Аналитическая геометрия

Аналитическая геометрия – раздел геометрии, в котором простейшие линии и поверхности (прямые, плоскости, кривые и поверхности второго порядка) исследуются средствами алгебры.

Линией на плоскости называют геометрическое место точек $M(x;y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x,y) = 0, \qquad (1)$$

где $F(x,y)$ – многочлен степени n.

Поверхностью называют геометрическое место точек $M(x;y;z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x,y,z) = 0, \qquad (2)$$

где $F(x,y,z)$ – многочлен степени n.

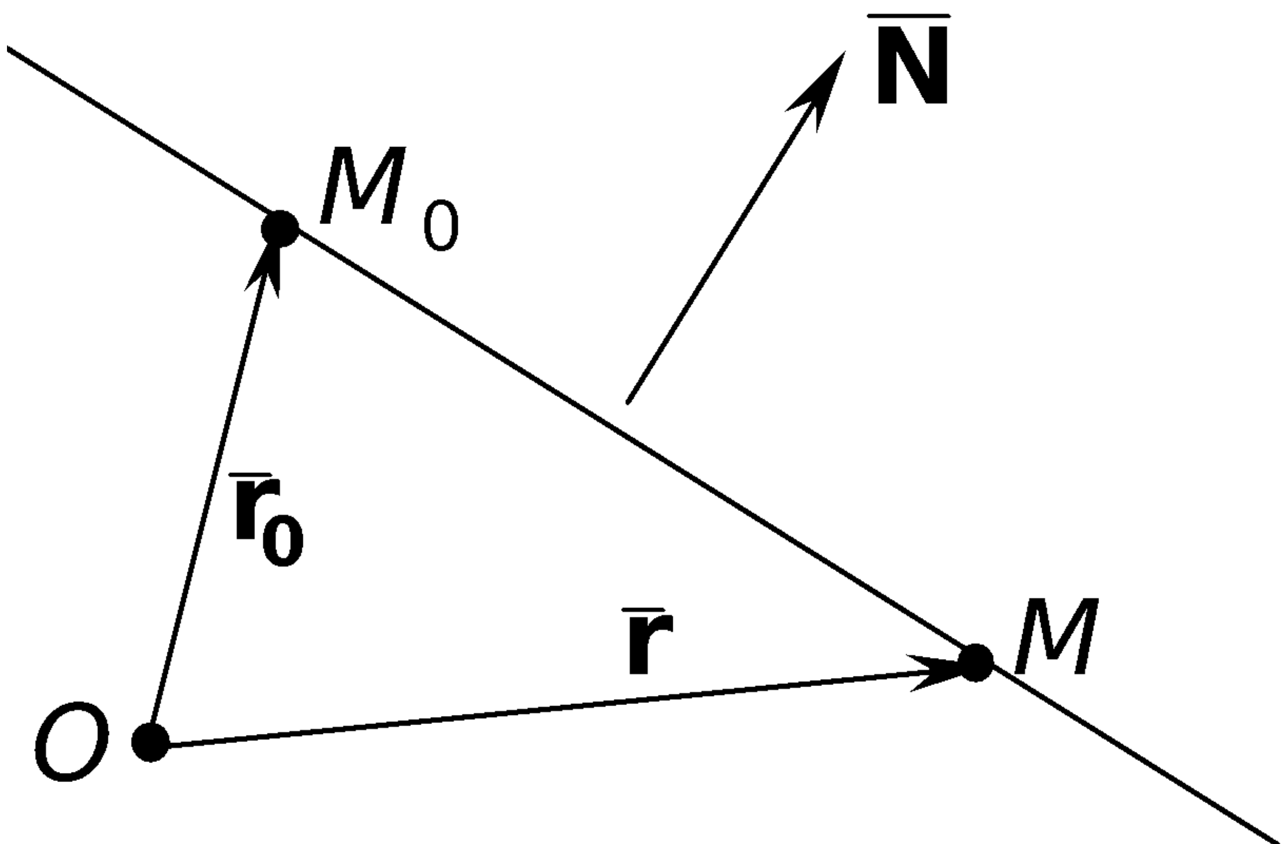
Линией в пространстве называют пересечение двух поверхностей.

Уравнения (1) и (2) называют ***общими уравнениями линии на плоскости и поверхности*** соответственно. Степень многочлена $F(x,y)$ ($F(x,y,z)$) называют ***порядком линии*** (***поверхности***).

§ Прямая на плоскости

1. Общее уравнение прямой на плоскости и его исследование

ЗАДАЧА 1. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$, перпендикулярно вектору $\overline{\mathbf{N}} = \{A, B\}$



Уравнения $(\bar{\mathbf{r}}-\bar{\mathbf{r}}_0, \bar{\mathbf{N}})=0$ и $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ называют *уравнением прямой, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0)$ *перпендикулярно вектору* $\bar{\mathbf{N}}=\{A,B\}$ (в векторной и координатной форме соответственно).

Уравнения $(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{N}})+C=0$ и $Ax+By+C=0$ называют ***общим уравнением прямой на плоскости*** (в векторной и координатной форме соответственно).

ВЫВОДЫ:

1) Прямая на плоскости является линией первого порядка. В общем случае она задается уравнением $Ax+By+C = 0$, где A,B,C – числа.

2) Коэффициенты A и B не обращаются в ноль одновременно, так как с геометрической точки зрения это координаты вектора, перпендикулярного прямой.

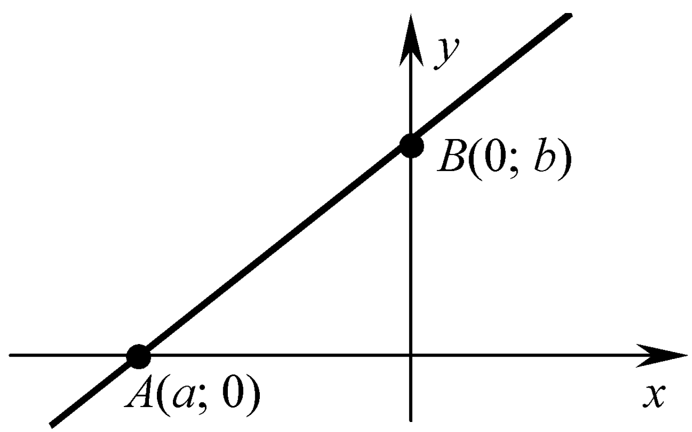
Вектор, перпендикулярный прямой, называют ***нормальным вектором*** этой прямой.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ.

Если в уравнении $Ax+By+C=0$ все коэффициенты A,B и C отличны от нуля, то уравнение называют ***полным***; если хотя бы один из коэффициентов равен нулю – уравнение называют ***неполным***.

1) Пусть общее уравнение прямой – полное. Тогда его можно записать в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (5)$$

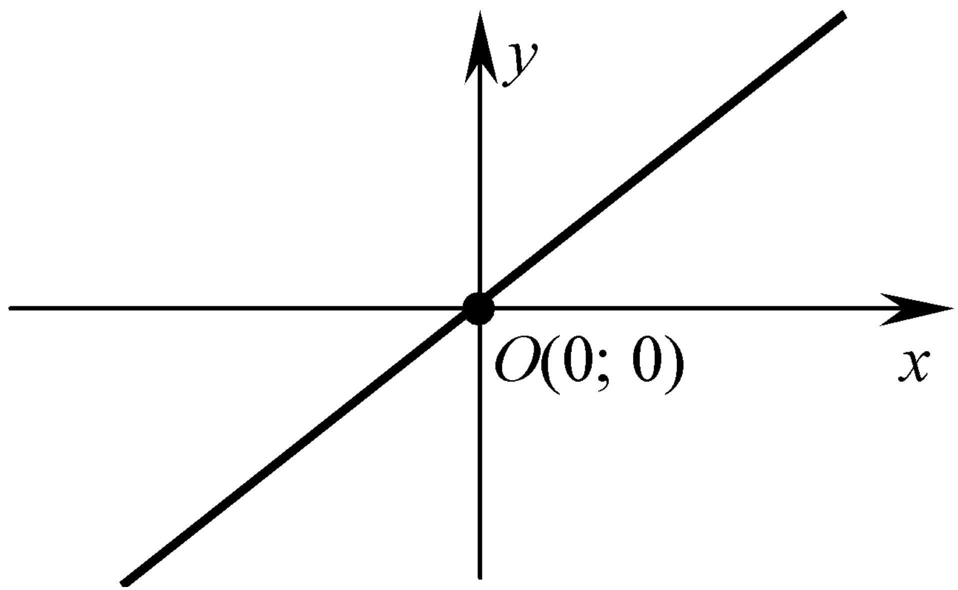


С геометрической точки зрения a и b – отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно. Уравнение (5) называют ***уравнением прямой в отрезках***.

2) Пусть в общем уравнении прямой коэффициенты A и B – ненулевые, а $C = 0$, т.е. уравнение прямой имеет вид

$$Ax + By = 0.$$

Такая прямая проходит через начало координат $O(0;0)$.

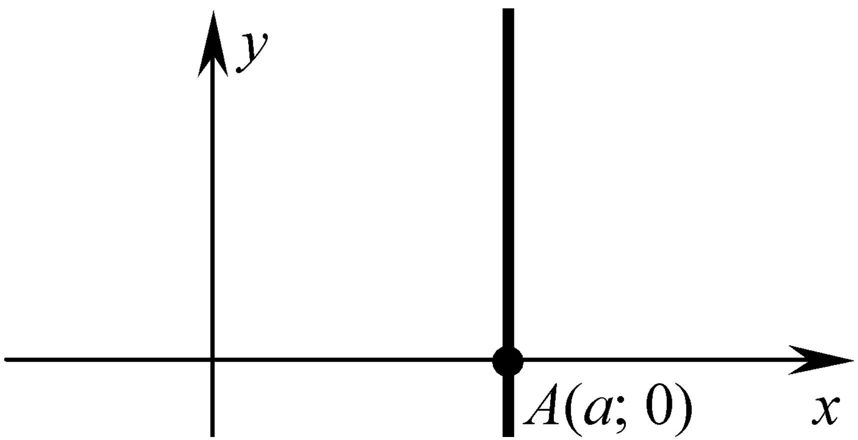


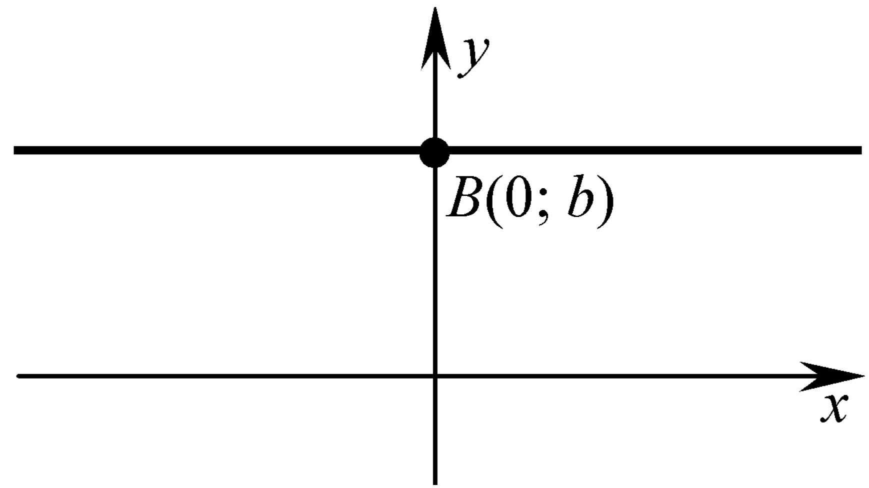
3) Пусть в общем уравнении прямой один из коэффициентов A или B – нулевой, а $C \neq 0$, т.е. уравнение прямой имеет вид

$$Ax + C = 0 \qquad \text{или} \qquad By + C = 0.$$

Эти уравнения можно записать в виде

$$x = a \qquad \text{и} \qquad y = b\ .$$





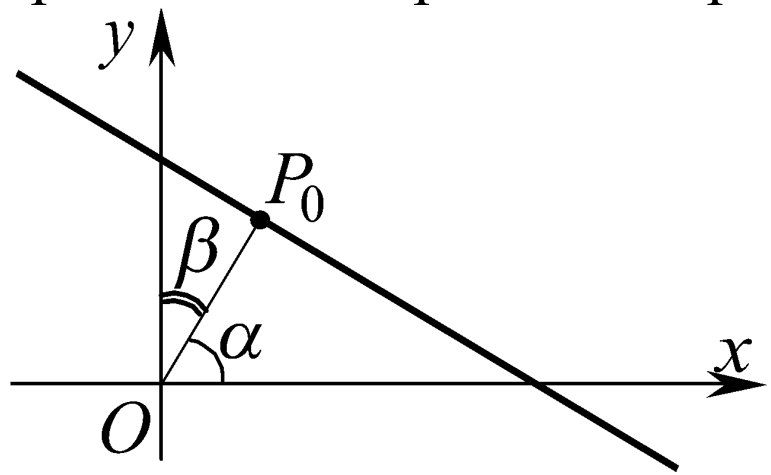
4) Пусть в общем уравнении прямой $C = 0$ и один из коэффициентов A или B тоже нулевой, т.е. уравнение прямой имеет вид $Ax = 0$ или $By = 0$.

