

Презентация по геометрии.

Подготовили ученики **9б**
класса

Лунин Александр
Горемыкин Олег

Бенефис одной задачи.

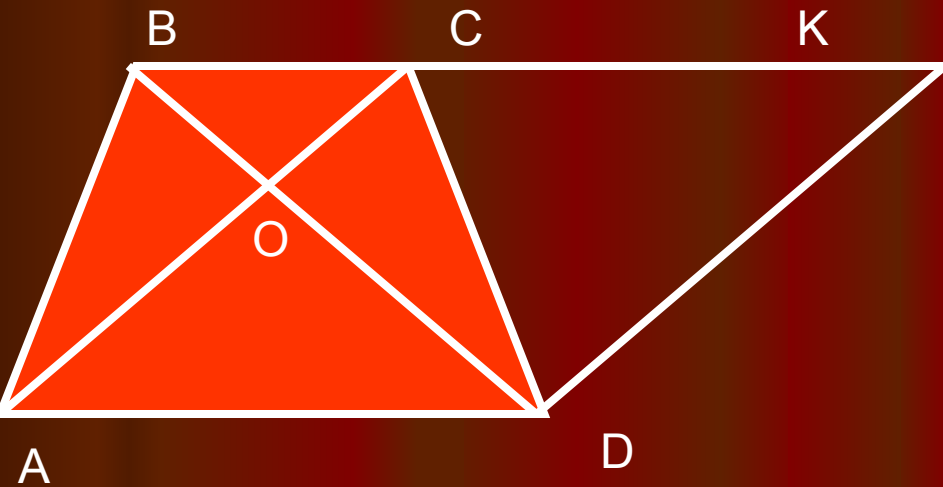
(В одной задаче – почти вся
планиметрия!)

Задача.

**В трапеции диагонали
длиной 6 см и 8 см взаимно
перпендикулярны.**

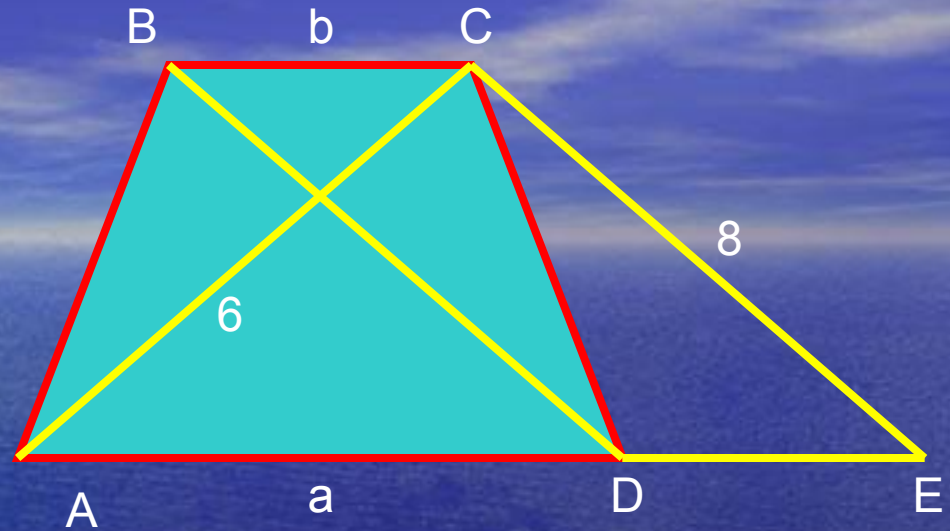
**Найдите длину средней линии
трапеции.**

