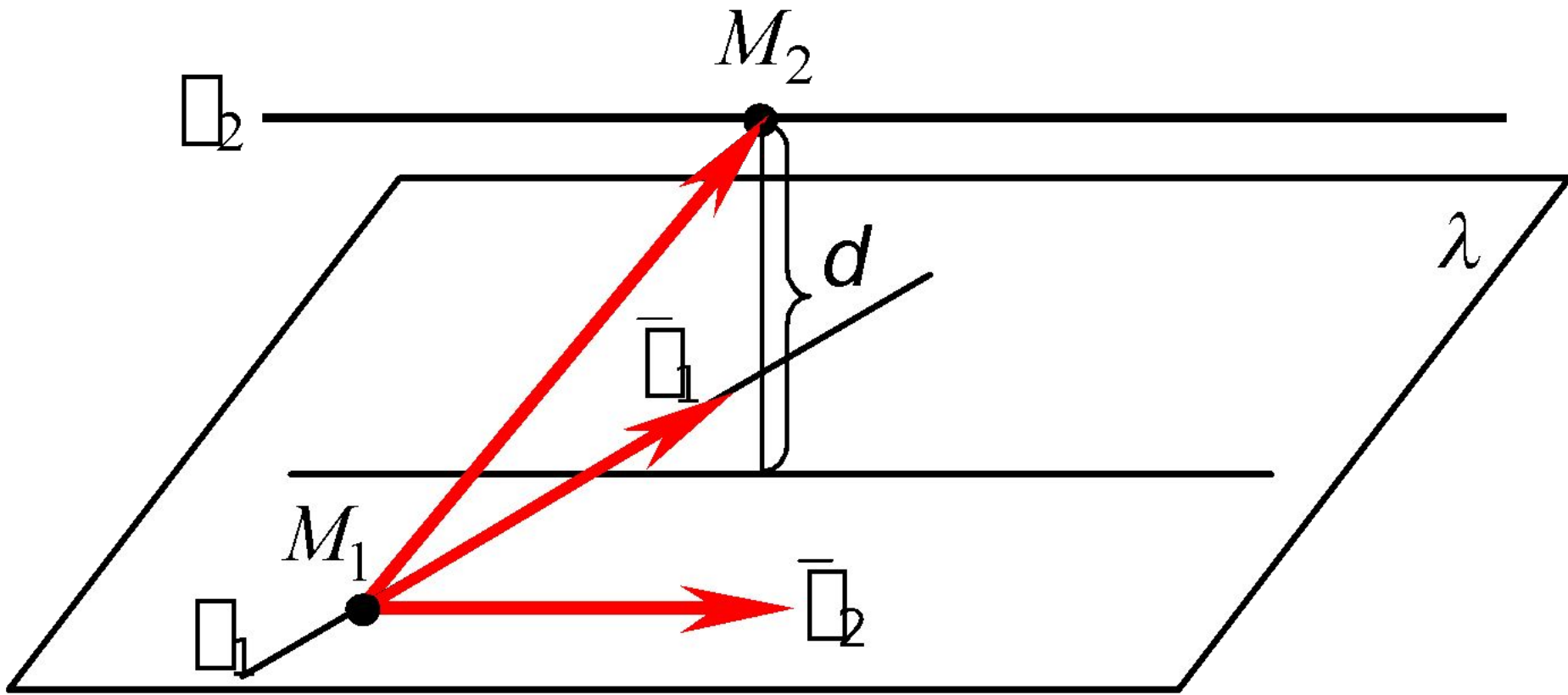


Получаем:

$$d = \frac{|Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

где $Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости λ ,

$M_2(x_2; y_2; z_2)$ – любая точка на прямой ℓ_2 .