Эти уравнения можно записать в виде

$x = 0$ (уравнения координатной оси Oy)

и $y = 0$ (уравнения координатной оси Ox).

Замечание. Пусть прямая ℓ не проходит через $O(0;0)$.



Обозначим:

1) $P_0(x_0;y_0)$ – основание перпендикуляра, опущенного на ℓ из начала координат,

2) $\bar{\mathbf{n}} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$ – орт вектора $\overline{\mathbf{OP_0}}$.

3) $p = \left|\overline{\mathbf{OP_0}}\right|$ – расстояние от начала координат до прямой

Тогда уравнение ℓ можно записать в виде

$$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + C = 0,$$

где $C = -p$ (доказать самим).

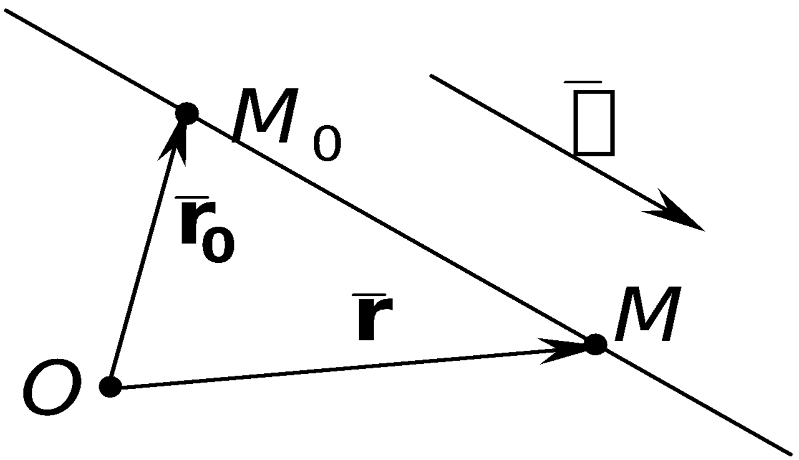
Этот частный случай общего уравнения прямой называется ***нормальным уравнением прямой***.

2. Другие формы записи уравнения прямой на плоскости

1) Параметрические уравнения прямой

ЗАДАЧА 2. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$, параллельно вектору $\overline{\square} = \{m;\ n\}$

Вектор, параллельный прямой, называют ***направляющим вектором*** этой прямой.



Уравнение $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}} + t\overline{\square}$ и систему уравнений $\begin{cases} x = x_0 + t\cdot m, \\ y = y_0 + t\cdot n. \end{cases}$

называют ***параметрическими уравнениями прямой*** (в векторной и координатной форме соответственно).

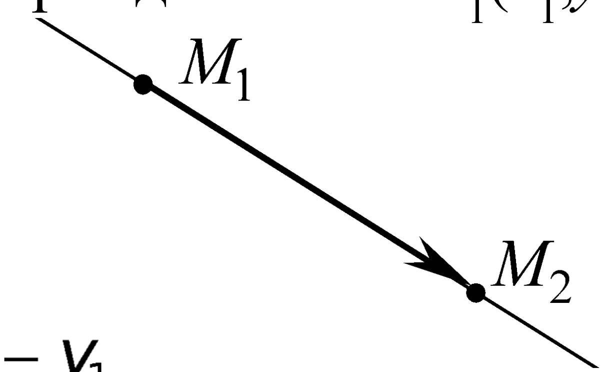
2) Каноническое уравнение прямой на плоскости

Пусть в задаче 2 вектор $\overline{\square}$ не параллелен ни одной из координатных осей (т.е. $m \neq 0$ и $n \neq 0$).

Уравнение $$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$ называют ***канонческим уравнением прямой на плоскости***.

3) Уравнение прямой, проходящей через две точки – частный случай канонического уравнения прямой.

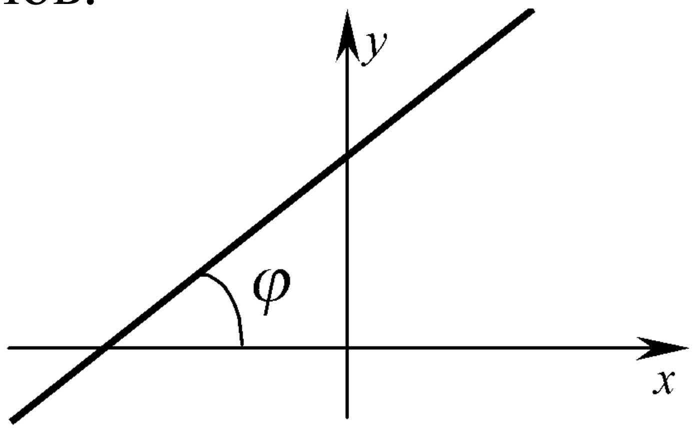
Пусть прямая проходит через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

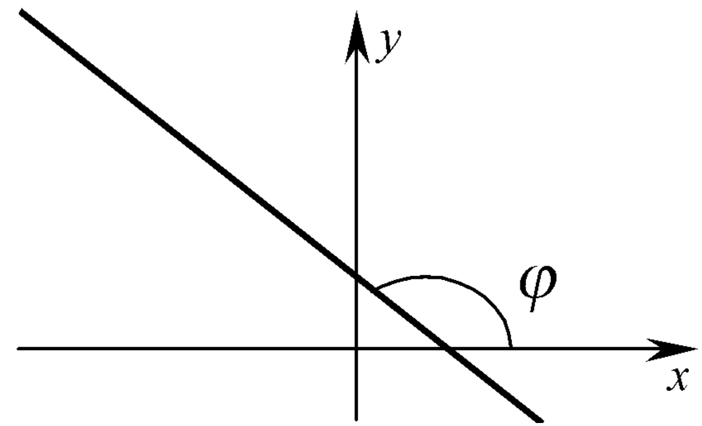


Уравнение $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$ называют ***уравнением прямой, проходящей через две точки*** $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

4) Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть прямая ℓ не параллельна оси Ox. Тогда она пересекается с Ox, образуя при этом две пары вертикальных углов.



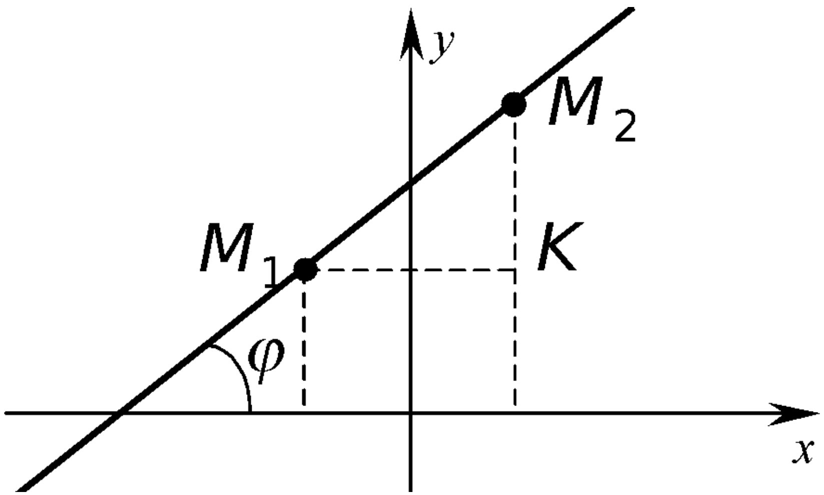


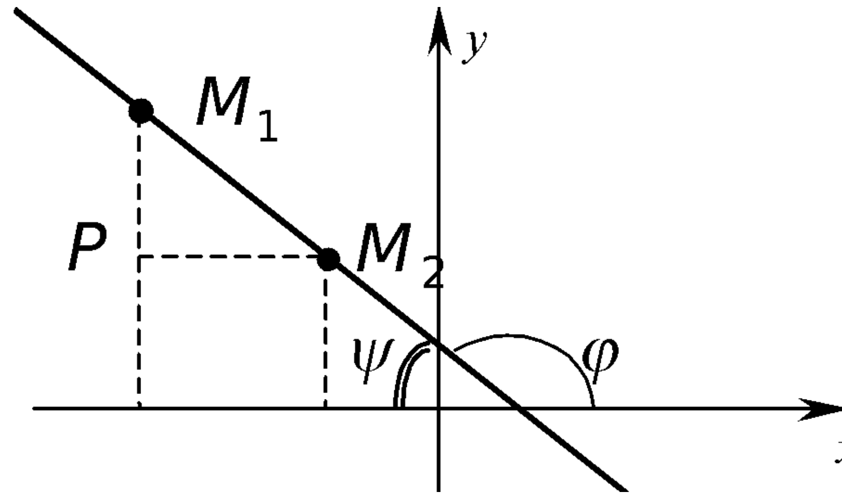
Угол φ , отсчитываемый от оси Ox к прямой ℓ против часовой стрелки, называют ***углом наклона прямой ℓ к оси Ox***.

Число $k = \mathrm{tg}\varphi$ (если оно существует, т.е. если прямая ℓ не параллельна оси Oy) называют ***угловым коэффициентом прямой***.

Для прямой, параллельной оси Ox, угол наклона прямой к оси Ox считают равным нулю. Следовательно, угловой коэффициент такой прямой $k = \mathrm{tg}0 = 0$.

Пусть прямая ℓ не параллельна оси Ox и Oy и проходит через точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ (где $x_1 < x_2$). Найдем угловой коэффициент этой прямой.





Получили: $k = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки перепишем в виде: $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

Уравнение $y - y_1 = \mathrm{k}\cdot(x - x_1)$ – это ***уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей угловой коэффициент k***.

Перепишем это уравнение в виде $y = kx + b$ (где $b = y_1 - kx_1$). Его называют ***уравнением прямой с угловым коэффициентом***. С геометрической точки зрения b – отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy.

Замечание. Уравнение прямой с угловым коэффициентом было получено в предположении, что прямая не параллельна оси Ox и Oy. Для прямой, параллельной Ox общее уравнение можно рассматривать как уравнение с угловым коэффициентом. Действительно, уравнение такой прямой

$$y = b \quad \text{или} \quad y = 0\cdot x + b,$$

где $k = 0$ – угловой коэффициент прямой.