Способ №1



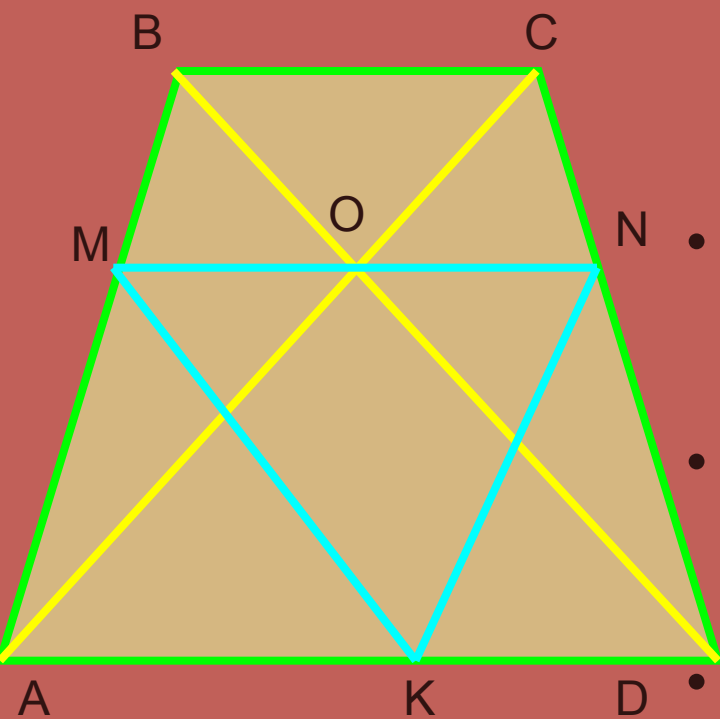
- 1. Продолжим BC вправо. Проведем $DK \parallel AC$. Так как $ACKD$ – параллелограмм, то $DK=6$ см.
- 2. $BD \perp DK$, так как $BD \perp AC$. $\triangle BDK$ – прямоугольный.
- $BK = \sqrt{BD^2 + DK^2}$;
- $BK = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (см).
- 3. $BK = BC + AD$. Средняя линия равна половине BK , то есть 5 см.
- Ответ: 5 см.

Способ №2 (похож на 1)



- Проведем $CE \parallel BD$ до пересечения с продолжением AD . $DE = BC$, так как $DBCE$ – параллелограмм. AE вычислим по теореме Пифагора из $\triangle ACE$ ($CE \parallel BD$, но $BD \perp AC$, следовательно, $CE \perp AC$):
- $AE = \sqrt{AC^2 + CE^2}$;
 $AE = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10(\text{см})$.
- $AE = a + b$. Но средняя линия равна $(a + b) / 2$,
- т.е. равна 5 см.
- Ответ: 5 см.

Способ №3



- MN – средняя линия трапеции. Проведем $MK \parallel BD$ и соединим точки N и K .
- NK – средняя линия $\triangle ACD$, следовательно $NK = 0,5 AC$; $NK = 3$ (см).
 - MK – средняя линия $\triangle ABD$, следовательно $MK = 0,5 BD$; $MK = 4$ (см).
 - Угол MKN равен углу AOD как углы с соответственно параллельными сторонами.
 - $\triangle MKN$ – прямоугольный.
 - $MN = \sqrt{MK^2 + NK^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (см).
 - *Ответ: 5 см.*

Способ №4

1. Продолжим CA на расстояние $AM = CO$.

Через точку M проведем $MN \parallel AD$. $BD \cap MN = N$.

2. $\triangle OMN$ – прямоугольный, $OM = 6$ см, $ON = 8$ см.

Следовательно, $MN = 10$ см (теорема Пифагора).

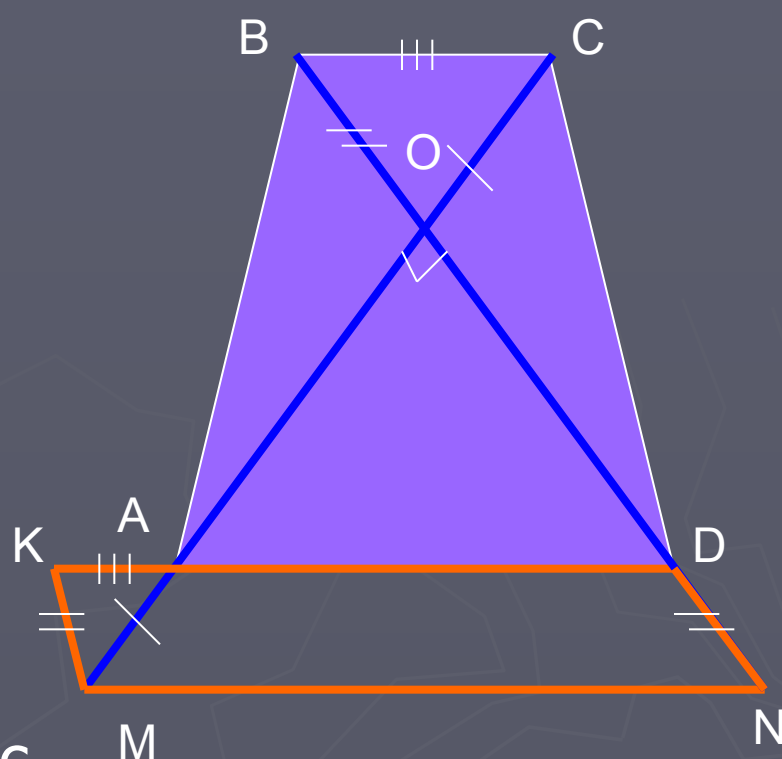
3. Проведем $MK \parallel ND$.

