

Аналитическое задание многогранников

Неравенства $ax + by + cz + d \geq 0$ и $ax + by + cz + d \leq 0$ определяют полупространства, на которые плоскость, заданная уравнением $ax + by + cz + d = 0$, разбивает пространство.

Если грани выпуклого многогранника лежат в плоскостях, задаваемых уравнениями

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0, \\ \dots\dots\dots, \\ a_nx + b_ny + c_nz + d_n &= 0, \end{aligned}$$

то сам многогранник задается системой неравенств

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geq 0, \\ \dots\dots\dots, \\ a_nx + b_ny + c_nz + d_n \geq 0. \end{cases}$$

Упражнение 1

Два полупространства задаются неравенствами $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \leq 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \geq 0$. Как будет задаваться пересечение этих полупространств?

Ответ: Системой этих неравенств.

Упражнение 2

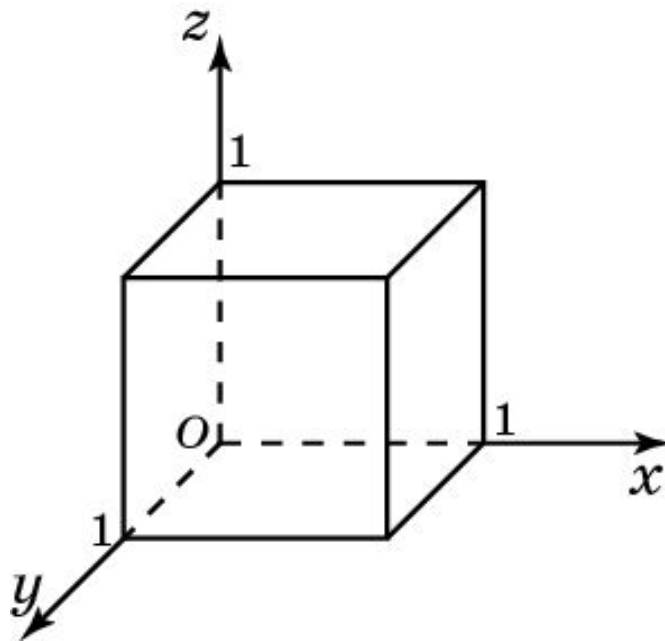
Определите, какому полупространству $5x + 3y - z - 2 \geq 0$ или $5x + 3y - z - 2 \leq 0$ принадлежит точка: а) $A(1,0,0)$; б) $B(0,1,0)$; в) $C(0,0,1)$.

Ответ: а) Первому; б) первому; в) второму.

Упражнение 3

Какой многогранник задается системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq z \leq 1? \end{cases}$$

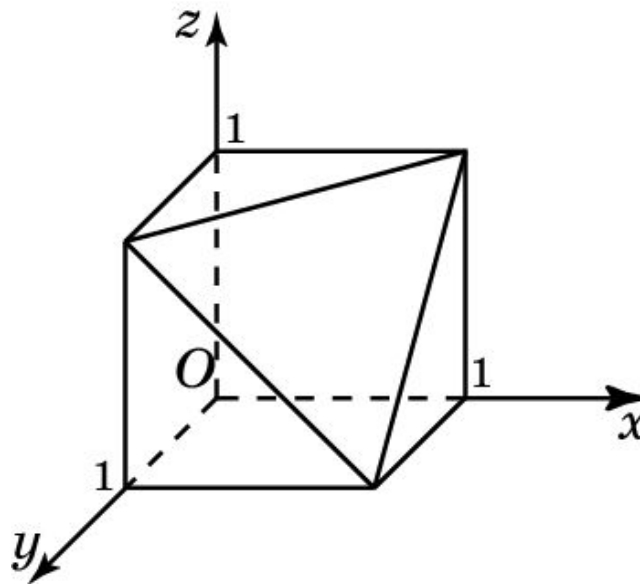


Ответ: Куб.

Упражнение 4

Какой многогранник задается системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq z \leq 1, \\ x + y + z \leq 2? \end{cases}$$



Ответ: Многогранник, получающийся из куба отсечением пирамиды.

