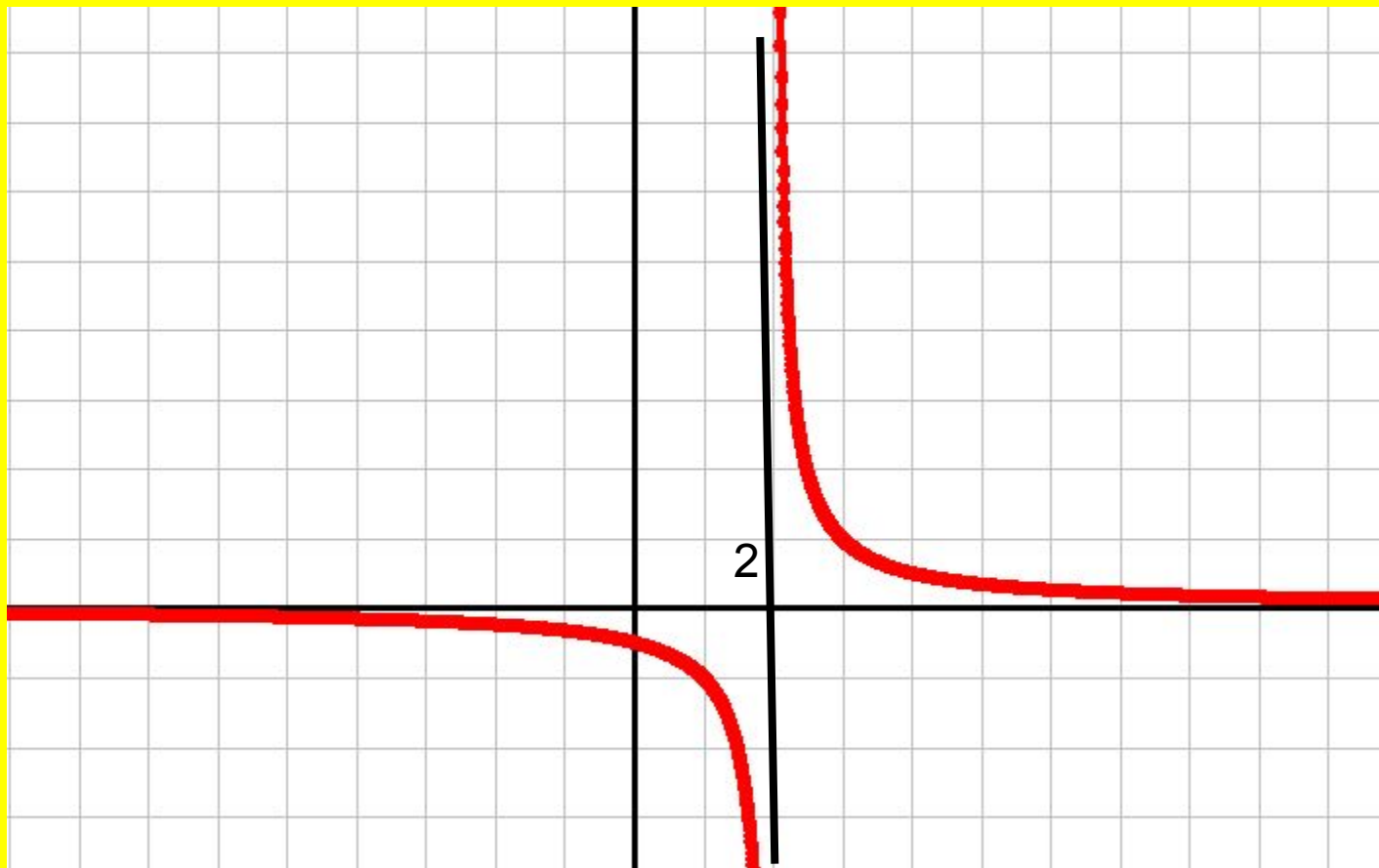


Асимптоты

Построение эскизов графиков.

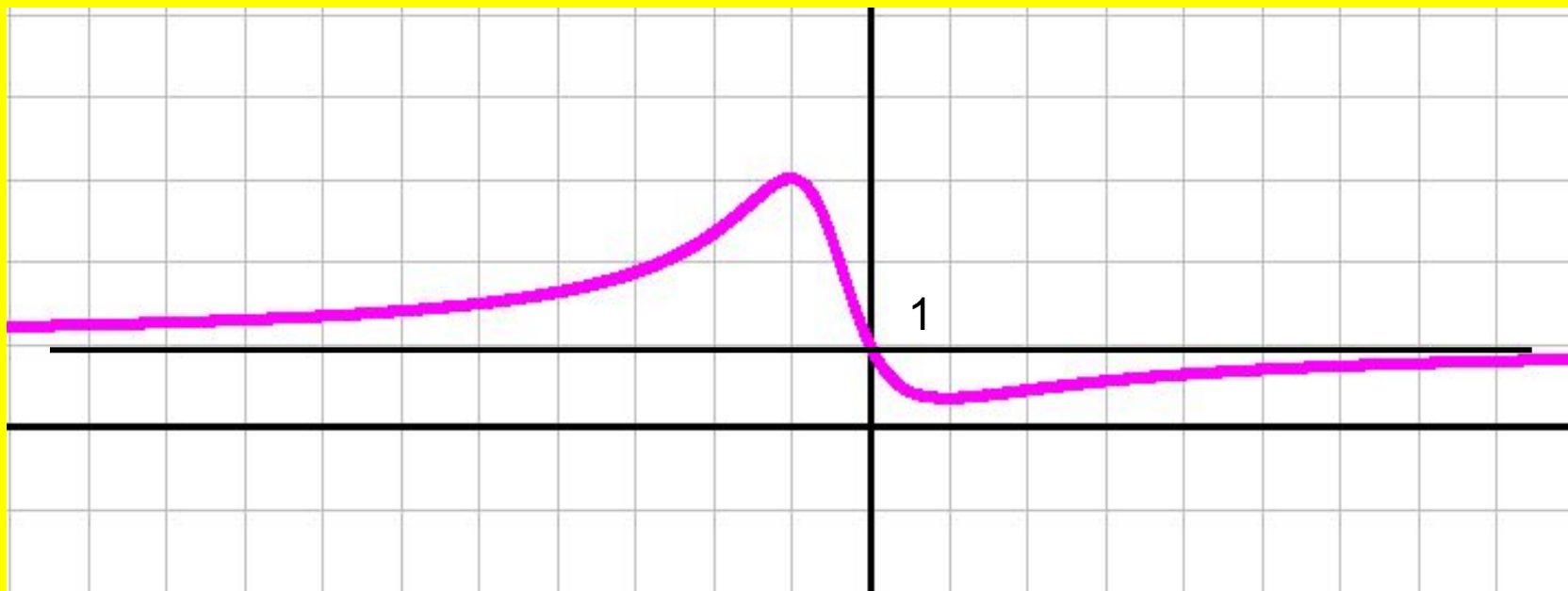


$$y = \frac{1}{x-2} \quad D(y) : x \neq 2$$

Определение: прямая вида $x=a$ называется **вертикальной асимптотой** для $y=f(x)$, если