3. Взаимное расположение прямых на плоскости

На плоскости две прямые могут:

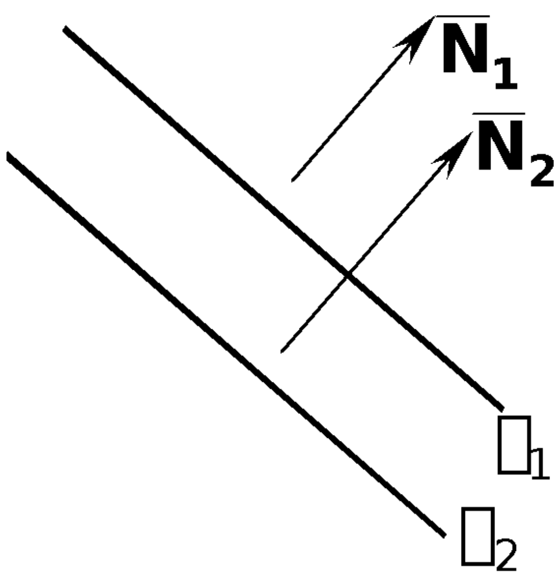
а) быть параллельны, б) пересекаться.

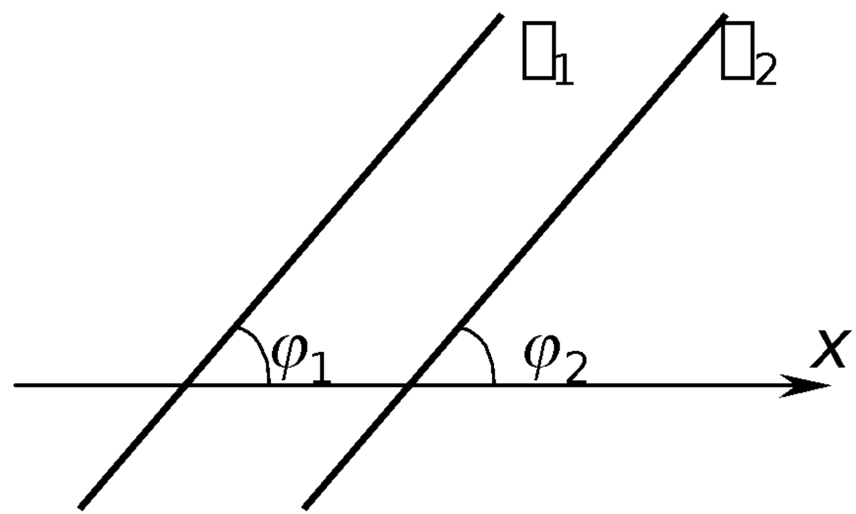
Пусть уравнения прямых ℓ_1 и ℓ_2 имеют вид:

$$\ell_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{или} \quad y = k_1x + b_1$$

$$\ell_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \text{или} \quad y = k_2x + b_2$$

1) Пусть прямые параллельны:





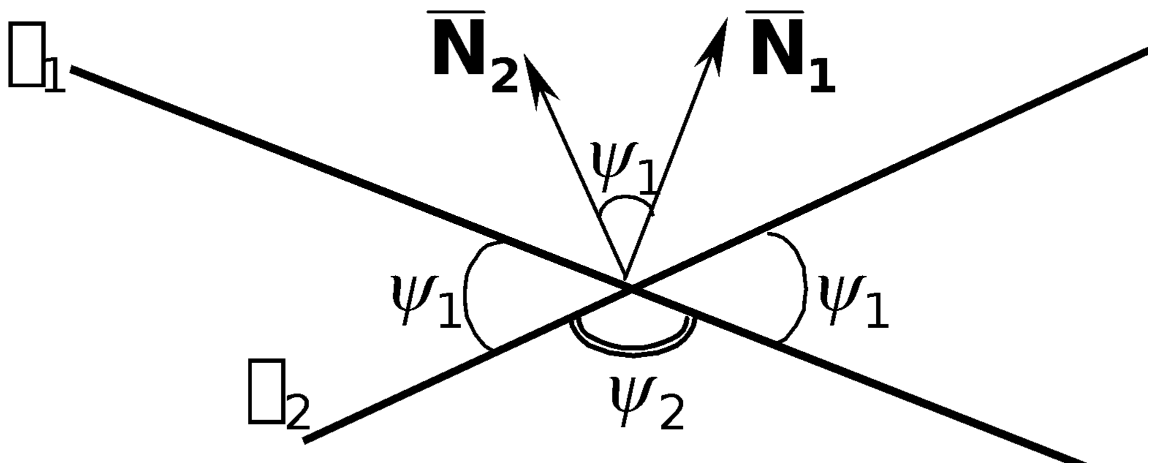
Получаем, что *прямые* ℓ_1 *и* ℓ_2 *параллельны тогда и только тогда, когда в их общих уравнениях коэффициенты при соответствующих текущих координатах пропорциональны, т.е.*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

или их угловые коэффициенты равны, т.е.

$$k_1 = k_2 .$$

2) Пусть прямые пересекаются

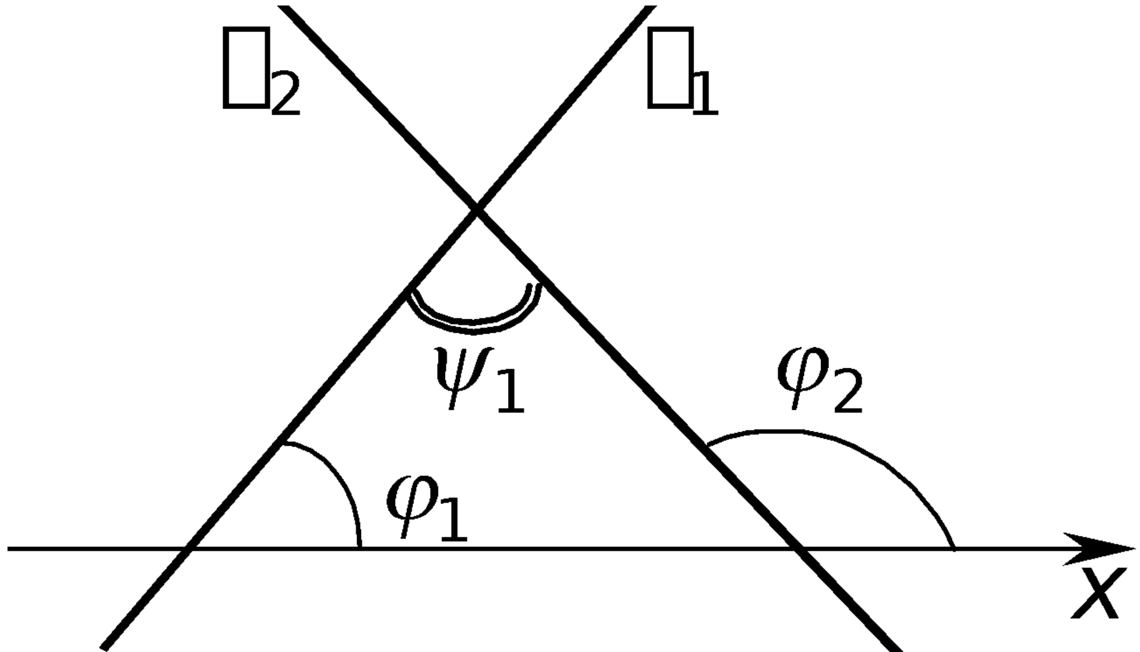


$$\cos\psi_{1,2} = \pm\frac{\left|(\overline{\mathbf{N}}_1, \overline{\mathbf{N}}_2)\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}_1\right|\cdot\left|\overline{\mathbf{N}}_2\right|} = \pm\frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2\right|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2}\cdot\sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}}$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

$$(\overline{\mathbf{N}}_1, \overline{\mathbf{N}}_2) = A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \quad -$$

критерий перпендикулярности прямых, заданных общими уравнениями.



$$\operatorname{tg}\psi_{1,2} = \pm\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}\right|$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad -$$

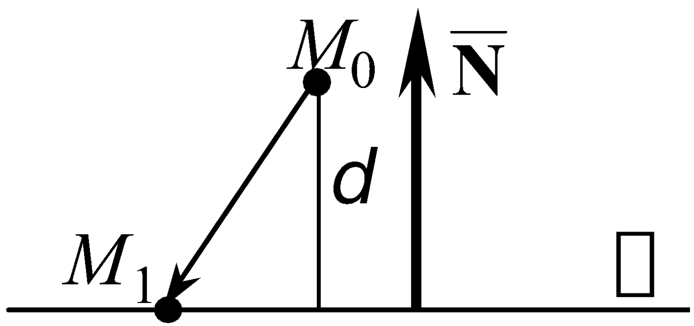
критерий перпендикулярности прямых, имеющий угловые коэффициенты k_1 ***и*** k_2.

4. Расстояние от точки до прямой

ЗАДАЧА 3. Пусть прямая ℓ задана общим уравнением

$$Ax + By + C = 0\ ,$$

$M_0(x_0;y_0)$ – точка, не принадлежащая прямой ℓ.
Найти расстояние от точки M_0 до прямой ℓ .



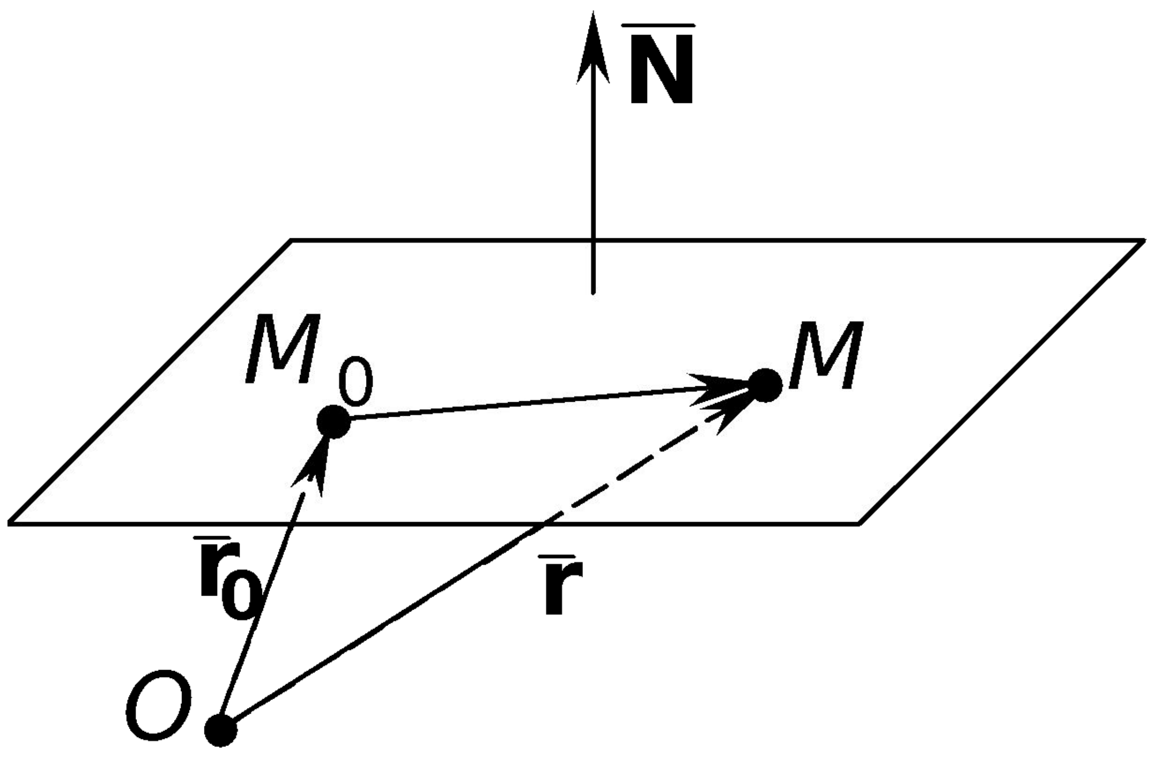
$$d = \frac{\left|(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{M_1 M_0}})\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}\right|} = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

§ Плоскость

1. Общее уравнение плоскости и его исследование

ЗАДАЧА 1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, перпендикулярно вектору $\overline{\mathbf{N}} = \{A,B,C\}$

Вектор, перпендикулярный плоскости, называют ***нормальным вектором*** этой плоскости.