Упражнение 5

Какую фигуру в пространстве задает следующая система неравенств

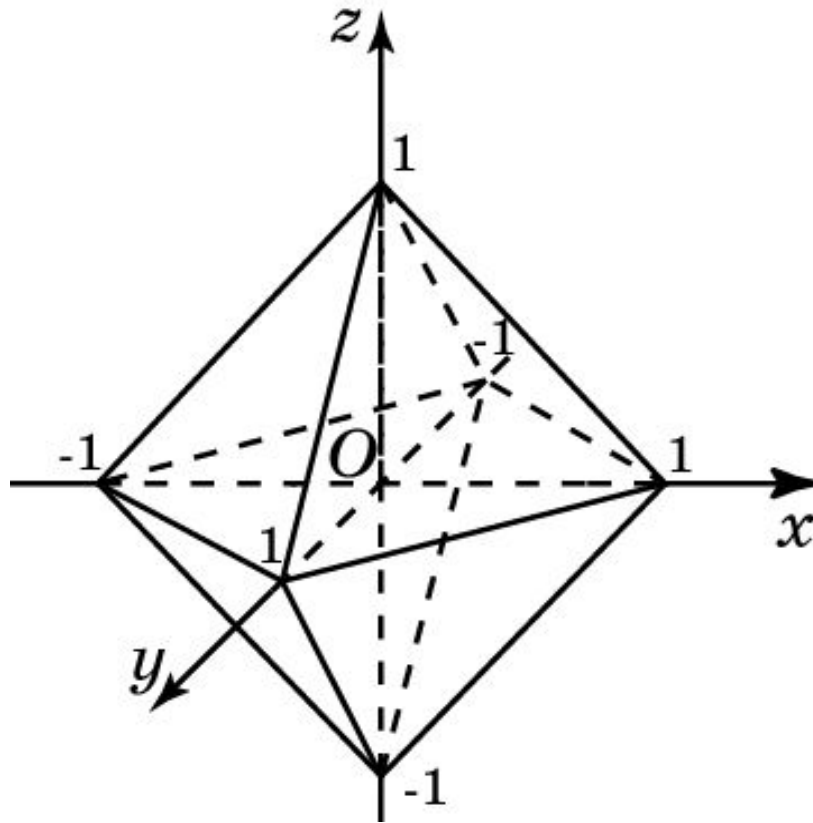
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ 0 \leq y \leq 5, \\ 0 \leq z \leq 4? \end{cases}$$

Ответ: Прямоугольный параллелепипед.

Упражнение 6

Какой многогранник задается неравенством

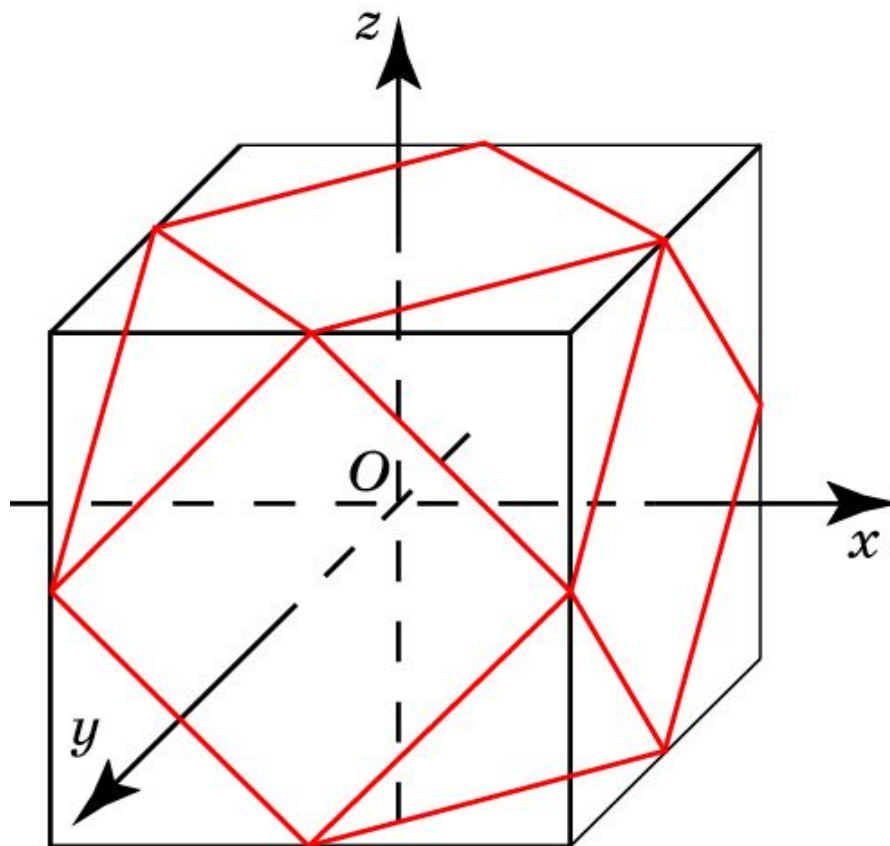
$$|x| + |y| + |z| \leq 1?$$



Ответ: Октаэдр.