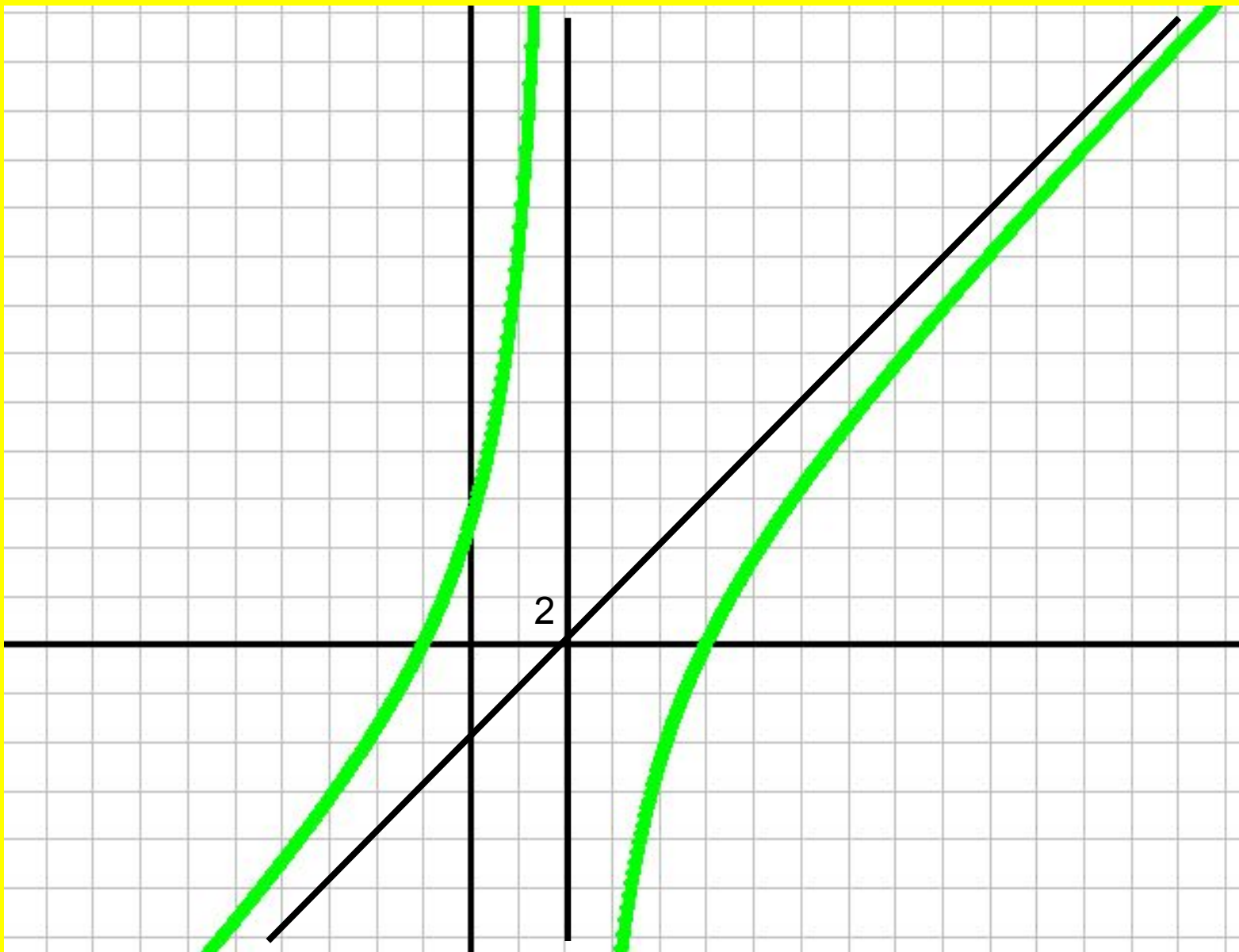
$$\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \pm \infty$$

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

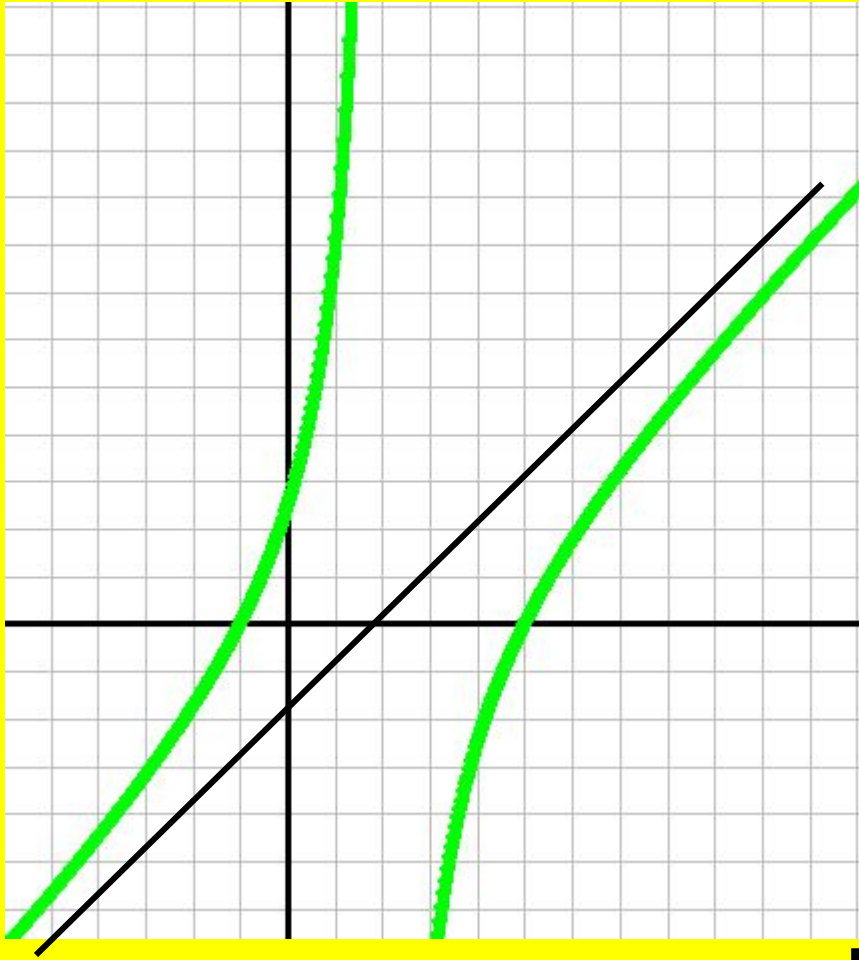


Определение: прямая вида $y=b$
называется **горизонтальной асимптотой**,

если $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$



$$y = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 2}$$



Определение:
прямая вида
 $y=kx+b$
называется
наклонной
асимптотой,
если для $y=f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$$

Примечания:

1. Вертикальные асимптоты существуют в точках разрыва функции.

2. У дробно-рациональной функции горизонтальные асимптоты существуют, если степень числителя меньше или равна степени знаменателя.

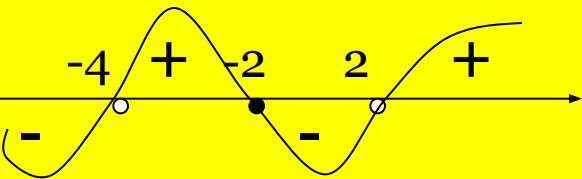
3. У дробно-рациональной функции наклонная асимптота существует, если степень числителя больше, чем степень знаменателя.