Уравнения $$\left(\bar{\mathbf{r}}-\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}, \overline{\mathbf{N}}\right)=0 \qquad (1^*)$$

и $$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (1)$$

называют *уравнением плоскости, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overline{\mathbf{N}}=\{A, B, C\}$ (в векторной и координатной форме соответственно).

Уравнения $$\left(\bar{\mathbf{r}}, \overline{\mathbf{N}}\right)+D=0 \qquad (2^*)$$

и $$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (2)$$

называют ***общим уравнением плоскости*** (в векторной и координатной форме соответственно).

ВЫВОДЫ:

1) Плоскость является поверхностью первого порядка. В общем случае она задается уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, где A,B,C,D – числа.
2) Коэффициенты A, B, C не обращаются в ноль одновременно, так как с геометрической точки зрения это координаты вектора, перпендикулярного плоскости.

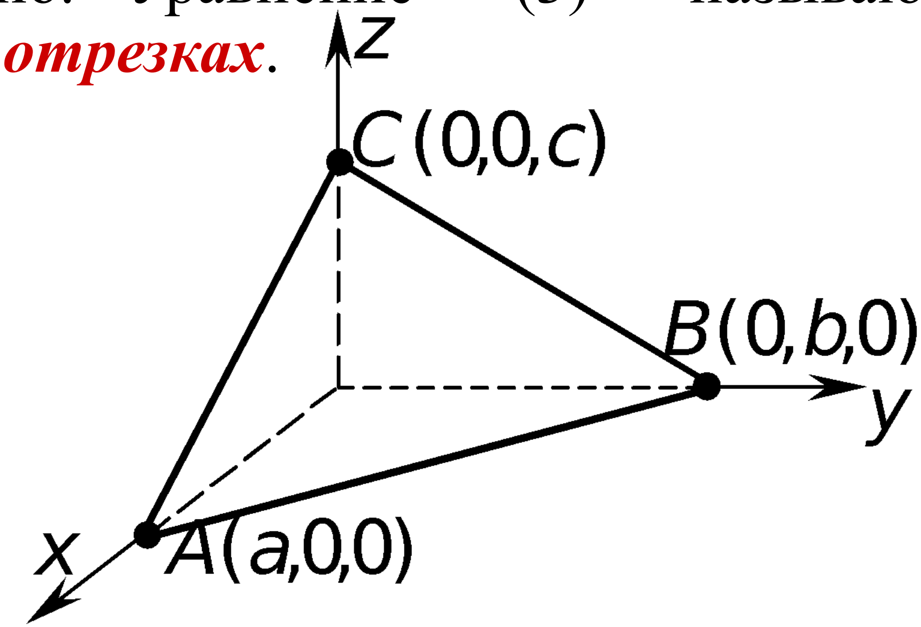
ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

Если в уравнении $Ax+By+Cz+D=0$ все коэффициенты A,B,C и D отличны от нуля, то уравнение называют ***полным***; если хотя бы один из коэффициентов равен нулю – ***неполным***.

1) Пусть общее уравнение плоскости – полное. Тогда его можно записать в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (3)$$

С геометрической точки зрения a,b и с – отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях Ox, Oy и Oz соответственно. Уравнение (3) называют ***уравнением плоскости в отрезках***.

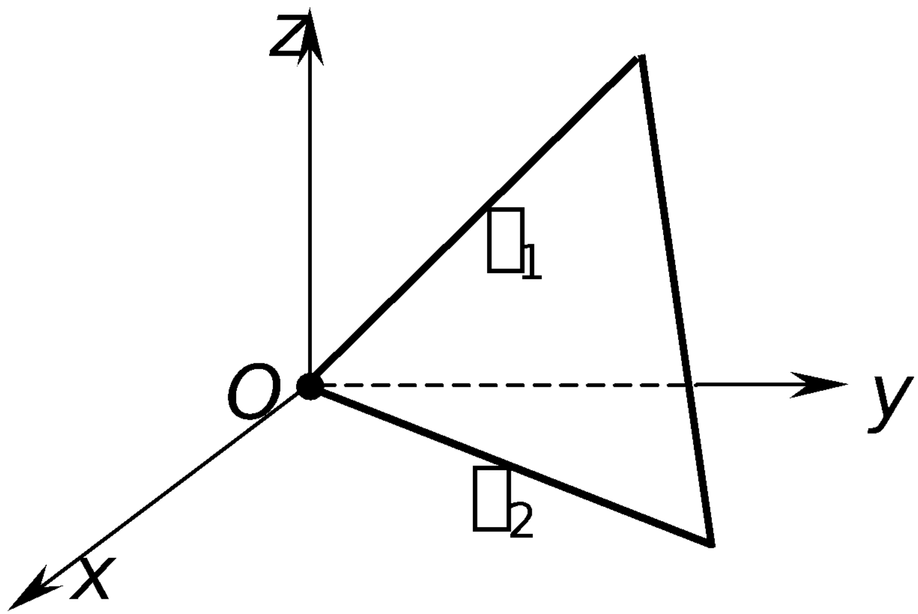


2) Пусть в общем уравнении плоскости коэффициенты A, B и С – ненулевые, а $D = 0$, т.е. уравнение плоскости имеет вид

$$Ax+By+Cz=0.$$

Такая плоскость проходит через начало координат $O(0;0;0)$.

ℓ_1: $By+Cz=0$ (пересечение с плоскостью Oyz)
ℓ_2: $Ax+By=0$ (пересечение с плоскостью Oxy)



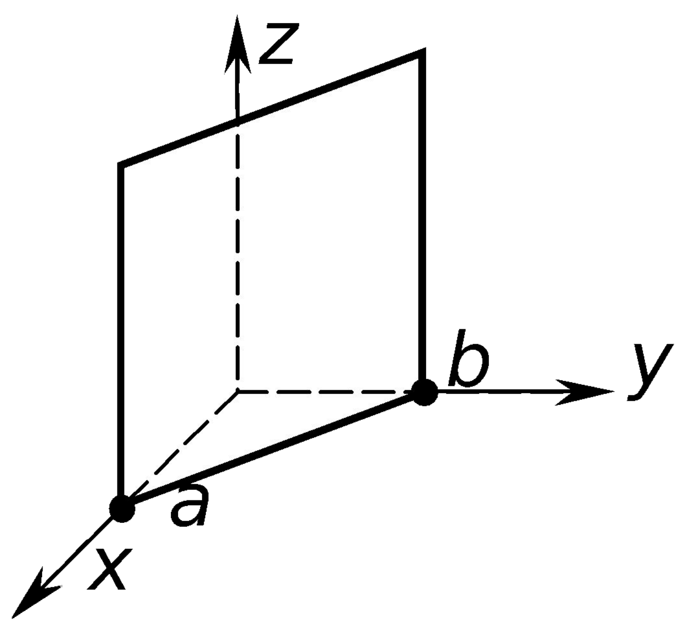
3) Пусть в общем уравнении плоскости один из коэффициентов A, B или C – нулевой, а $D \neq 0$, т.е. уравнение плоскости один из следующих трех видов:

а) $Ax+By+D=0$ б) $Ax+Cz+D=0$ в) $By+Cz+D=0$.

Эти уравнения можно записать соответственно в виде

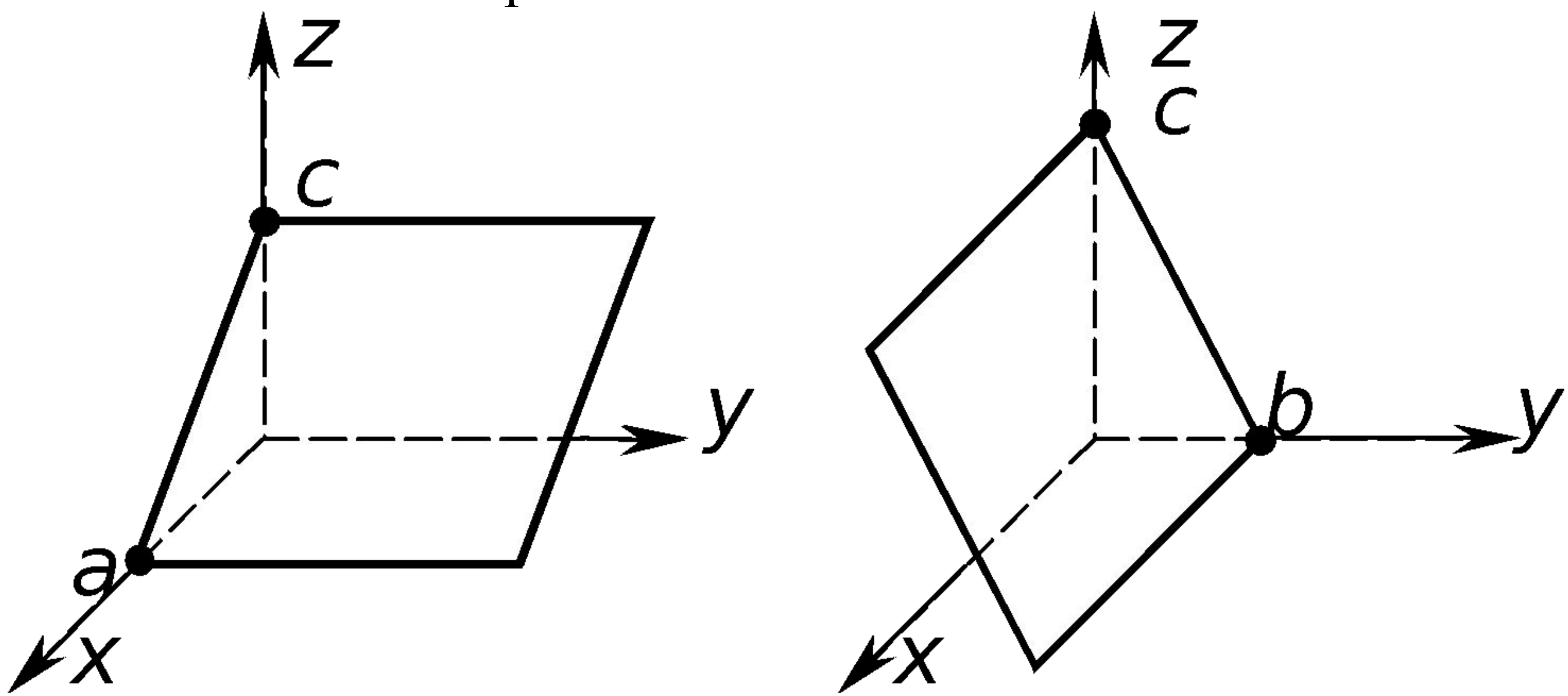
а) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ б) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1$ в) $\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

а) плоскость отсекает на осях Ox и Oy отрезки a и b соответственно и параллельна оси Oz;



б) плоскость отсекает на осях Ox и Oz отрезки a и c соответственно и параллельна оси Oy;

в) плоскость отсекает на осях Oy и Oz отрезки b и c соответственно и параллельна оси Ox.