Упражнение 7

Какой многогранник задается неравенствами
 $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1, |x| + |y| + |z| \leq 2$?



Ответ: Кубооктаэдр.

Упражнение 8

Найдите неравенства, задающие правильный тетраэдр, вершины которого имеют координаты: $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,1,1)$, $(-1,-1,-1)$.

Ответ: $|x+y|+z \leq 1$, $|x-y|-z \leq 1$.

Упражнение 9

Какая фигура в пространстве задается системой неравенств?

$$\begin{cases} x^2 + z^2 \leq R^2, \\ 0 \leq y \leq h? \end{cases}$$

Ответ: Цилиндр.

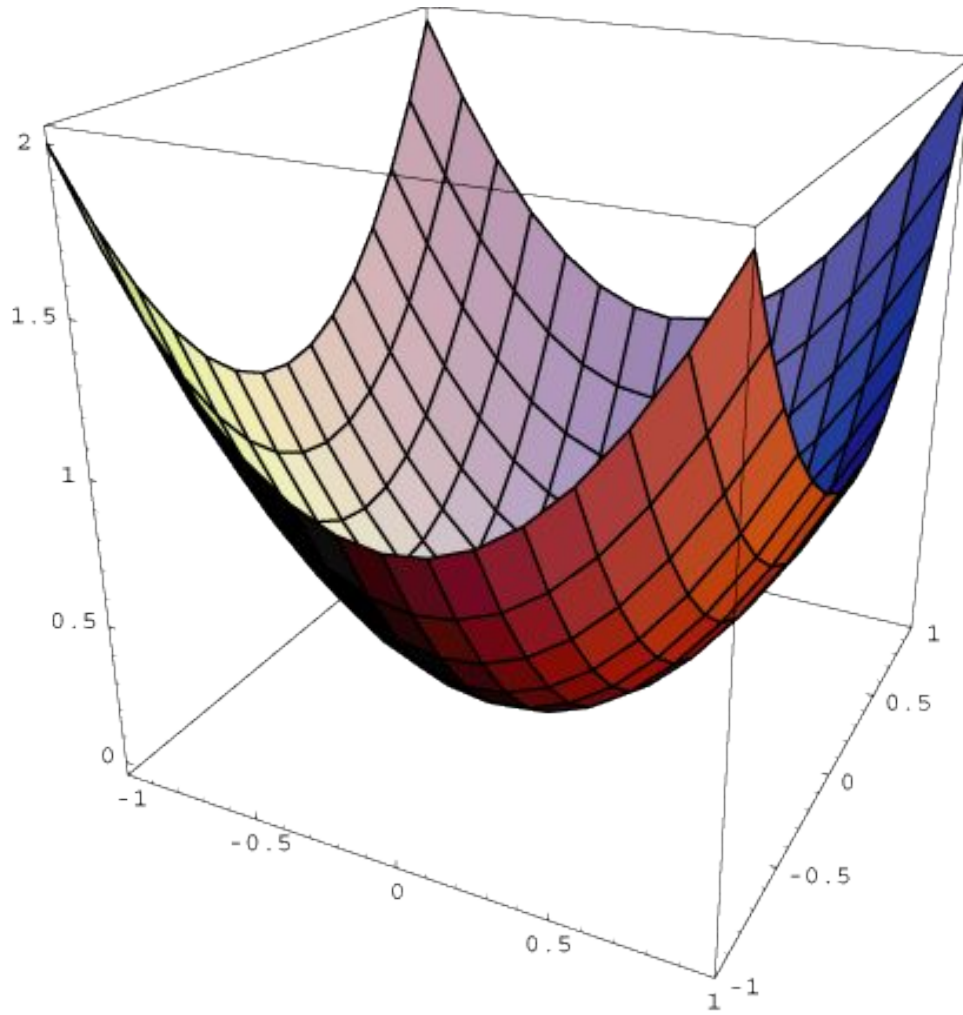
Упражнение 10

Напишите неравенства, определяющие конус с вершиной в точке $S(0,0,h)$ и основание которого - круг радиуса R , лежащий в плоскости Oxy .