4. Для более точного построения эскиза нужно найти:

- промежутки знакопостоянства функции**
- нули функции**
- точки пересечения графика с осями (по возможности) и с асимптотами**

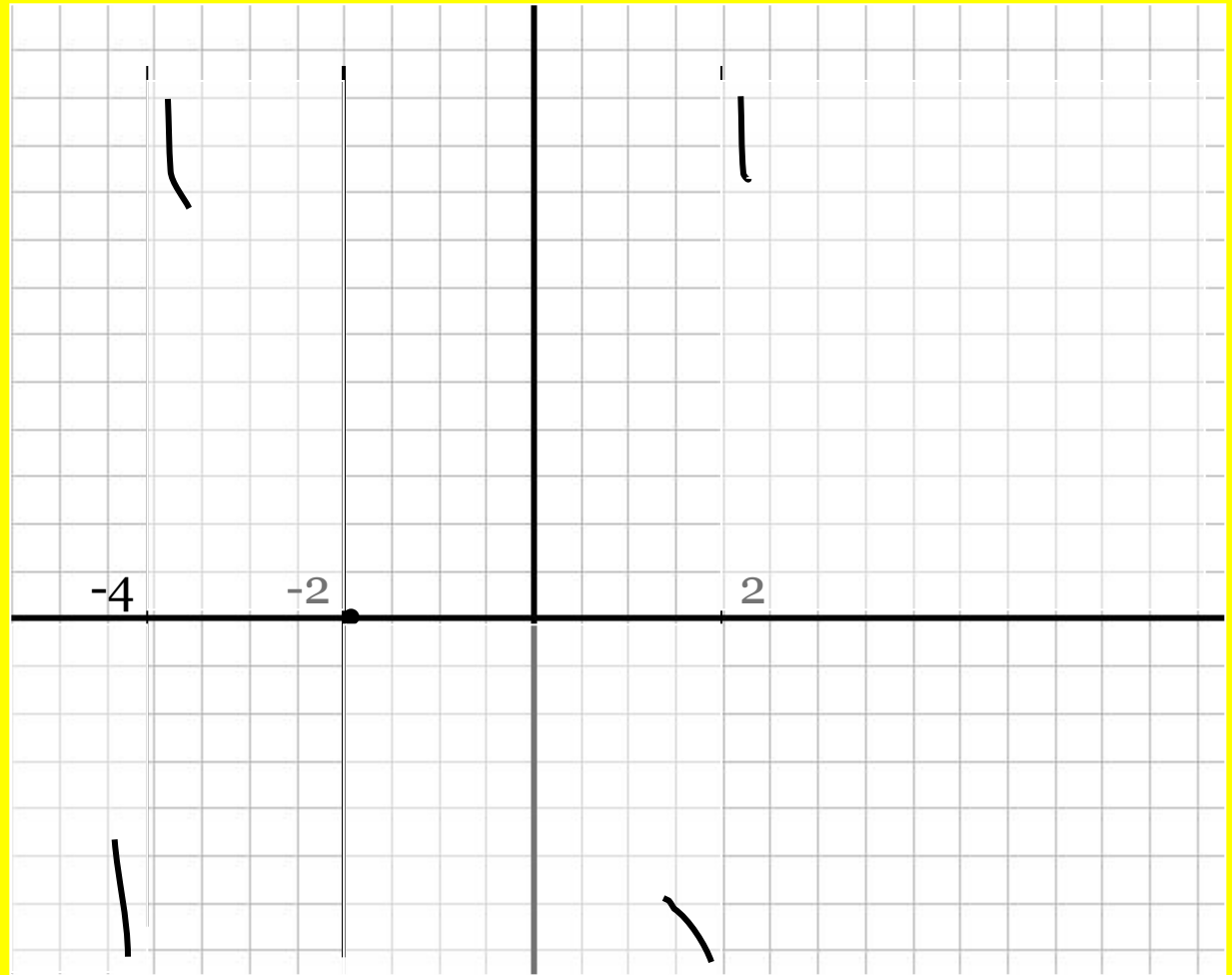
Области существования графика на координатной плоскости.

$$y = \frac{x + 2}{x^2 + 2x - 8}$$



Если $y > 0$, то график расположен выше оси Ox

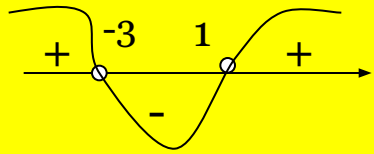
Если $y < 0$, то график расположен ниже оси Ox



Нахождение асимптот и построение эскизов графиков

$$y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$$

$$D(y): \begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq 1 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = 0$$

$y=0$ - горизонтальная асимптота

**$x=-3$ и $x=1$ -
вертикальные
асимптоты**

Для более точного построения возьмем контрольные

точки:

$x=2$

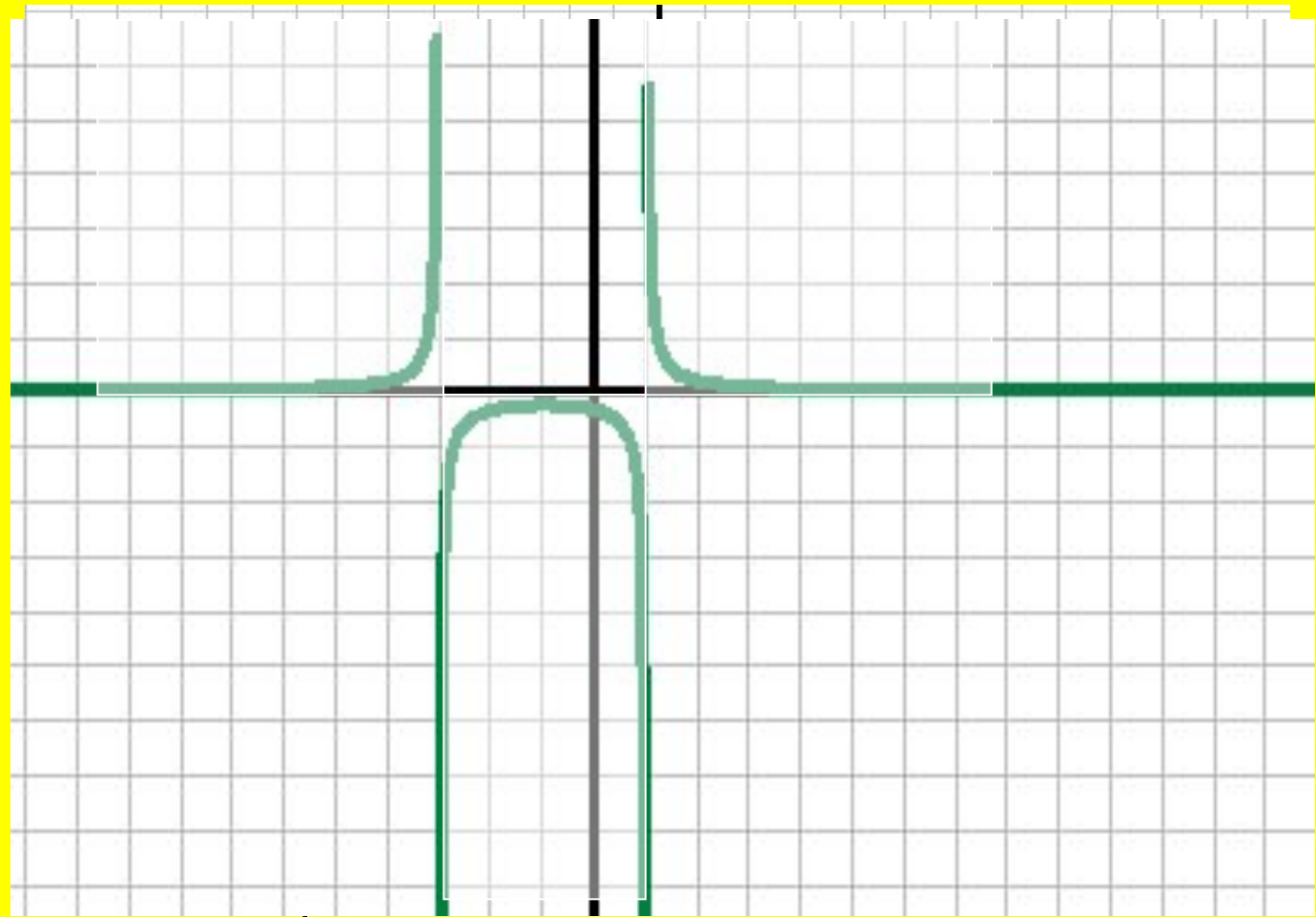
$x=0$

$x=-4$

$y=1/5$

$y=-1/3$

$y=1/5$

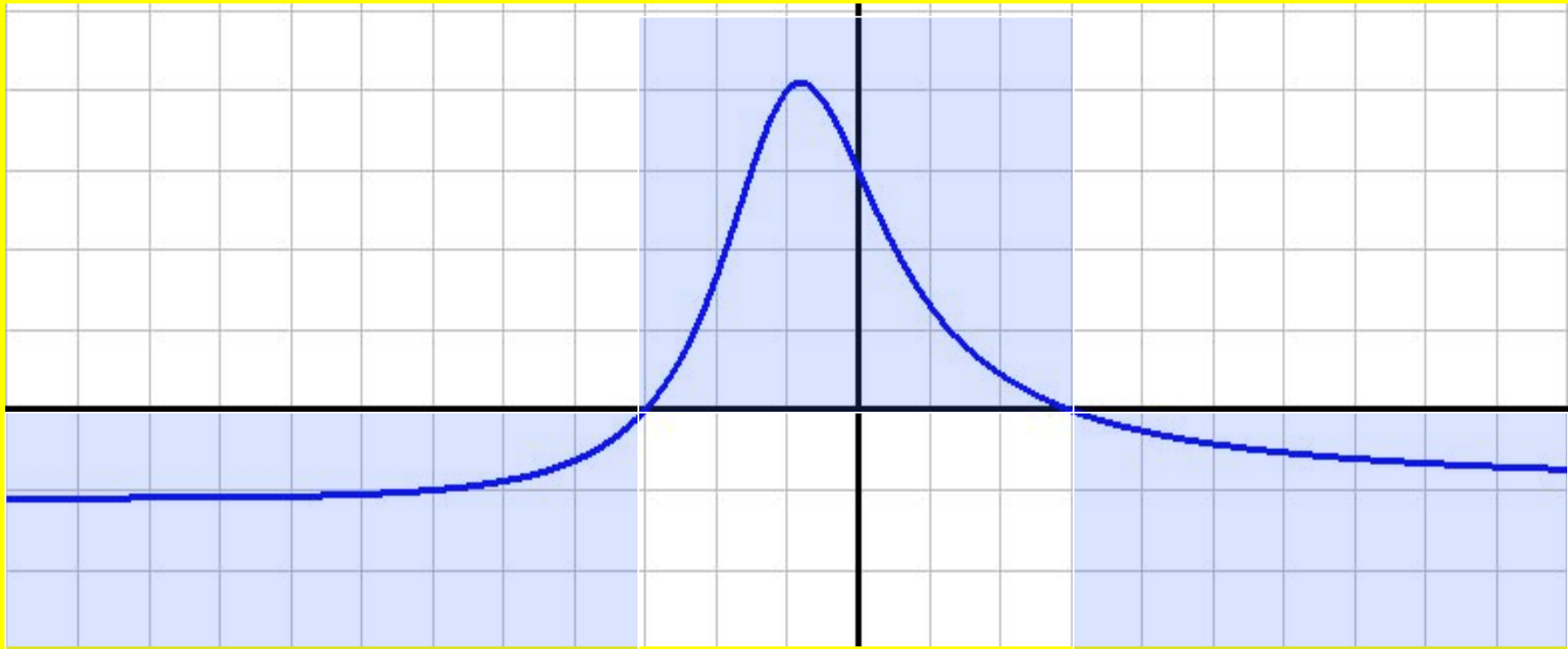


Нахождение асимптот и построение эскизов графиков

$$y = \frac{9 - x^2}{x^2 + 2x + 3}$$

$D(f) : x \in \mathbb{R}$, вертикальных асимптот нет

Горизонтальная асимптота $y = -1$.