Продолжим AD до пересечения с MK . $\triangle MAK = \triangle BOC$ (по I признаку), следовательно $AK = BC$.

4. $MKDN$ – параллелограмм, $DK = MN = 10$ см. Но

$DK = AD + BC$. Значит, средняя линия равна 5 см.

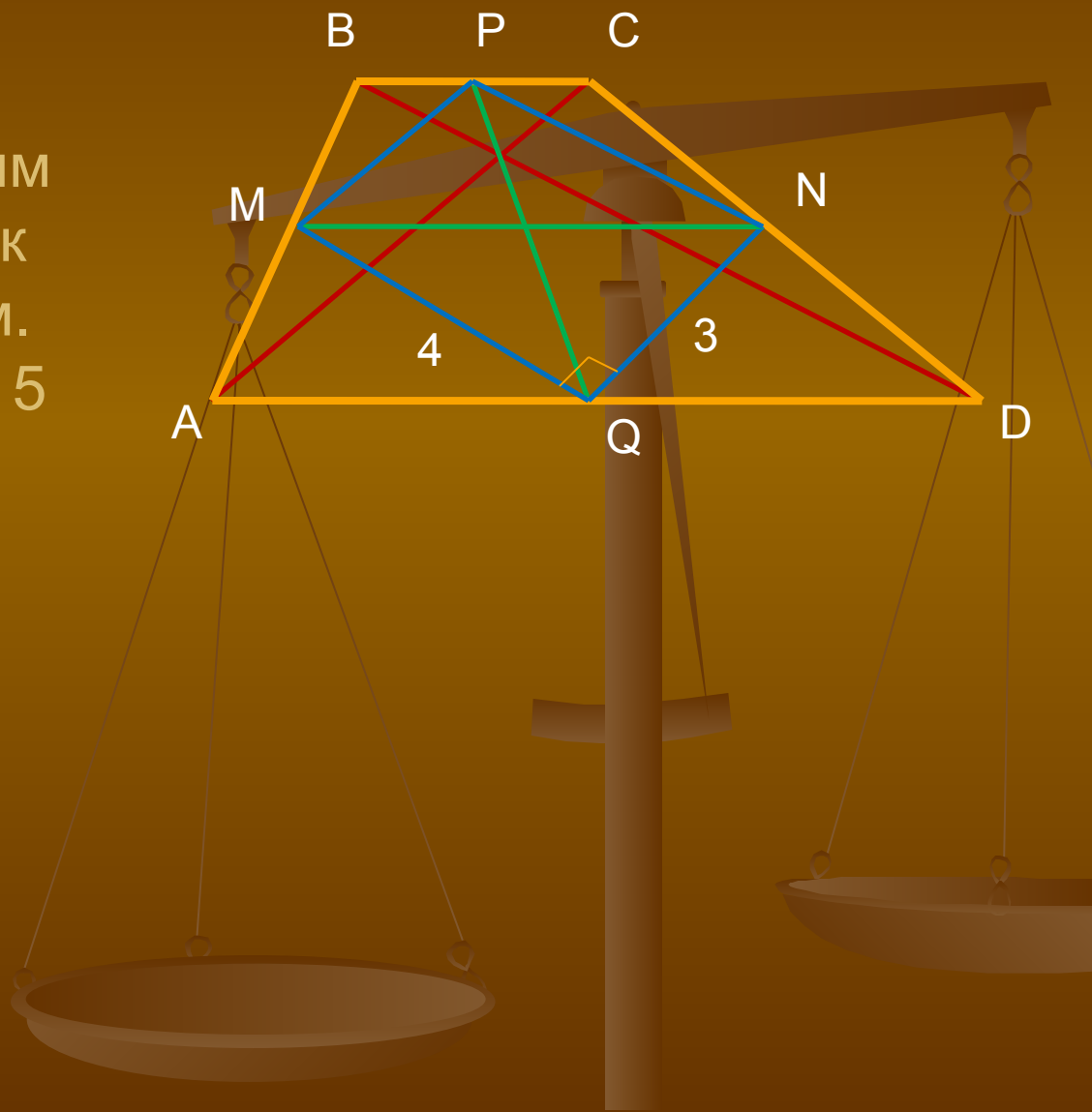
Ответ: 5 см.