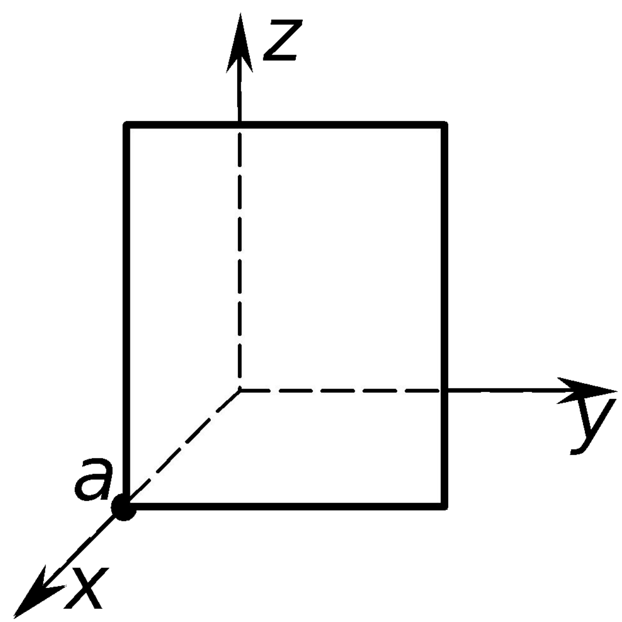
Иначе говоря, ***плоскость, в уравнении которой отсутствует одна из координат, параллельна оси отсутствующей координаты***.

4) Пусть в уравнении плоскости (2) два из трех коэффициентов A, B или C – нулевые, а $D \neq 0$, т.е. уравнение плоскости имеет вид: а) $Ax+D=0$ или б) $By+D=0$ или в) $Cz+D=0$.

Эти уравнения можно записать соответственно в виде:

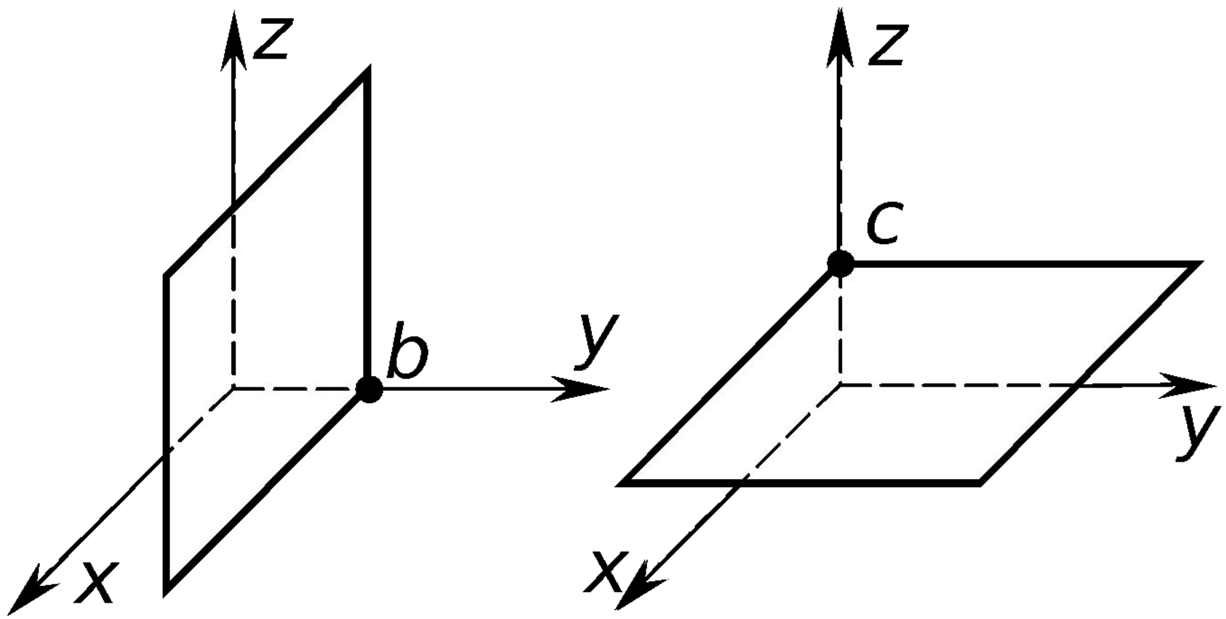
а) $\dfrac{x}{a}=1$ б) $\dfrac{y}{b}=1$ в) $\dfrac{z}{c}=1$

а) плоскость отсекает на оси Ox отрезок a и параллельна осям Oy и Oz (т.е. параллельна плоскости Oyz);



б) плоскость отсекает на Oy отрезок b и параллельна осям Ox и Oz (т.е. параллельна плоскости Oxz);

в) плоскость отсекает на Oz отрезок c и параллельна осям Ox и Oy (т.е. параллельна плоскости Oxy).

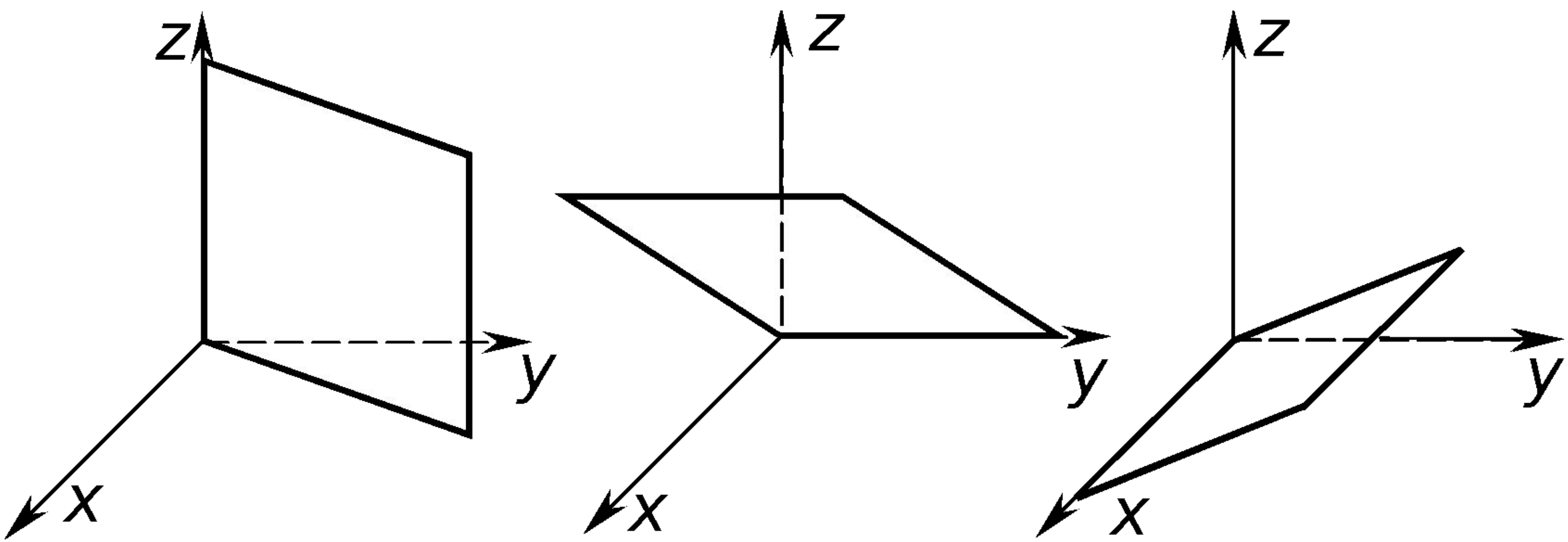


Иначе говоря, ***плоскость, в уравнении которой отсутствуют две координаты, параллельна координатной плоскости, проходящей через оси отсутствующих координат***.

5) Пусть в общем уравнении плоскости (2) $D = 0$ и один из коэффициентов A, B или C тоже нулевой, т.е. уравнение плоскости имеет вид:

а) $Ax+By = 0$ или б) $Ax+Cz = 0$ или в) $By+Cz = 0$.

Плоскость проходит через начало координат и ось отсутствующей координаты



6) Пусть в общем уравнении плоскости (2) три коэффициента равны нулю, т.е. уравнение плоскости имеет вид

а) $Ax = 0$ или б) $By = 0$ или в) $Cz = 0$.

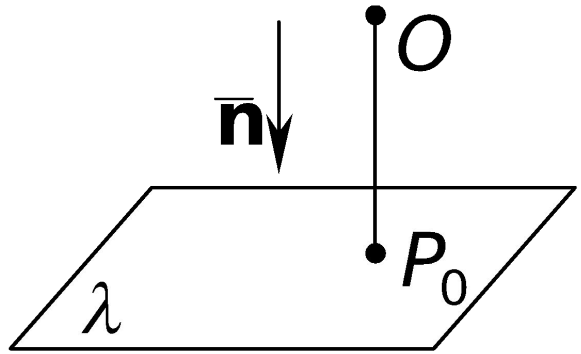
Эти уравнения можно записать соответственно в виде:

а) $x = 0$ – уравнение координатной плоскости Oyz;

б) $y = 0$ – уравнение координатной плоскости Oxz,

в) $z = 0$ – уравнение координатной плоскости Oxy.

Замечание. Пусть плоскость λ не проходит через $O(0;0;0)$.



Обозначим:

1) $P_0(x_0;y_0;z_0)$ – основание перпендикуляра, опущенного на λ из начала координат,

2) $\overline{\mathbf{n}} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – орт вектора $\overline{\mathbf{OP_0}}$.

3) $p = \left|\overline{\mathbf{OP_0}}\right|$ – расстояние от начала координат до λ

Тогда уравнение λ можно записать в виде

$$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z + D = 0,$$

где $D = -p$ (доказать самим).

Этот частный случай общего уравнения плоскости называется ***нормальным уравнением плоскости***.

2. Другие формы записи уравнения плоскости

Другие формы записи:

Уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору (см. уравнение (1) и (1*));

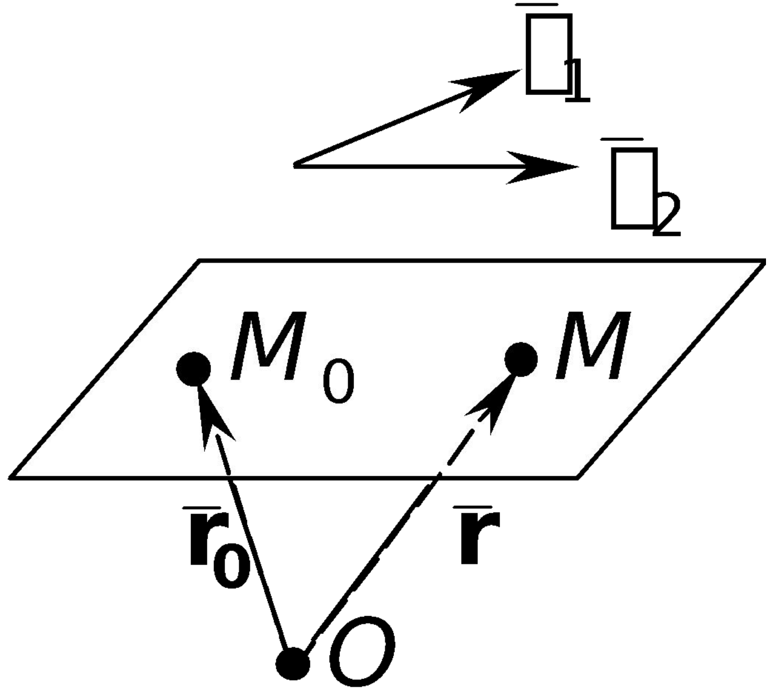
Уравнение плоскости в отрезках (см уравнение (2));

Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам;

Уравнение плоскости, проходящей через три точки;

1) Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам

ЗАДАЧА 2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, параллельно неколлинеарным векторам $\bar{\square}_1=\{m_1;n_1;p_1\}$ и $\bar{\square}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$



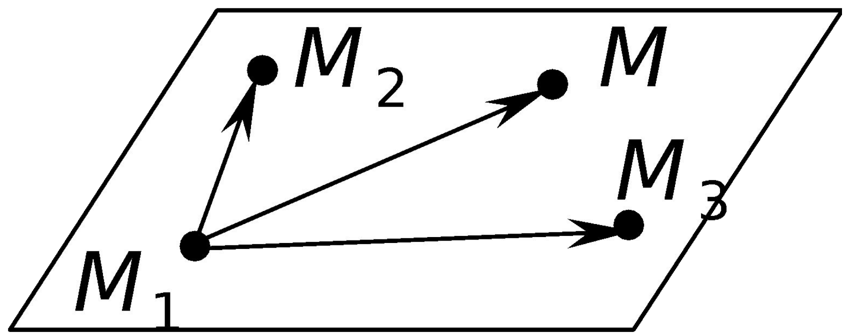
Уравнения $$\left(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}, \bar{\square}_1, \bar{\square}_2\right) = 0 \qquad (4^*)$$

и $$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

называют ***уравнениями плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам*** (в векторной и координатной форме соответственно).

2) Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой – частный случай уравнения (4)

Пусть плоскость проходит через три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$, не лежащие на одной прямой.



Уравнения $$(\bar{\mathbf{r}}-\bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_2-\bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_3-\bar{\mathbf{r}}_1)=0 \qquad (5^*)$$

и $$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (5)$$

называют ***уравнениями плоскости, проходящей через три точки*** $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$ (в векторной и координатной форме соответственно).

3. Взаимное расположение плоскостей

В пространстве две плоскости могут:

а) быть параллельны,   б) пересекаться.

Пусть уравнения плоскостей λ_1 и λ_2 имеют вид:

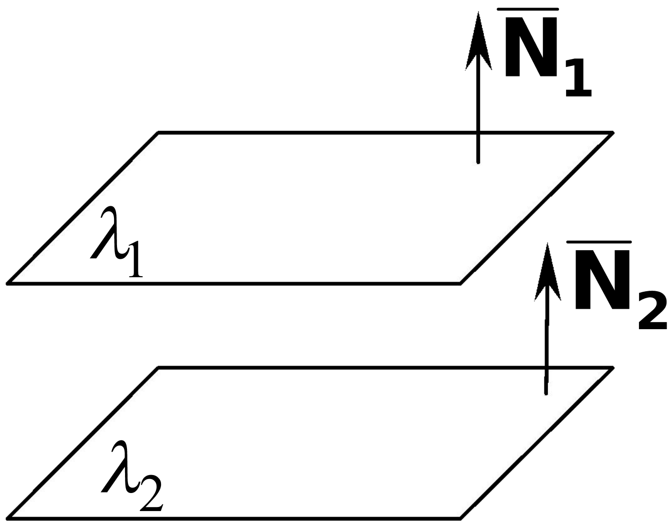
$$\lambda_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\lambda_2:\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Тогда:

$\overline{\mathbf{N}}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ – нормаль к λ_1;

$\overline{\mathbf{N}}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ – нормаль к λ_2;

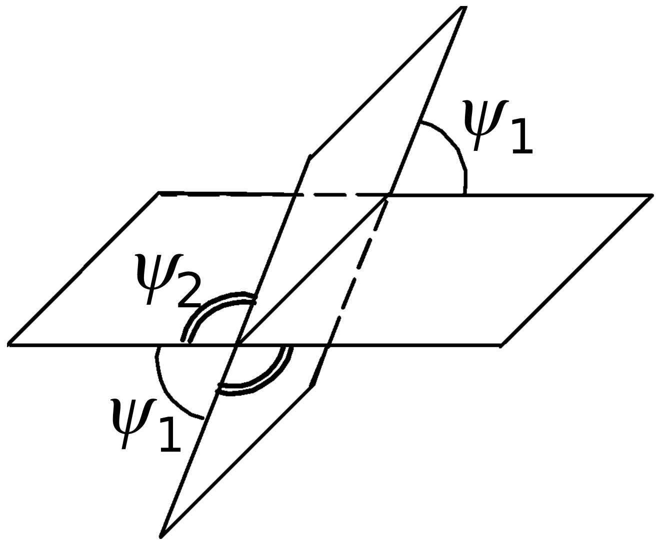
1) Пусть плоскости параллельны:

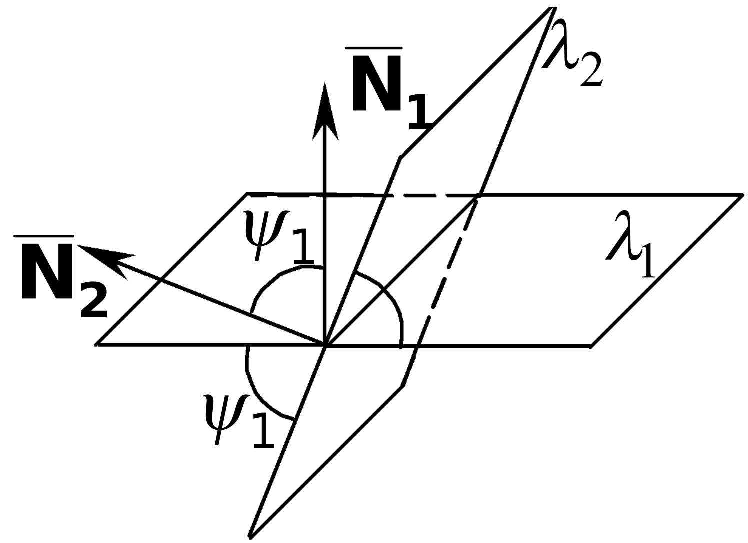


Получаем, что *плоскости* λ_1 *и* λ_2 *параллельны тогда и только тогда, когда в их общих уравнениях коэффициенты при соответствующих неизвестных пропорциональны, т.е.*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

2) Пусть плоскости пересекаются





$$\cos\psi_{1,2} = \pm \frac{\left|(\overline{\mathbf{N}}_1, \overline{\mathbf{N}}_2)\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}_1\right| \cdot \left|\overline{\mathbf{N}}_2\right|} = \pm \frac{\left|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2\right|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2}}$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

Частный случай – плоскости перпендикулярны, т.е.

$$\psi_1 = \psi_2 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \qquad \cos\psi_1 = \cos\psi_2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \cos\psi_{1,2} = \pm\frac{\left|(\overline{\mathbf{N}}_{\mathbf{1}}, \overline{\mathbf{N}}_{\mathbf{2}})\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}_{\mathbf{1}}\right| \cdot \left|\overline{\mathbf{N}}_{\mathbf{2}}\right|} = 0$$

$$(\overline{\mathbf{N}}_{\mathbf{1}}, \overline{\mathbf{N}}_{\mathbf{2}}) = A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \quad -$$

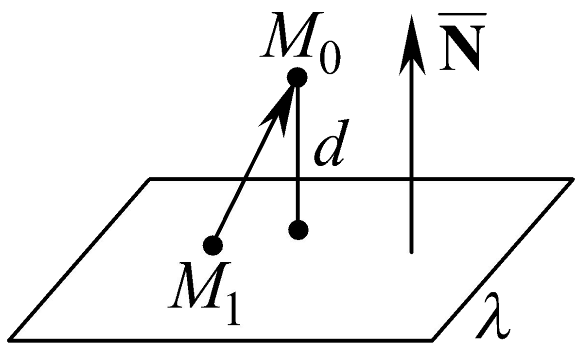
критерий перпендикулярности плоскостей, заданных общими уравнениями.

4. Расстояние от точки до плоскости

ЗАДАЧА 3. Пусть плоскость λ задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0\ ,$$

$M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка, не принадлежащая плоскости λ .
Найти расстояние от точки M_0 до плоскости λ .



$$d = \frac{\left|(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{M_1 M_0}})\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}\right|} = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

§ Прямая в пространстве

1. Уравнения прямой в пространстве

Пусть $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ – уравнения любых двух различных плоскостей, содержащих прямую ℓ. Тогда координаты любой точки прямой ℓ удовлетворяют одновременно обоим уравнениям, т.е. являются решениями системы

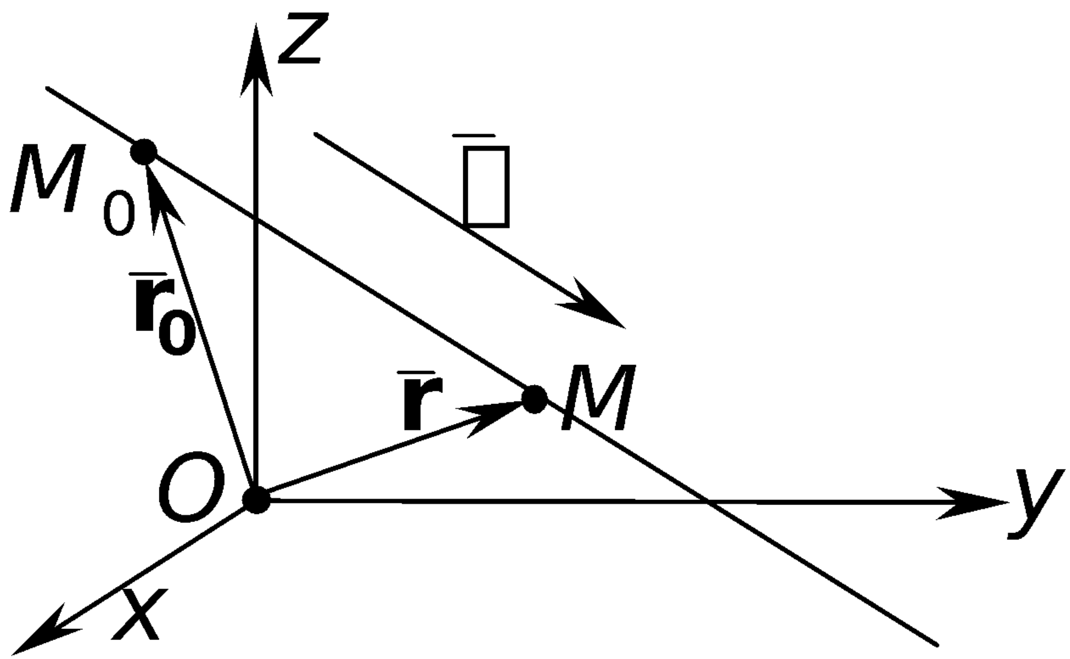
$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Систему (1) называют *общими уравнениями прямой в пространстве*.

Другие формы записи уравнений прямой в пространстве – ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ и КАНОНИЧЕСКИЕ уравнения.

ЗАДАЧА 1. Записать уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, параллельно вектору $\bar{\square} = \{m; n; p\}$

Вектор, параллельный прямой в пространстве, называют *направляющим вектором* этой прямой.



Уравнение $$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_0 + t\bar{\square}, \qquad (2^*)$$

и систему уравнений $$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n, \\ z = z_0 + t \cdot p. \end{cases} \qquad (2)$$

называют *параметрическими уравнениями прямой в пространстве* (в векторной и координатной форме соответственно).

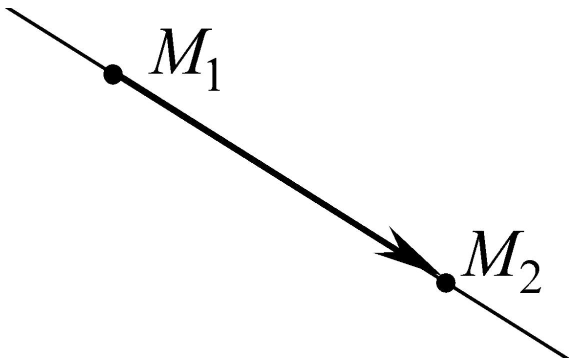
Пусть в задаче 1 вектор $\bar{\square}$ не параллелен ни одной из координатных осей (т.е. $m \neq 0$, $n \neq 0$ и $p \neq 0$).