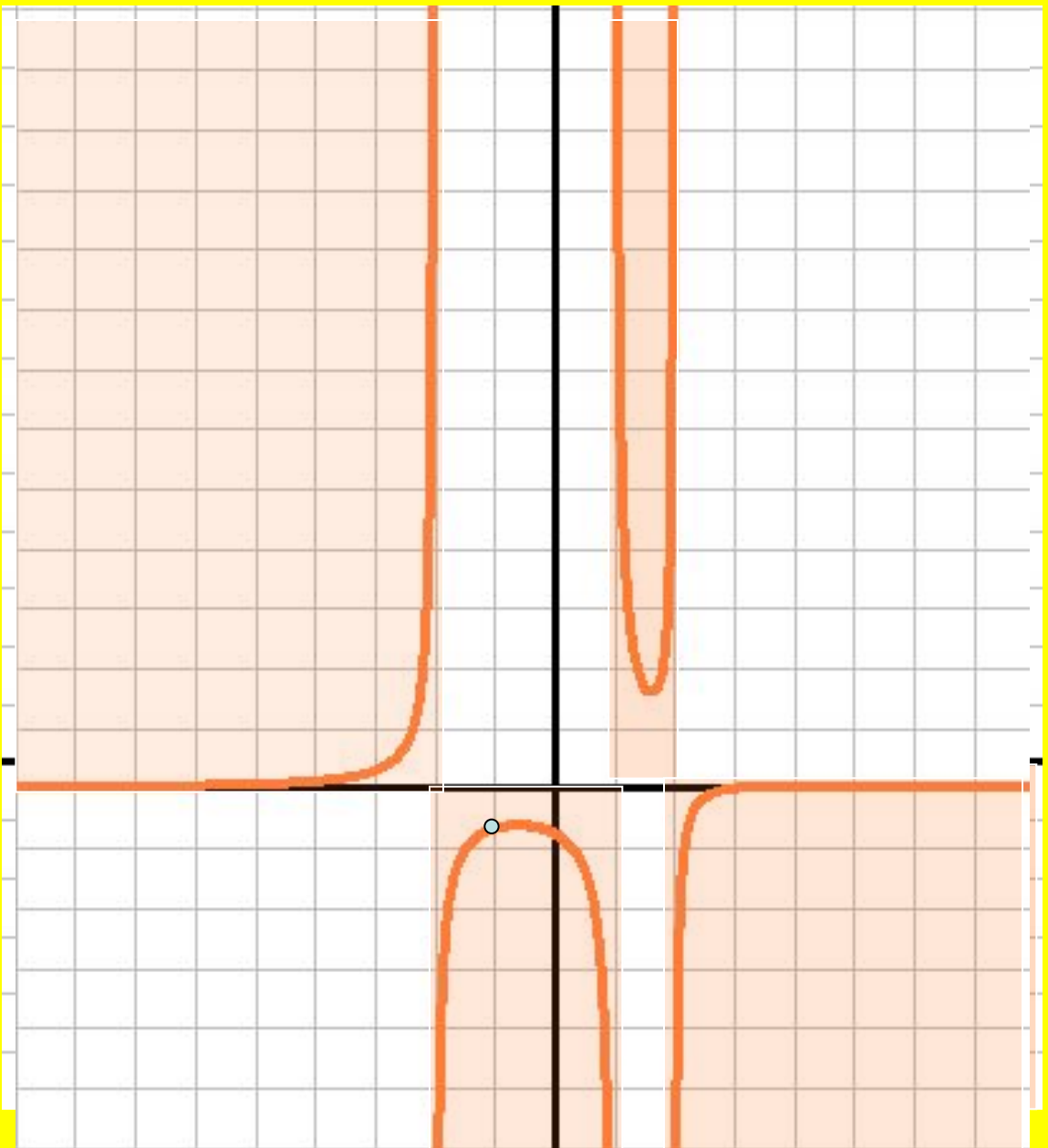


$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^4 - 5x^2 + 4}$$

$x=2, x=1, x=-2$

***Вертикальные
асимптоты***

***$y=0$ – горизонтальная
асимптота***



Нахождение асимптот и построение эскизов графиков

$$y = \frac{x^3 + x}{x^2 - 2x + 2}$$

$$D(f) : x \in \mathbb{R}$$

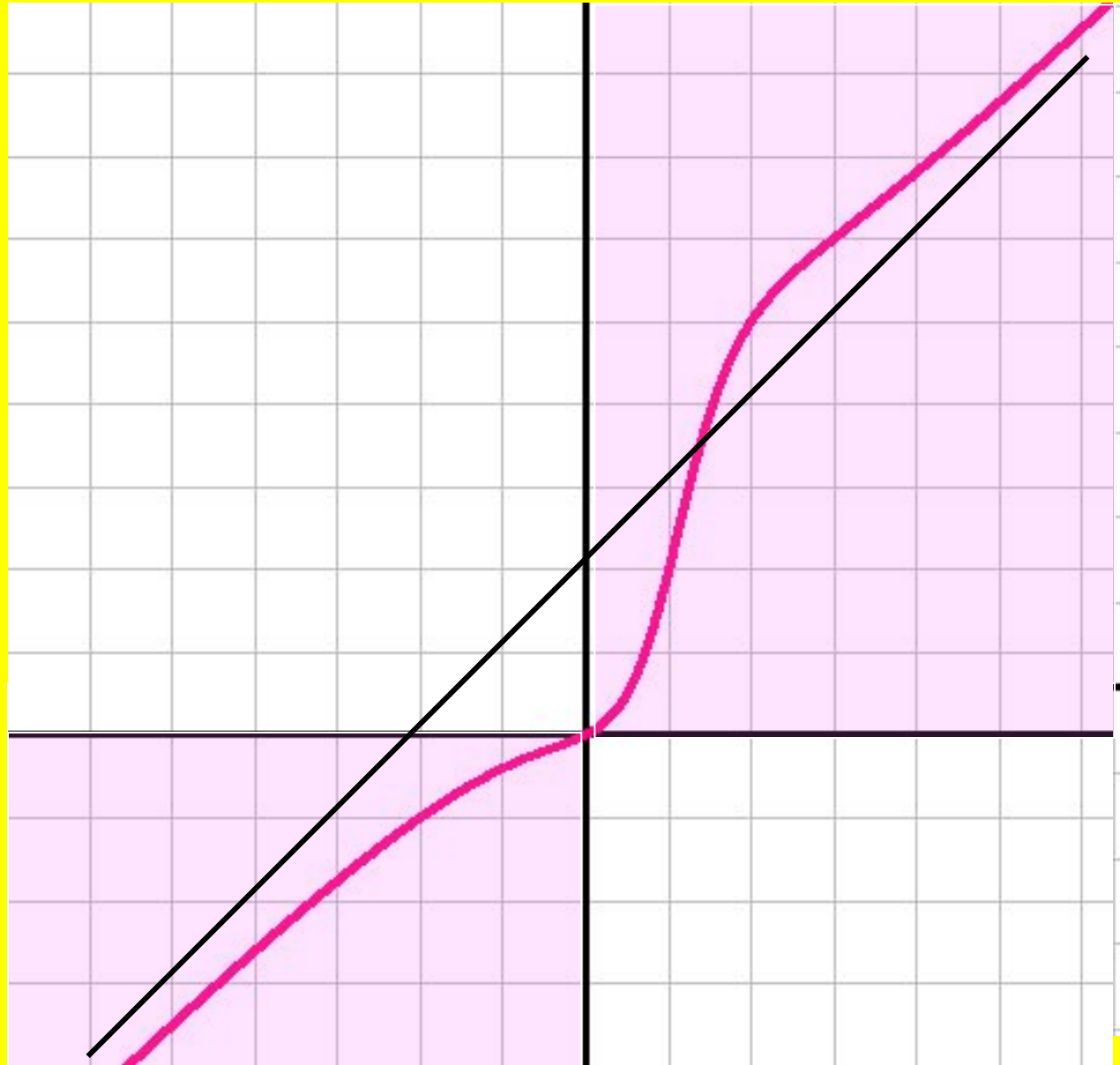
Вертикальных асимптот нет.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^2 - 2x + 3} = \infty$$

Горизонтальных асимптот нет.

Наклонная асимптота $y = x + 2$

При $x = 4/3$ график $y = f(x)$ пересекает $y = x + 2$ в точке $y = 3 \frac{1}{3}$