Ответ: $x^2 + y^2 \leq \left(R \frac{h-z}{h}\right)^2, \quad 0 \leq z \leq h.$

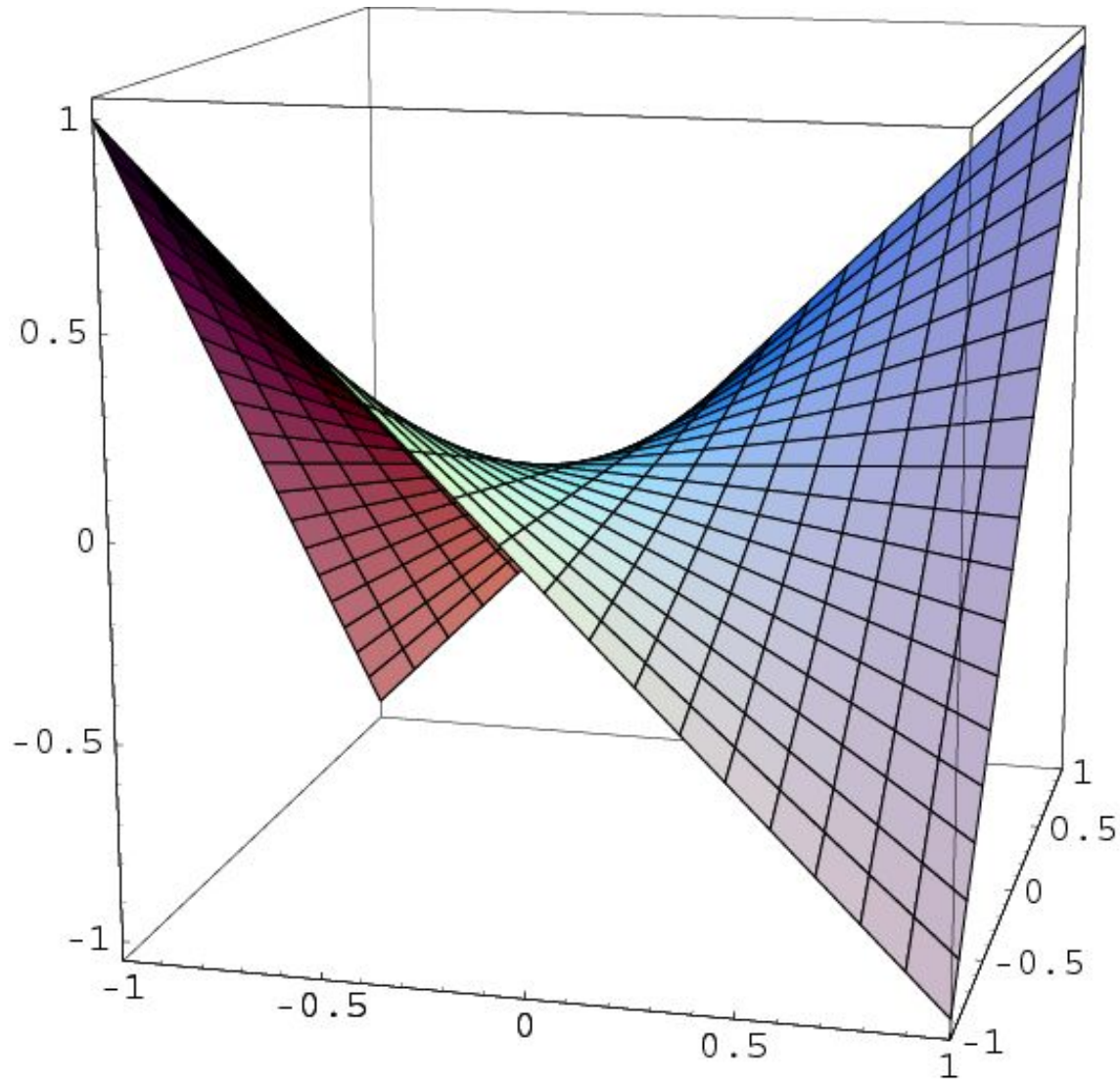
Уравнение $z = f(x, y)$ задает поверхность в пространстве. Здесь мы приведем примеры таких поверхностей.