Уравнения $$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (3)$$

называют *каноническими уравнениями прямой в пространстве*.

Частным случаем канонических уравнений являются УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ЗАДАННЫЕ ТОЧКИ.

Пусть прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.



Уравнения
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (4)$$

называют *уравнениями прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

2. Переход от общих уравнений прямой к каноническим

Пусть прямая ℓ задана общими уравнениями:

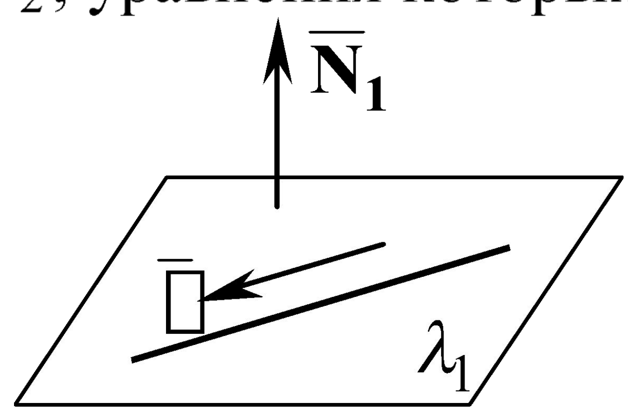
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Чтобы записать канонические (параметрические) уравнения этой прямой, *необходимо найти ее направляющий вектор и координаты какой-нибудь точки* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *на прямой*.

а) Координаты точки M_0 – это одно из решений системы (1).

б) Направляющий вектор $\overline{\square} = [\overline{\mathbf{N}}_1, \overline{\mathbf{N}}_2]$

где $\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{1} = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{2} = \{A_2; B_2; C_2\}$ – нормальные векторы к плоскостям λ_1 и λ_2, уравнения которых входят в общие уравнения прямой.



3. Взаимное расположение прямых в пространстве

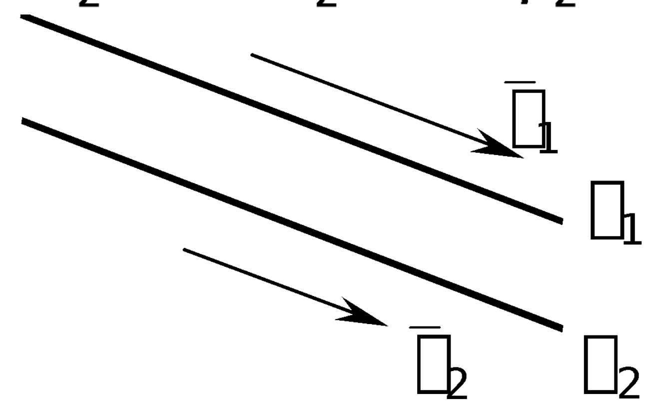
В пространстве две прямые могут:

а) быть параллельны, б) пересекаться, в) скрещиваться.

Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы каноническими уравнениями:

$$\ell_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\qquad \ell_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

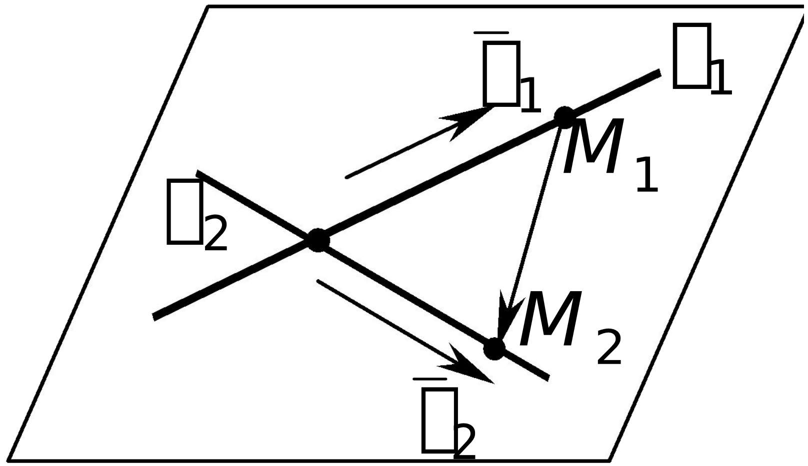
1) Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны:



Получаем: *прямые параллельны* $\Leftrightarrow$ *их направляющие векторы* $\bar{\ell}_1=\{m_1;n_1;p_1\}$ и $\bar{\ell}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$ *коллинеарные*, т.е. выполняется условие:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \qquad (6)$$

2) Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются:



Получили: *прямые* ℓ_1 *и* ℓ_2 *пересекаются* $\Leftrightarrow$ *они не параллельны и для них выполняется условие*

$$\left(\overline{\mathbf{M_1M_2}}, \bar{\square}_1, \bar{\square}_2\right) = 0, \qquad (7^*)$$

или, в координатной форме,

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

3) Если для прямых ℓ_1 и ℓ_2 не выполняется условие (6) и (7) ((7*)), то прямые скрещиваются.

4. Задачи, связанные с возможным взаимным расположением прямых

Возможное расположение прямых в пространстве приводит к следующим задачам:

1) параллельные прямые → расстояние между прямыми (т.е. расстояние от точки до прямой)?

2) пересекающиеся прямые → а) угол между прямыми?
б) точка пересечения прямых?

3) скрещивающиеся прямые → а) угол между прямыми?
б) расстояние между прямыми?

Пусть даны две прямые:

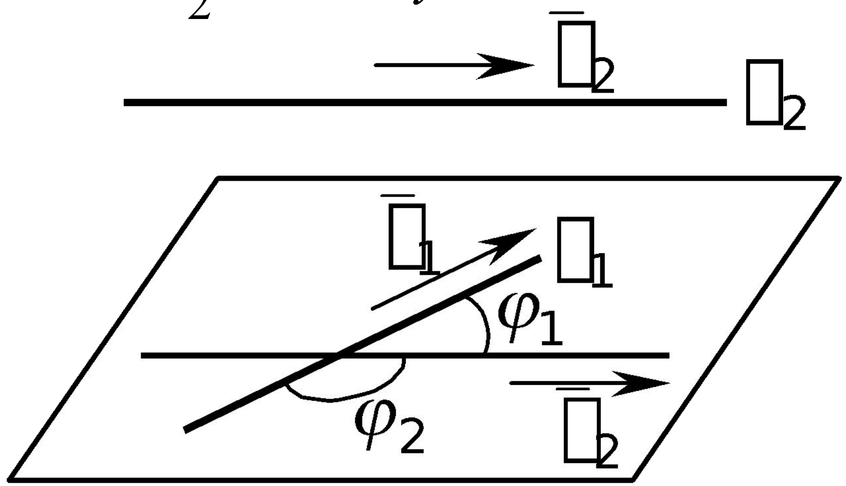
$$\ell_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \ell_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

$\bar{\ell}_i = \{m_i; n_i; p_i\}$ – направляющий вектор прямой ℓ_i,

$$M_i(x_i, y_i, z_i) \in \ell_i \quad (i = 1,2).$$

ЗАДАЧА 2. Найти угол между пересекающимися (скрещивающимися) прямыми в пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Углом между двумя скрещивающимися прямыми* ℓ_1 *и* ℓ_2 *называется угол между прямой* ℓ_1 *и проекцией прямой* ℓ_2 *на любую плоскость, проходящую через прямую* ℓ_1 .



Т.е., угол между скрещивающимися прямыми – это угол между двумя пересекающимися прямыми, параллельными данным.

Получаем:

$$\cos\varphi_{1,2} = \pm\frac{\left|(\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2)\right|}{\left|\bar{\ell}_1\right|\cdot\left|\bar{\ell}_2\right|} = \pm\frac{\left|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2\right|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

где знак плюс берется для острого угла, а знак минус – для тупого.

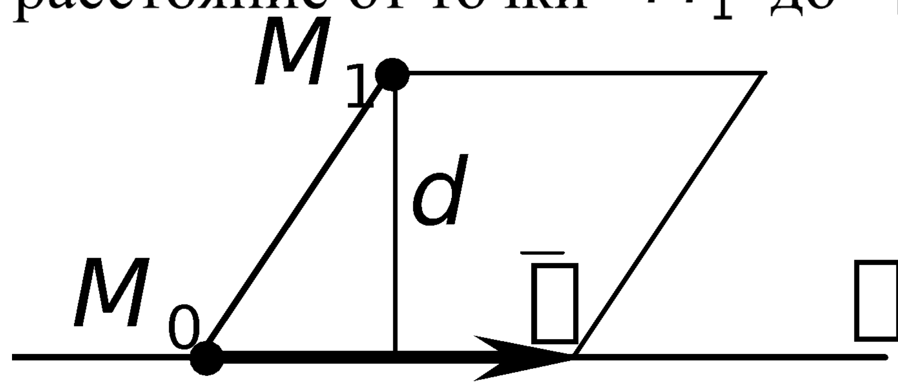
Пусть дана прямая $\square: \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ и $M_1(x_1,y_1,z_1)$ – точка, не принадлежащая этой прямой.

ЗАДАЧА 3. Найти расстояние от точки до прямой в пространстве.

Обозначим: $\bar{\square}=\{m; n; p\}$ – направляющий вектор прямой $\square$,

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка на прямой $\square$,

d – расстояние от точки M_1 до $\square$.



Получаем:

$$d=\frac{\left|\left[\bar{\square}, \overline{\mathbf{M_0M_1}}\right]\right|}{|\bar{\square}|}.$$

Пусть даны две скрещивающиеся прямые:

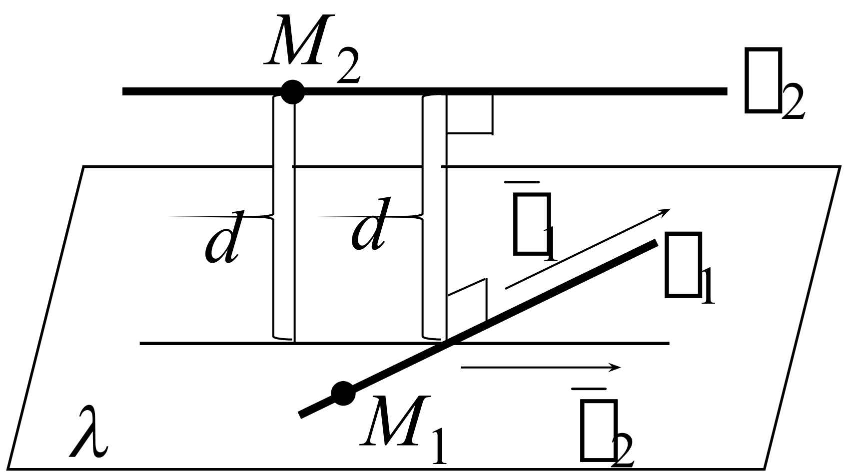
$$\ell_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \ell_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