Нахождение асимптот и построение эскизов графиков

$$y = \frac{x^2 + 2x}{x - 2}$$

Вертик. асимптота $x=2$

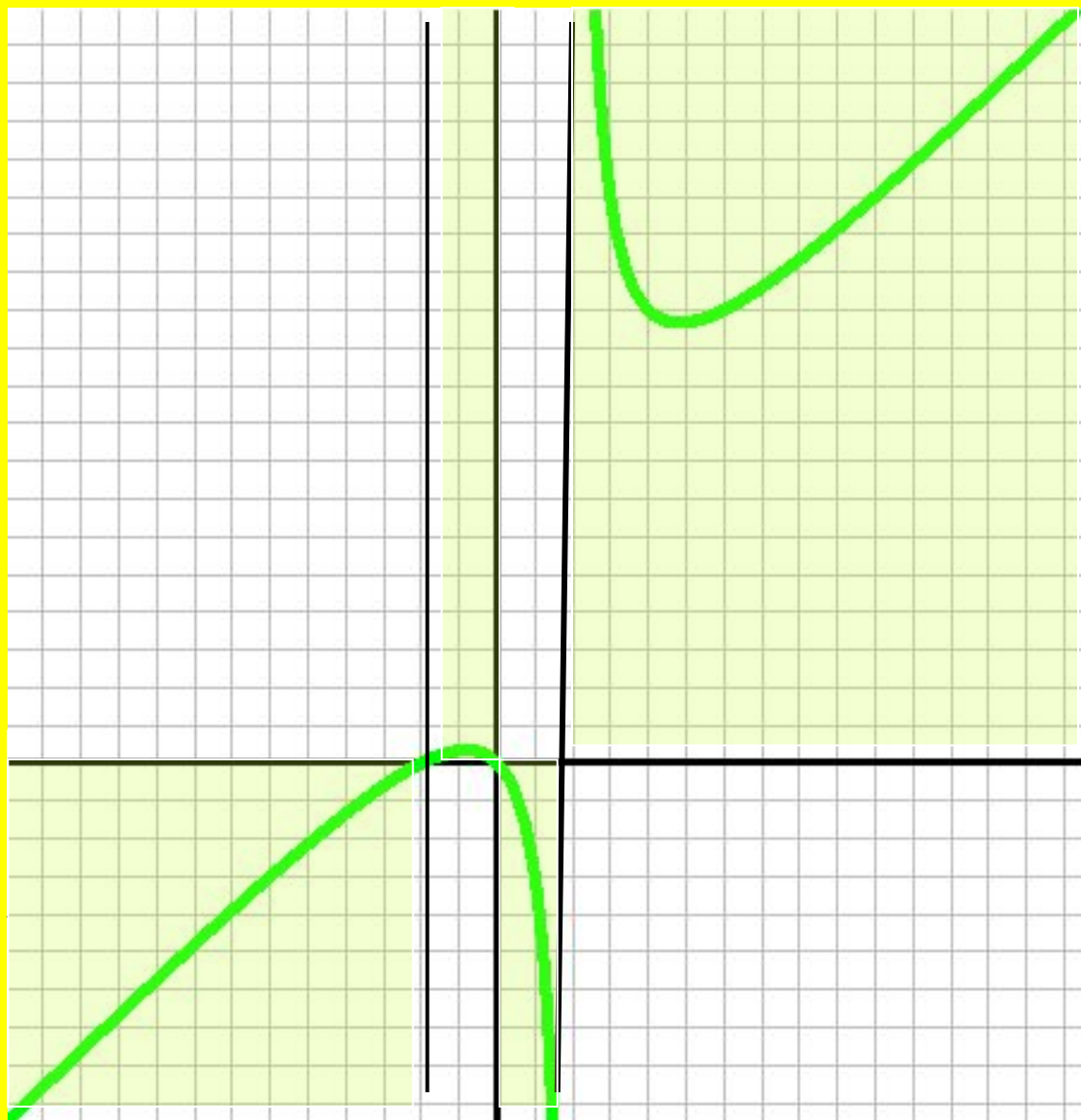
Ноль функции $x=-2$

Горизонт. асимптот нет

**Наклонная асимптота
 $y=x+4$**

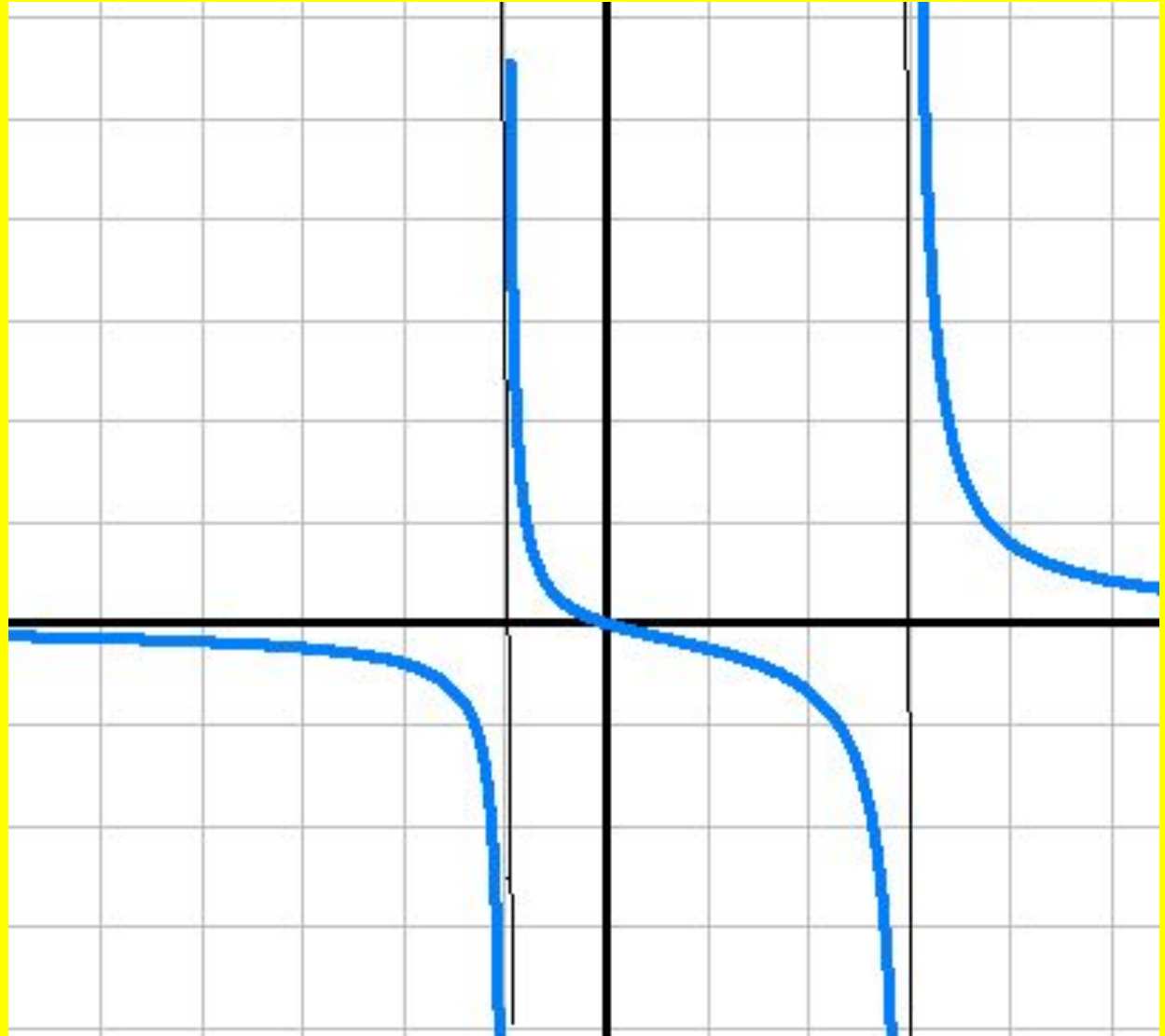
Найдем $E(y)$:

$$y \in (-\infty; 6 - 4\sqrt{2}] \cup [6 + 4\sqrt{2}; +\infty)$$



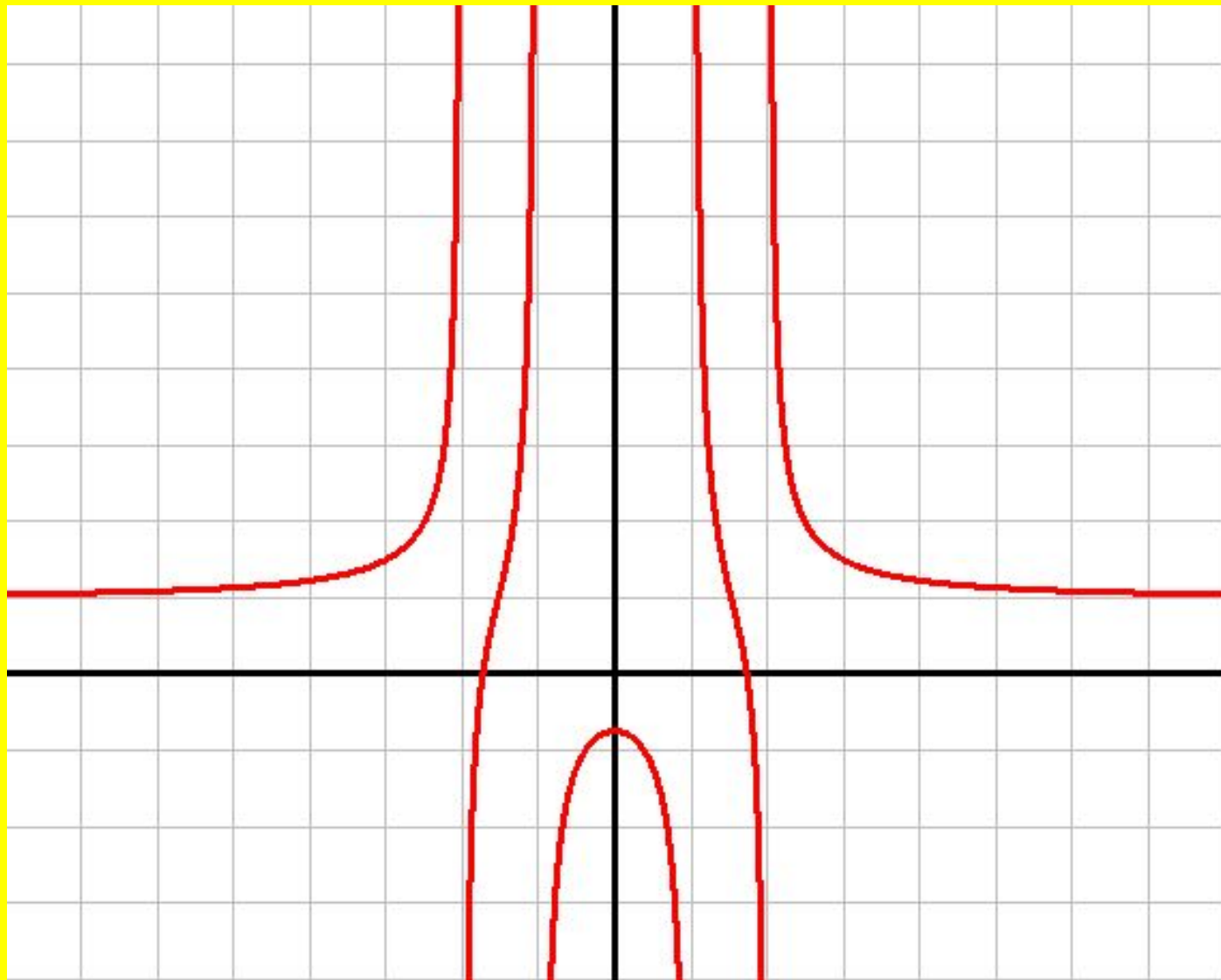
Задачи для самостоятельного решения

$$y = \frac{x}{x^2 - 2x - 3}$$



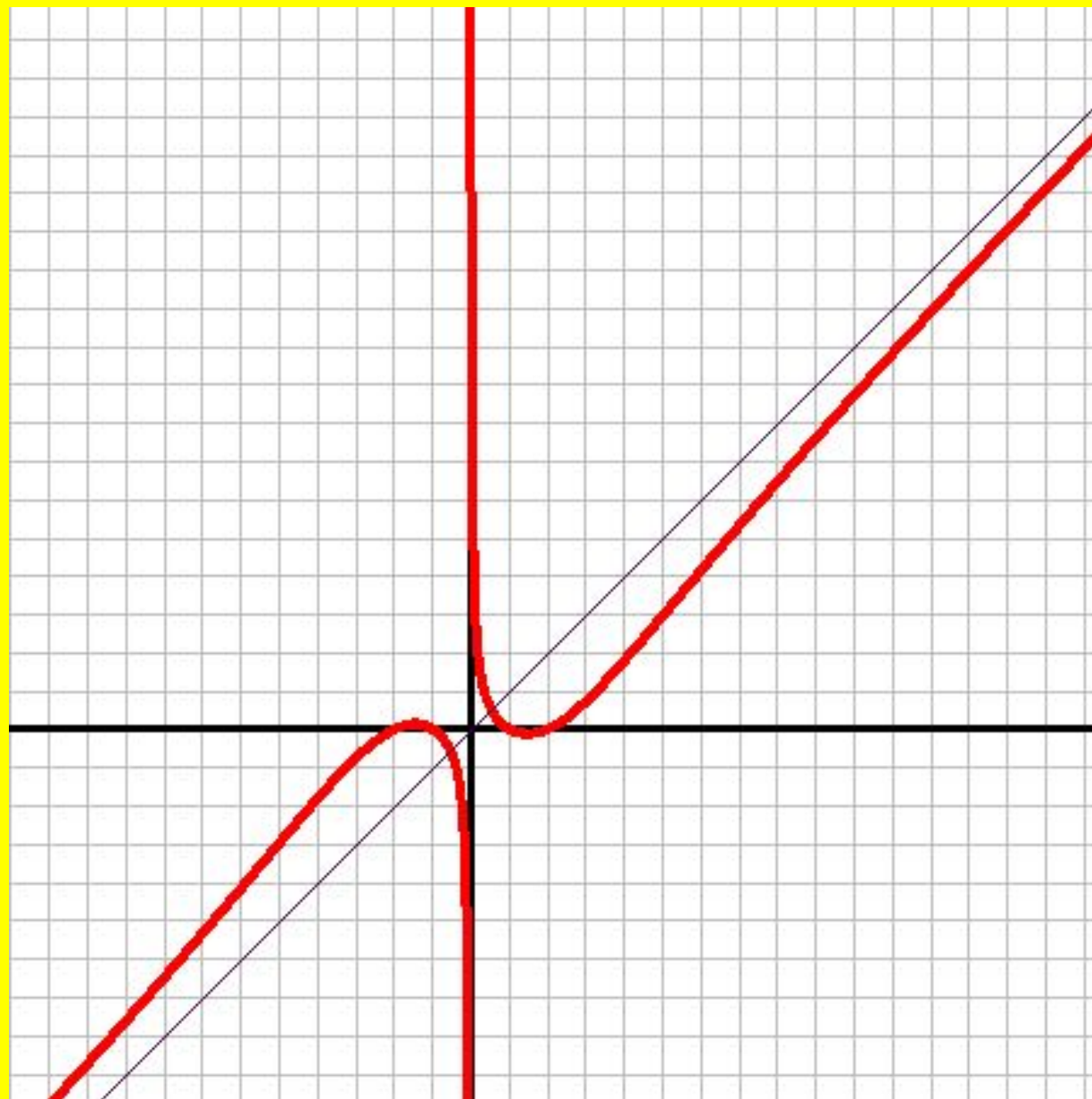
Задачи для самостоятельного решения

$$y = \frac{x^4 - 2x^2 - 3}{x^4 - 5x^2 + 4}$$



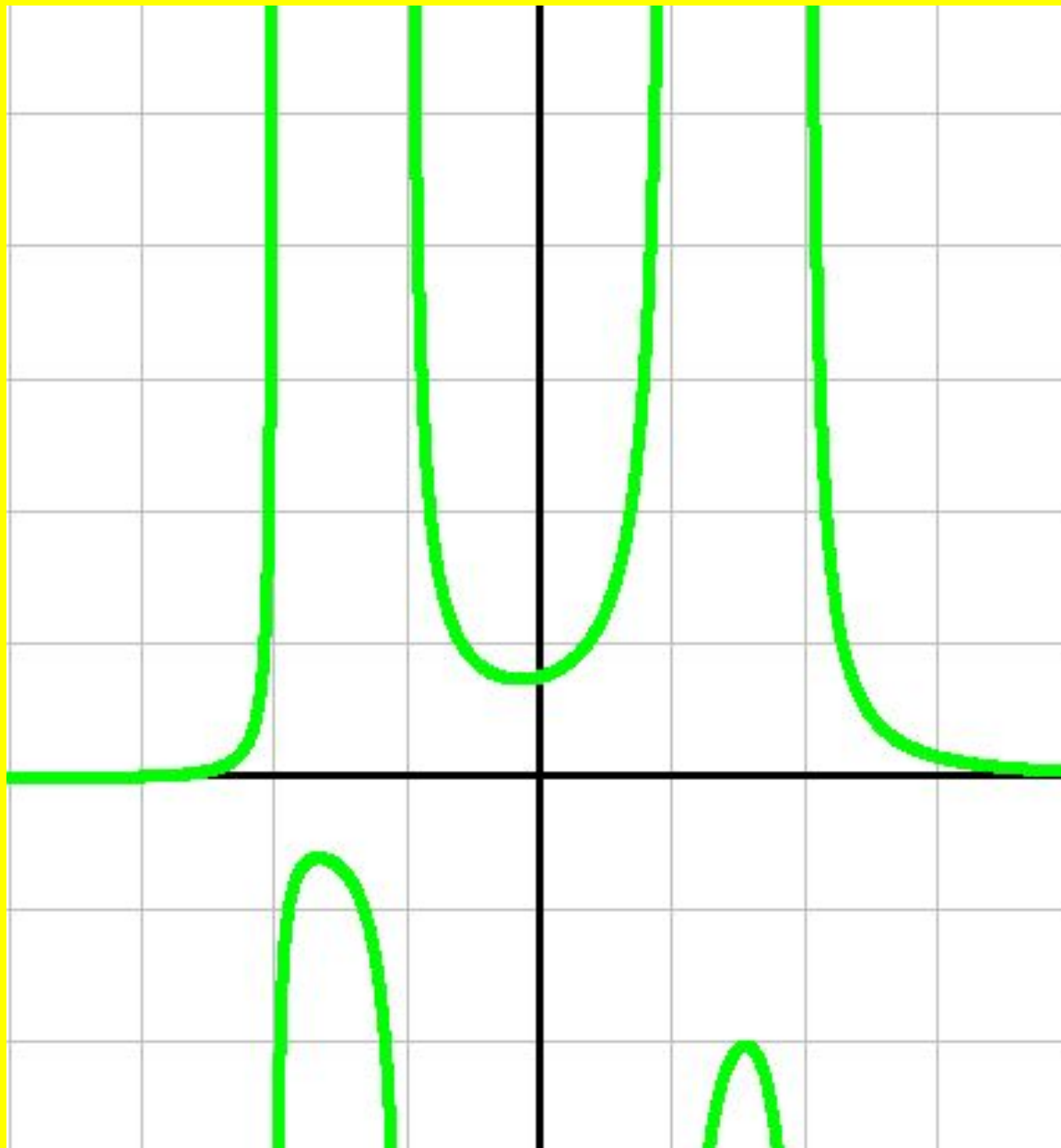
Задачи для самостоятельного решения

$$y = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 + 9x}$$