Пример 1 $z = x^2 + y^2$



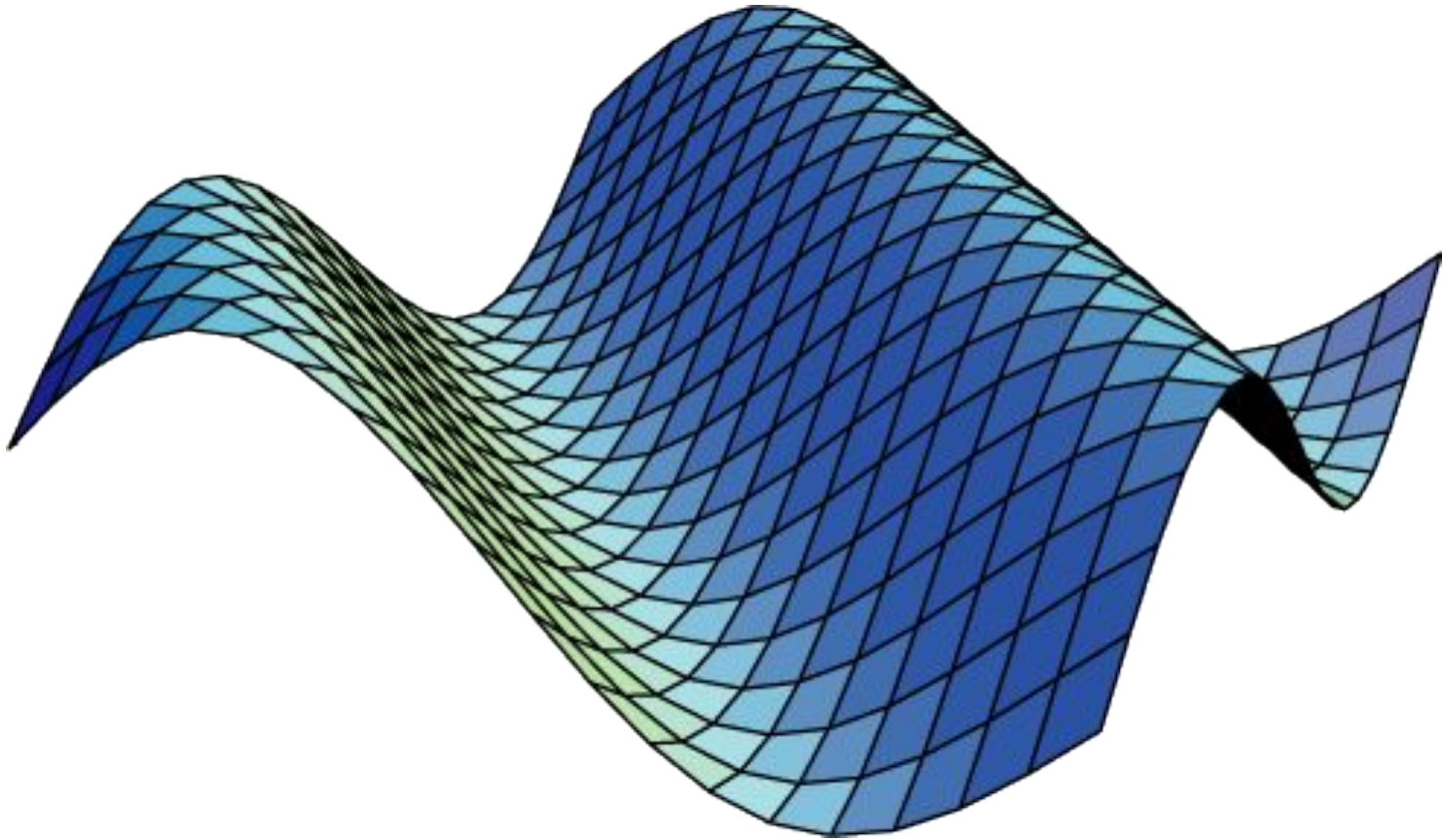
Пример 2

$$z = x \cdot y$$



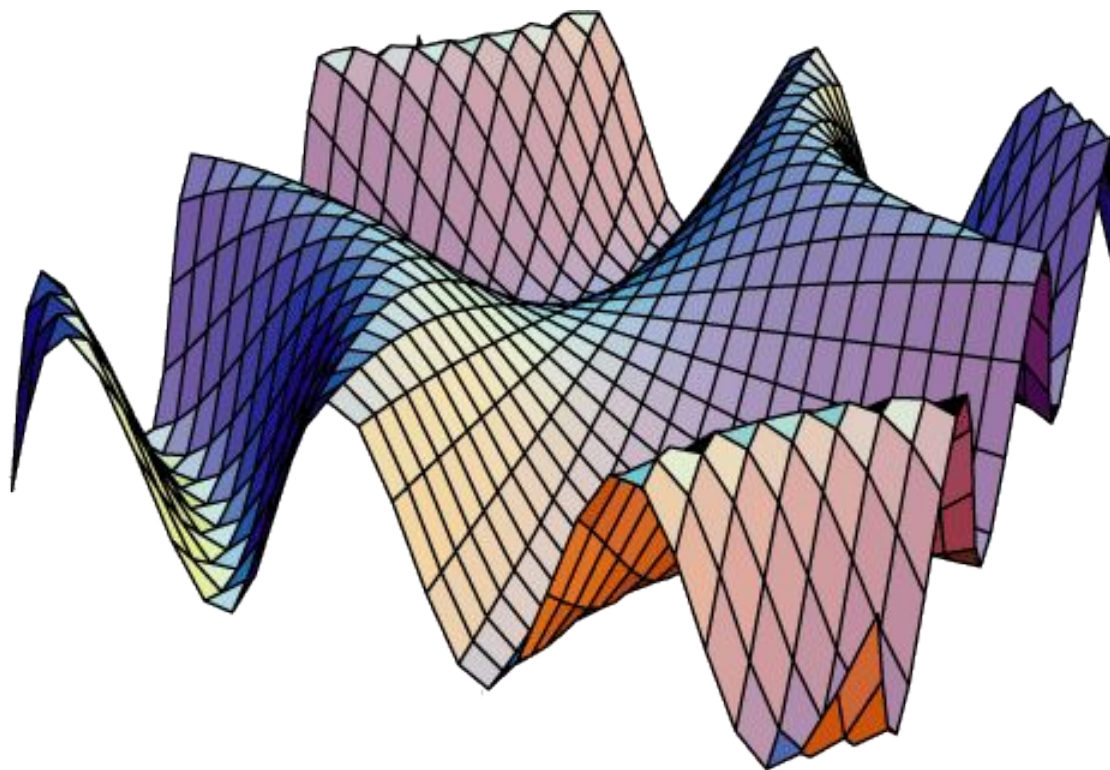