Тогда d – высота пирамиды, опущенная из точки M_2 .
Следовательно:

$$d = \frac{3 \cdot V_{\text{тип}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{6} \cdot |(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \overline{M_1 M_2})|}{\frac{1}{2} \cdot |[\bar{Q}_1, \bar{Q}_2]|} = \frac{|(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \overline{M_1 M_2})|}{|[\bar{Q}_1, \bar{Q}_2]|}$$

Пусть даны две пересекающиеся прямые

$$\square_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \square_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

ЗАДАЧА 5. Найти точку пересечения прямых.

Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка пересечения прямых. Тогда $(x_0; y_0; z_0)$ – решение системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \\ \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_1 + t \cdot m_1, \\ y = y_1 + t \cdot n_1, \\ z = z_1 + t \cdot p_1, \\ x = x_2 + \tau \cdot m_2, \\ y = y_2 + \tau \cdot n_2, \\ z = z_2 + \tau \cdot p_2. \end{cases}$$

5. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть в пространстве заданы плоскость λ и прямая ℓ . Они могут

- 1) быть параллельны;

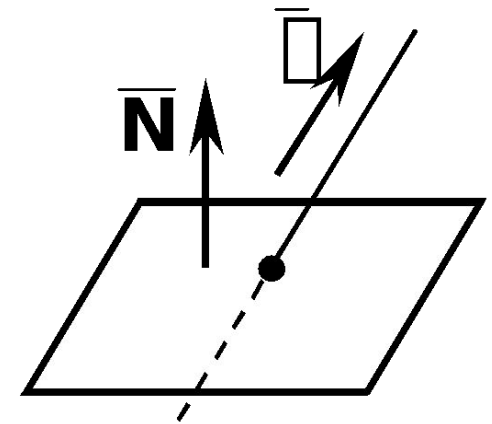
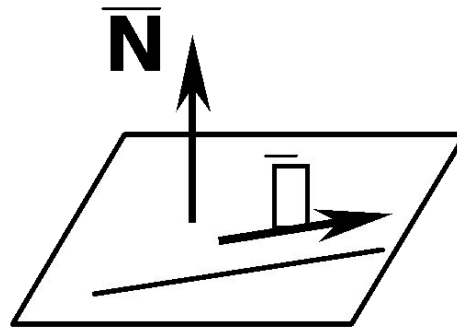
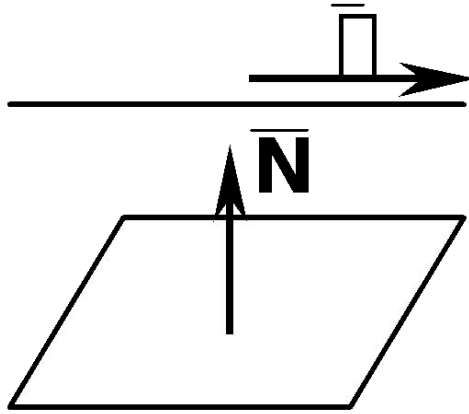
- 2) прямая может лежать в плоскости;

- 3) прямая и плоскость могут пересекаться в одной точке.

Пусть $\lambda: Ax + By + Cz + D = 0$ и $\ell: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

Тогда $\bar{\mathbf{N}} = \{A; B; C\}$ – нормальный вектор плоскости,

$\bar{\mathbf{r}} = \{m; n; p\}$ – направляющий вектор прямой.



а) Если прямая параллельна плоскости или прямая принадлежит плоскости, $(\vec{N}, \vec{r}) = 0$ (10)