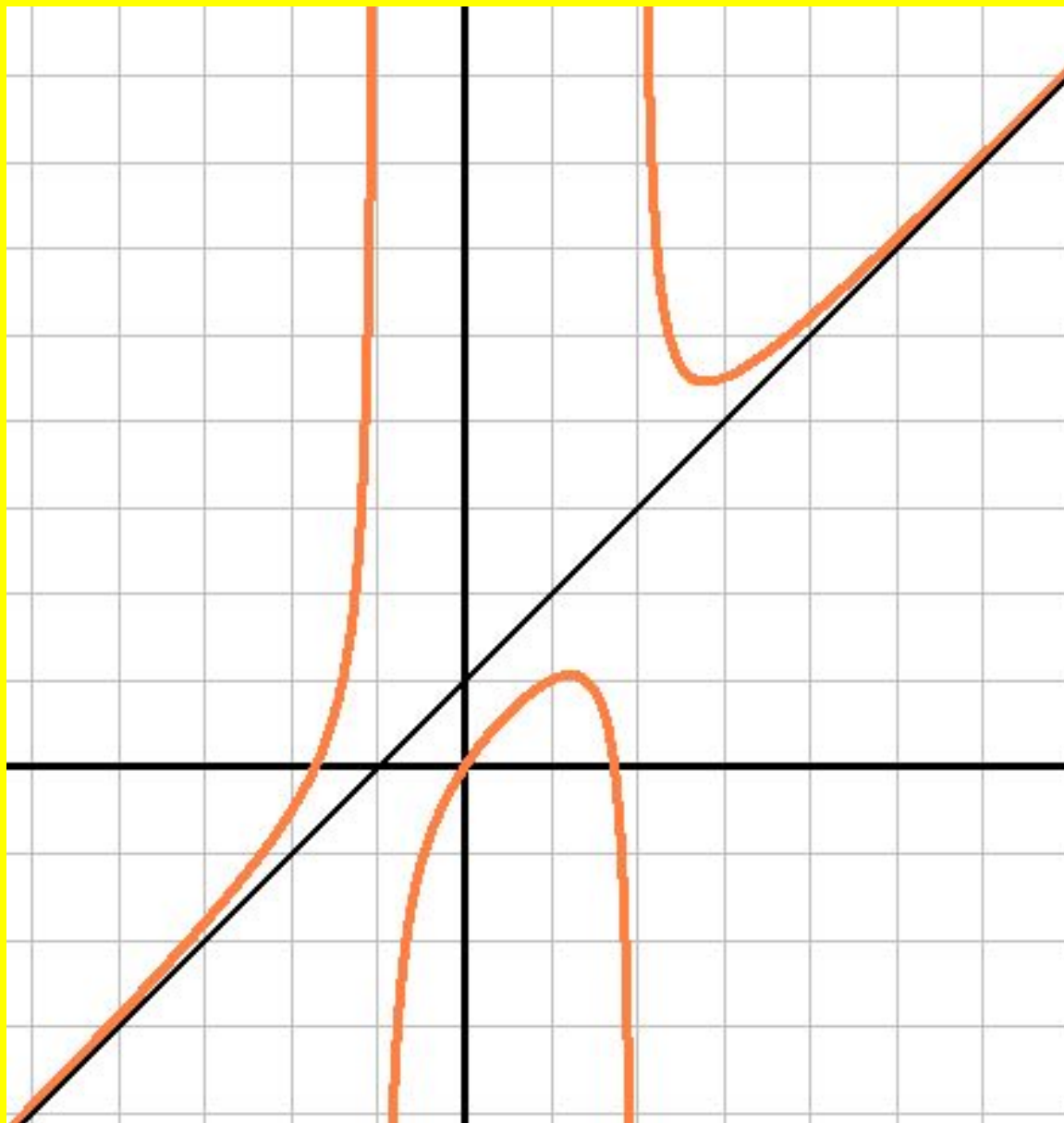
Задачи для самостоятельного решения

$$y = \frac{x+3}{x^4 - 5x^2 + 4}$$



Задачи для самостоятельного решения

$$y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - x - 2}$$



Литература:

1. Богомолов Н.В. «Практические занятия по математике», М. «Просвещение» 2010
2. А.Х.Шахмейстер «Построение графиков функции элементарными методами», Издательство Московского университета, МЦНМО, 2003