Пример 3

$$z = \sin(x + y)$$



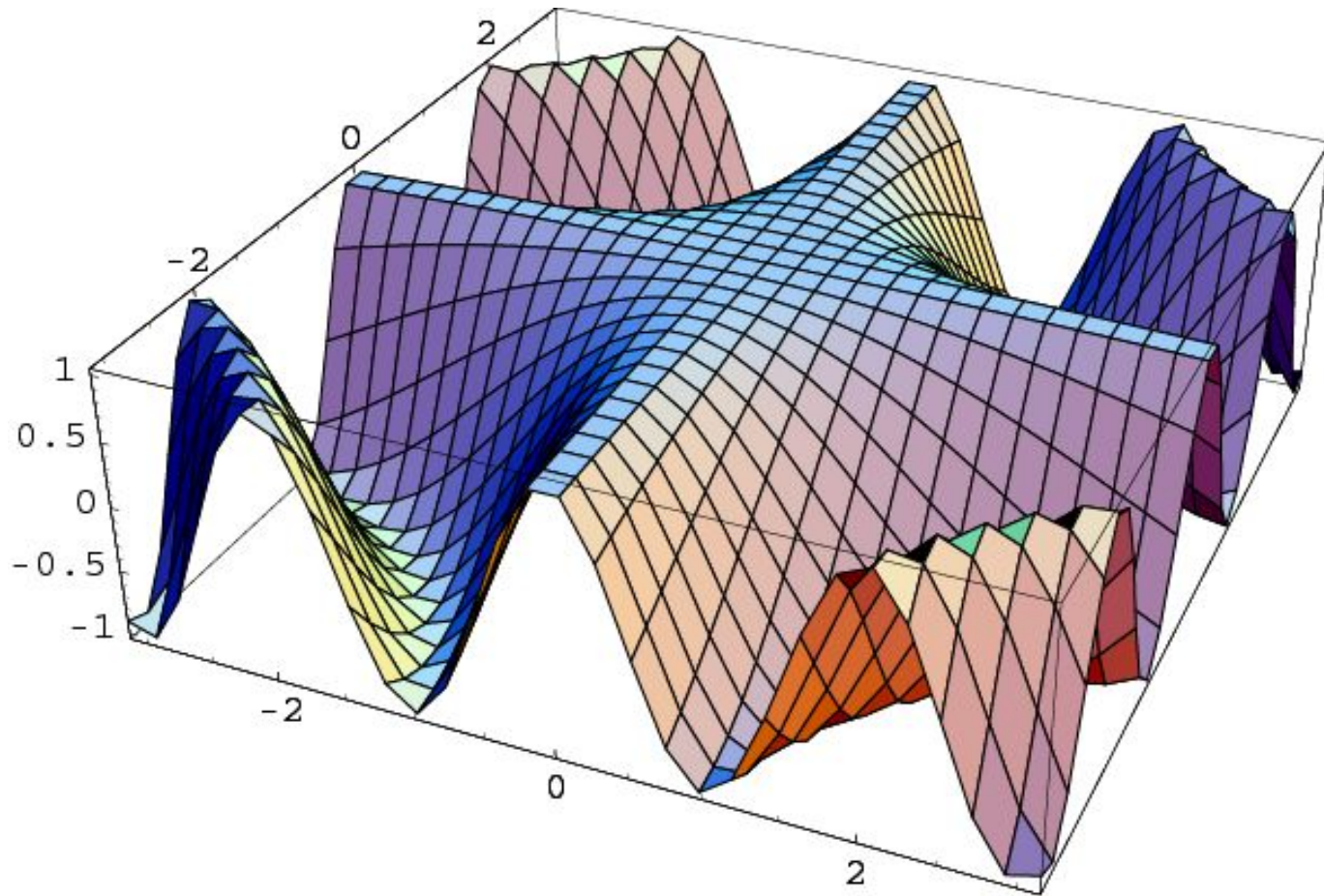
Пример 4

$$z = \sin(x \cdot y)$$