или в координатной форме

$$Am + Bn + Cp = 0. \quad (11)$$

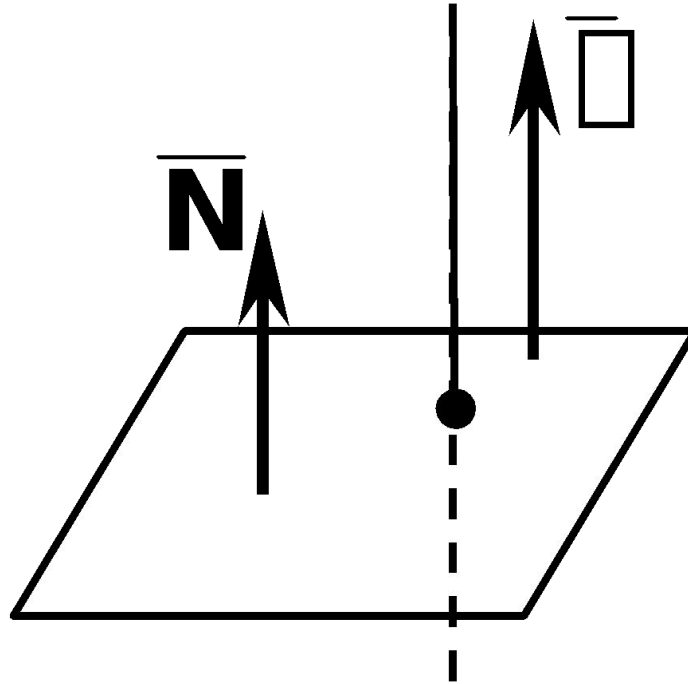
Если условие (10) (условие (11)) не выполняется, то прямая и плоскость пересекаются в одной точке.

б) Если прямая принадлежит плоскости, то координаты любой ее точки удовлетворяют уравнению плоскости, и, следовательно, кроме условия (10) ((11)) выполняется условие

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

где $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – любая точка прямой.

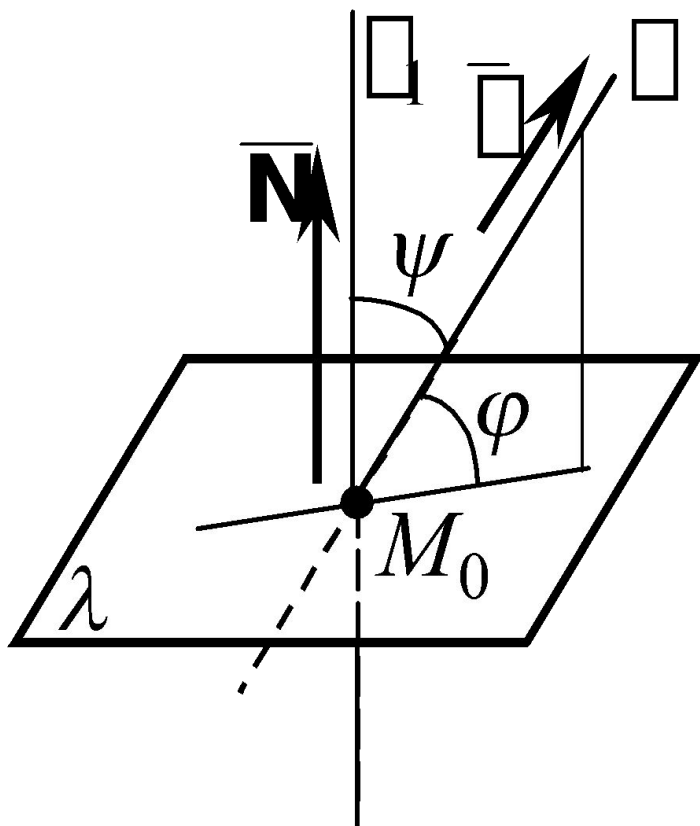
Частным случаем пересечения прямой и плоскости в одной точке является перпендикулярность прямой и плоскости



В этом случае $\bar{\mathbf{N}} \parallel \bar{\square}$ т.е. $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Углом между прямой ℓ и плоскостью λ называется угол φ между прямой ℓ и ее проекцией на плоскость λ .

Из определения следует, что угол между прямой и плоскостью всегда острый.



Следовательно,

$$\sin \varphi = \cos \psi = \frac{|(\bar{\mathbf{N}}, \bar{\mathbf{l}})|}{|\bar{\mathbf{N}}| \cdot |\bar{\mathbf{l}}|}$$