Способ №5

Соединим середины сторон трапеции. Легко доказать, что $MPNQ$ – параллелограмм с прямым углом, т.е. прямоугольник со сторонами 3 см и 4 см. Диагонали его $MN = PQ = 5$ см (египетский треугольник).

Ответ: $MN = 5$ см.



Способ №6

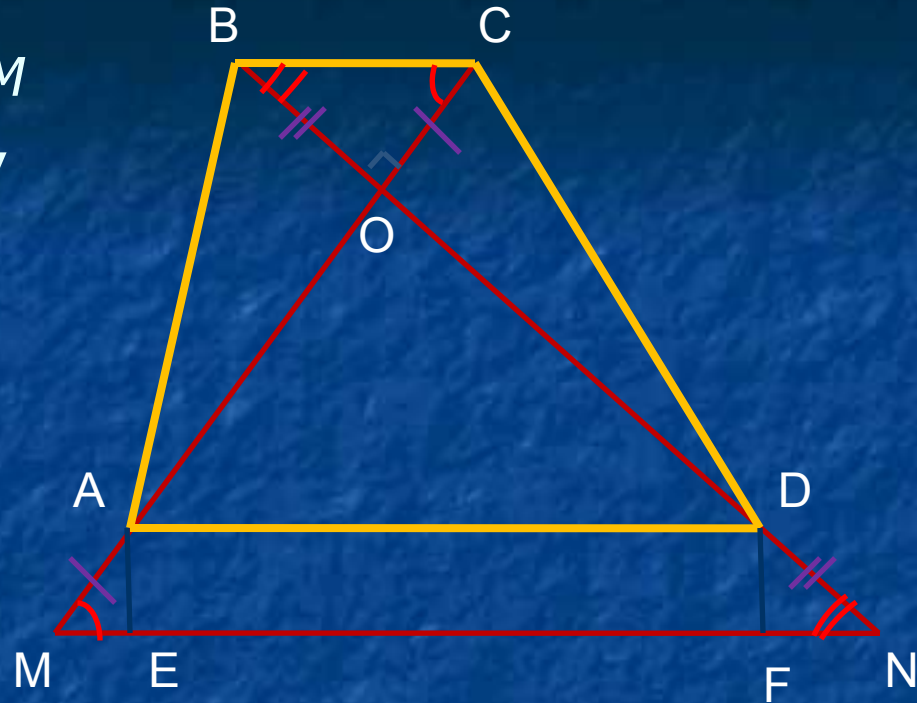
Продолжим AC за точку A так, что $AM = OC$. Продолжим BD за точку D так, что $DN = BO$. Итак, $\triangle OMN$ – прямоугольный с катетами 6 см и 8 см. По теореме Пифагора $MN = 10$ см. Проведем $AE \perp MN$, $DF \perp MN$, $OK \perp BC$.

$\triangle AME = \triangle KOC$ и $\triangle DFN = \triangle BKO$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Следовательно, $ME = KC$ и $FN = BK$, т.е. $MN = AD + BC = 10$ (см).

Средняя линия равна $(AD+BC)/2 = MN/2 = 10/2 = 5$.

Ответ: 5 см.



Способ №7

Пусть $OC = x$, $BO = y$; тогда $AO = 6 - x$, $DO = 8 - y$. MN – средняя линия.

1. Из подобия $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ имеем:

$$\begin{aligned}x/(6-x) &= y/(8-y), \\8x - xy &= 6y - xy, \\8x &= 6y, y = 4/3x.\end{aligned}$$

2. Из прямоугольного треугольника $\triangle BOC$ имеем:
 $BC = \sqrt{x^2 + (4/3x)^2} = \sqrt{x^2 + 16/9x^2} = \sqrt{25/9x^2} = 5/3x.$

3. Из подобия $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ имеем:
 $BC/AD = OC/AO$, $(5/3x)/AD = x/(6-x)$,
 $AD = 5/3(6-x) = 10 - 5/3x.$

4. $MN = (AD + BC) = (5/3x + 10 - 5/3x)/2 = 5$ (см).