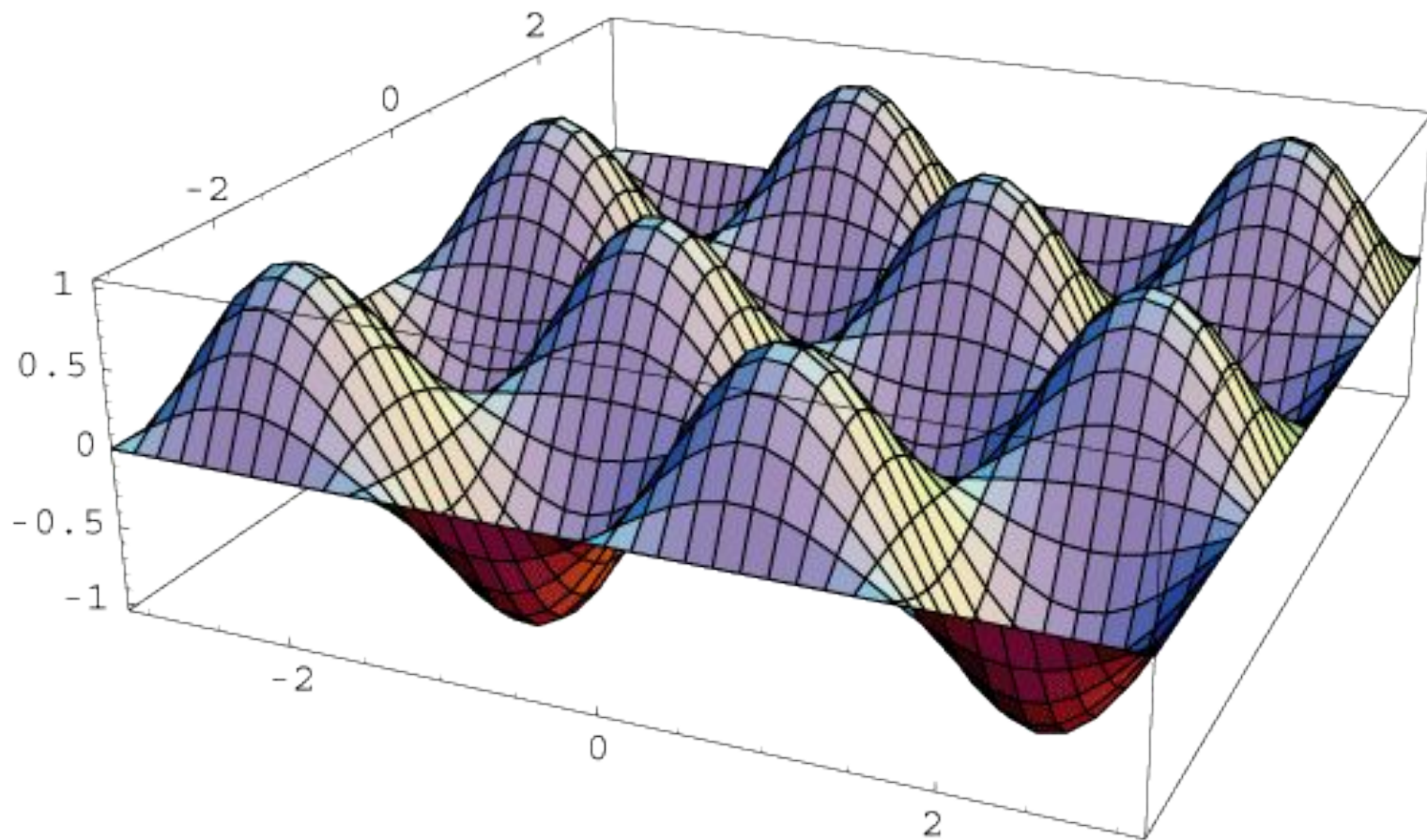
Пример 5

$$z = \cos(x \cdot y)$$



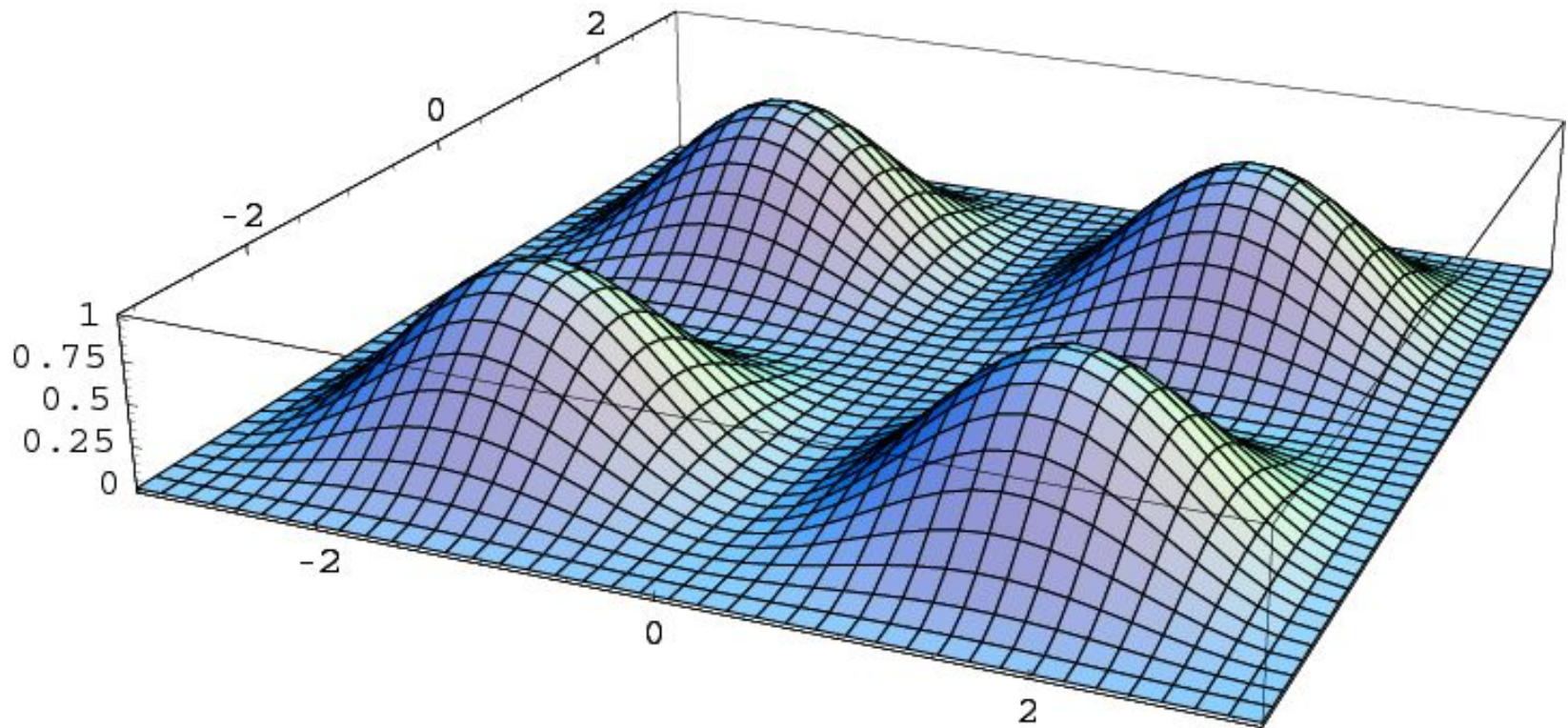
Пример 6

$$z = \sin x \cdot \sin y$$



Пример 7

$$z = \sin^2 x \cdot \sin^2 y$$



Пример 8

$$z = \sin(x^2 - 1) \cdot \sin(y^2 - 1)$$