$\overline{\square}_i = \{m_i; n_i; p_i\}$ – направляющий вектор ℓ_i,

$M_i(x_i, y_i, z_i) \in \ell_i$

ЗАДАЧА 4. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.*

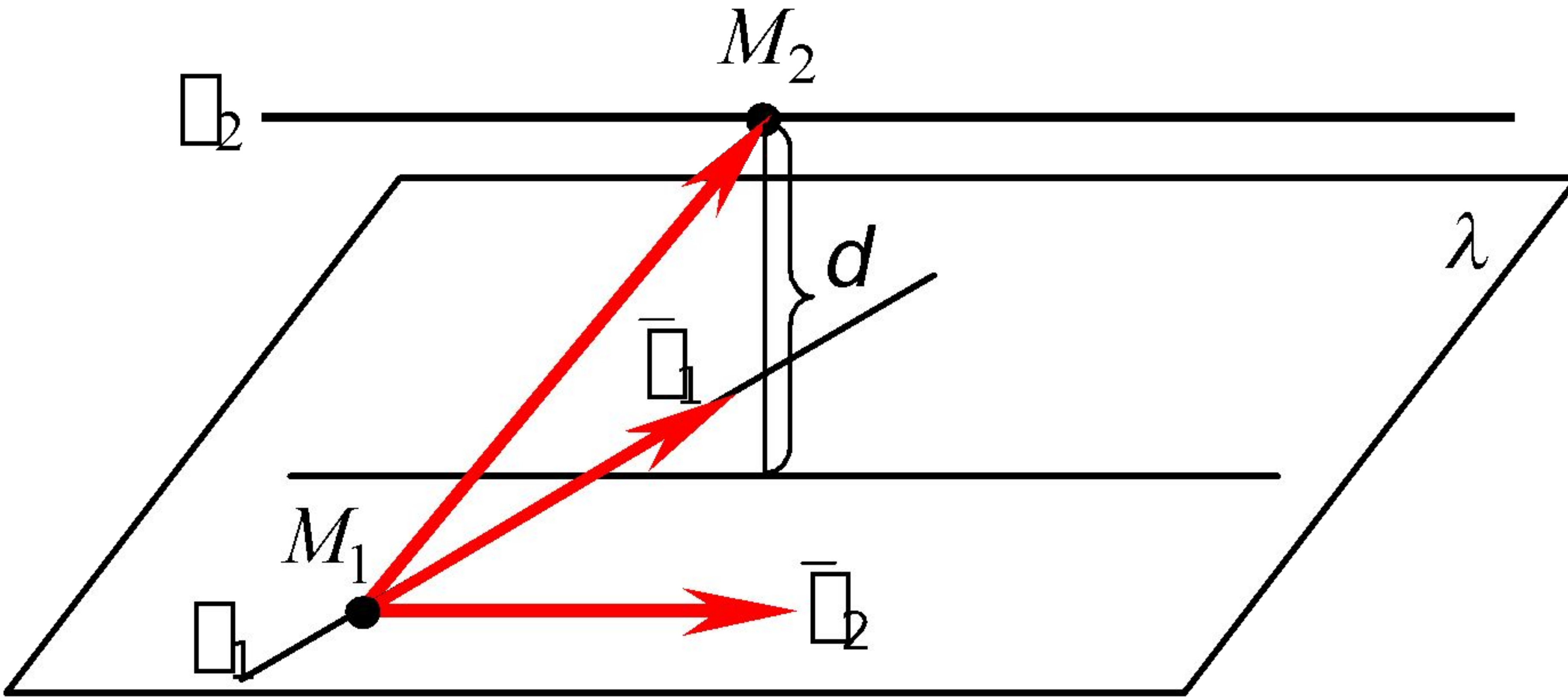


Получаем:

$$d = \frac{|Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

где $Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости λ,

$M_2(x_2; y_2; z_2)$ – любая точка на прямой ℓ_2.



Тогда d – высота пирамиды, опущенная из точки M_2.
Следовательно:

$$d = \frac{3 \cdot V_{пир}}{S_{осн}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\bar{\square}_1, \bar{\square}_2, \overline{\mathbf{M_1 M_2}} \right) \right|}{\frac{1}{2} \cdot \left| \left[\bar{\square}_1, \bar{\square}_2 \right] \right|} = \frac{\left| \left(\bar{\square}_1, \bar{\square}_2, \overline{\mathbf{M_1 M_2}} \right) \right|}{\left| \left[\bar{\square}_1, \bar{\square}_2 \right] \right|}$$

Пусть даны две пересекающиеся прямые

$$\ell_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \ell_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

ЗАДАЧА 5. Найти точку пересечения прямых.

Пусть $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка пересечения прямых. Тогда $(x_0;y_0;z_0)$ – решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1} = \dfrac{z-z_1}{p_1}, \\ \dfrac{x-x_2}{m_2} = \dfrac{y-y_2}{n_2} = \dfrac{z-z_2}{p_2}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_1 + t \cdot m_1, \\ y = y_1 + t \cdot n_1, \\ z = z_1 + t \cdot p_1, \\ x = x_2 + \tau \cdot m_2, \\ y = y_2 + \tau \cdot n_2, \\ z = z_2 + \tau \cdot p_2. \end{cases}$$

5. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть в пространстве заданы плоскость λ и прямая ℓ . Они могут 1) быть параллельны;

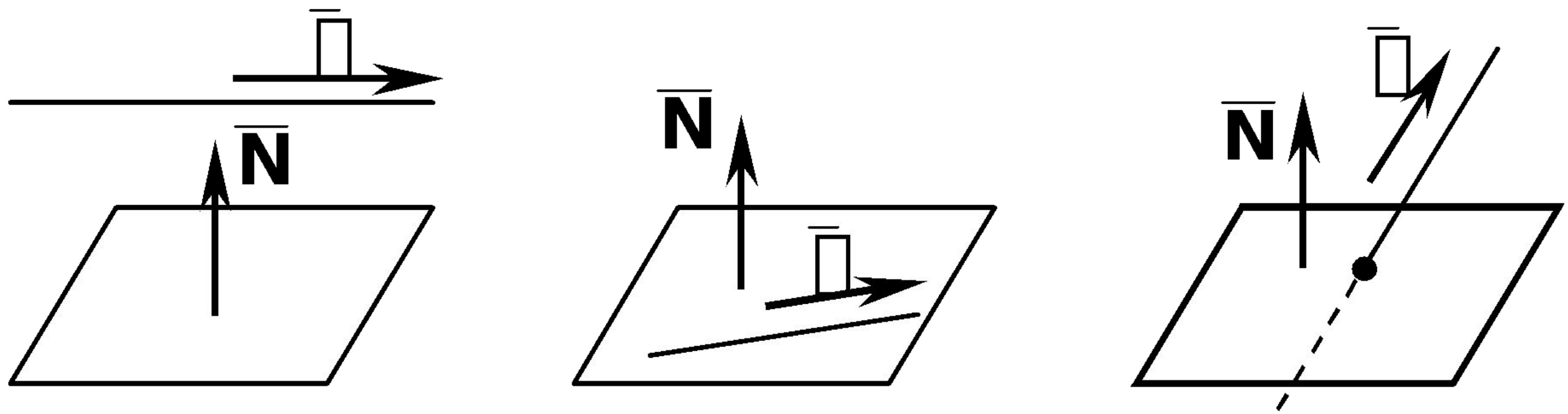
2) прямая может лежать в плоскости;

3) прямая и плоскость могут пересекаться в одной точке.

Пусть $\lambda: Ax + By + Cz + D = 0$ и $\ell: \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$.

Тогда $\overline{\mathbf{N}} = \{A;\, B;\, C\}$ – нормальный вектор плоскости,

$\overline{\ell} = \{m;\, n;\, p\}$ – направляющий вектор прямой.



а) Если прямая параллельна плоскости или прямая принадлежит плоскости, то

$$\left(\bar{\mathbf{N}}, \bar{\square}\right) = 0 \qquad (10)$$

или в координатной форме

$$Am + Bn + Cp = 0. \qquad (11)$$

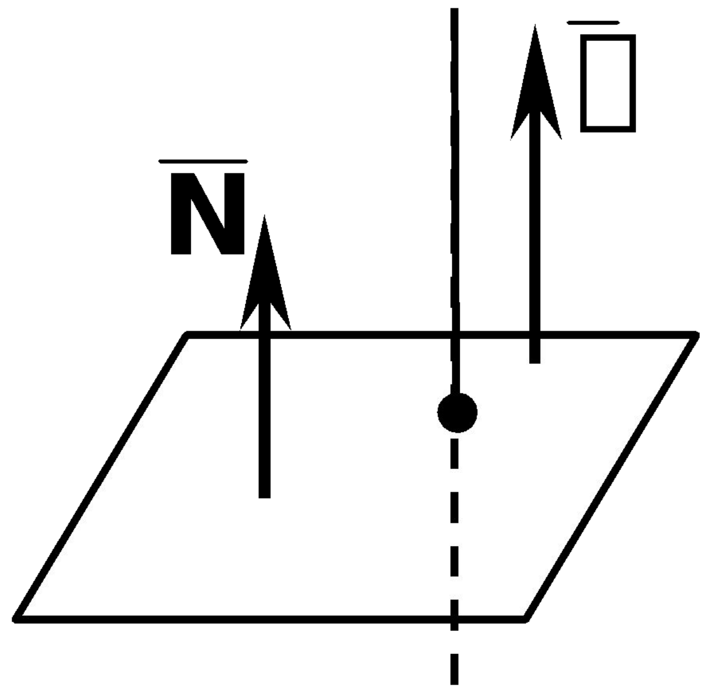
Если условие (10) (условие (11)) не выполняется, то прямая и плоскость пересекаются в одной точке.

б) Если прямая принадлежит плоскости, то координаты любой ее точки удовлетворяют уравнению плоскости, и, следовательно, кроме условия (10) ((11)) выполняется условие

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 ,$$

где $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – любая точка прямой.

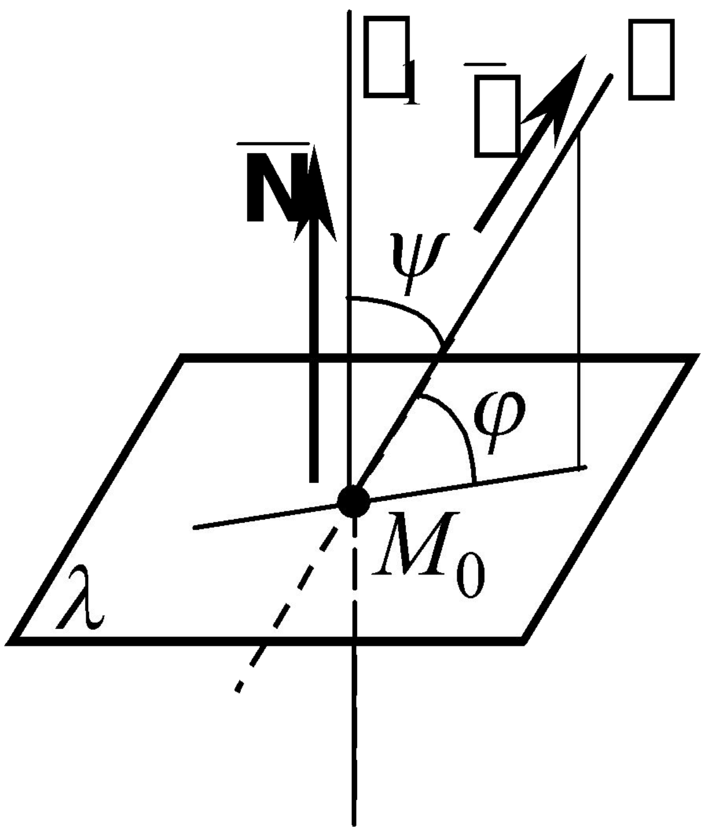
Частным случаем пересечения прямой и плоскости в одной точке является перпендикулярность прямой и плоскости



В этом случае $\overline{\mathbf{N}} \parallel \overline{\square}$ т.е. $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Углом между прямой* ℓ *и плоскостью* λ *называется угол* φ *между прямой* ℓ *и ее проекцией на плоскость* λ .

Из определения следует, что угол между прямой и плоскостью всегда острый.



Следовательно,

$$\sin\varphi = \cos\psi = \frac{\left|\left(\overline{\mathbf{N}}, \bar{\ell}\right)\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}\right| \cdot \left|\bar{\ell}\right|}$$