Ответ: 5 см.

Способ №8

1. Из подобия $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$:

$$x/(6-x) = y/(8-y), y=4/3x.$$

2. Продолжим диагонали на отрезки,
равные CO и BO .

3. Из $\triangle MON$: $MN = 10$ см.

4. $\triangle AOD$ подобен $\triangle MON$;

$$MN = 4/3 AD, AD = 3/4 MN = 3/4 * 10 = 7,5 \text{ (см).}$$

5. В $\triangle BOC$:

$$BC = x^2 + (4/3x)^2 = 5/\sqrt{3}x.$$

6. $\triangle BOC$ подобен $\triangle AOD$.

$$BC/AD = OC/AO, (5/\sqrt{3}x^2)/7,5 = x/(6-x);$$

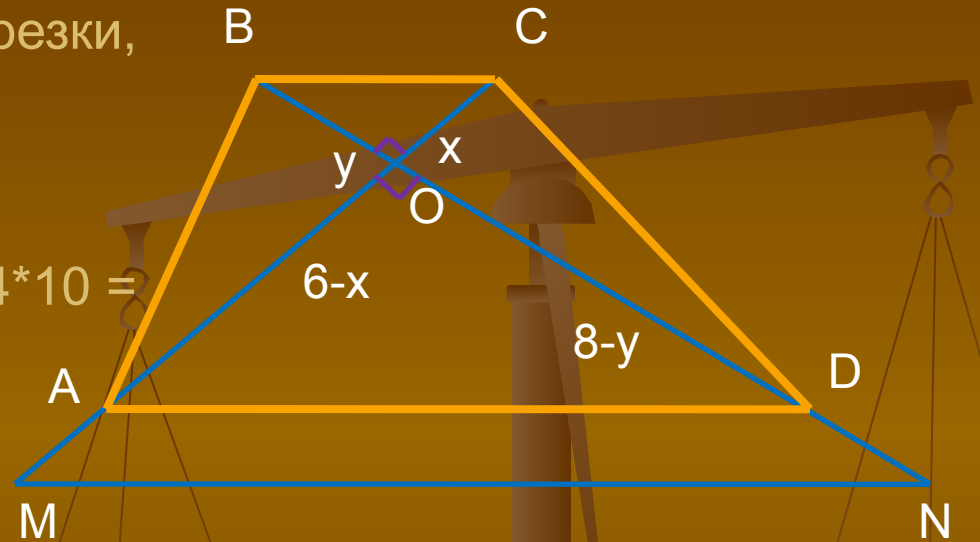
$$10x - 5/\sqrt{3}x^2 = 7,5x; 2,5x = 5/\sqrt{3}x^2; 7,5 = 5x;$$

$$x = 1,5 \text{ (см).}$$

$$7. BC = 5/\sqrt{3}x = 5/\sqrt{3} * 1,5 = 2,5 \text{ (см).}$$

$$8. \text{Средняя линия равна } (AD+BC)/2 = (7,5+2,5)/2 = 5.$$

Ответ: 5 см.



Способ №9 Тригонометрический

- 1. Из подобия $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$:

$$x/(6-x) = y/(8-y), \quad y = 4/3 x.$$

- 2. $\triangle BOC$ – прямоугольный.

$$\operatorname{tg} \alpha = y/x = 4/3x : x = y = 4/3.$$

- 3. Найдем $\cos \alpha$ либо по формуле:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1/\cos^2 \alpha,$$

либо методом треугольника: $\cos \alpha = 3/5$.

- 4. Из $\triangle BOC$:

$$OC/BC = \cos \alpha, \quad BC = OC/\cos \alpha = 4 \cdot 5/3 = 20/3 \text{ см.}$$

- 5. Из $\triangle AOD$:

$$AO/OD = \cos \alpha, \quad AD = AO/\cos \alpha = (6-x) \cdot 5/3 = 5(6-x)/3.$$

- 6. Средняя линия равна

$$(AD + BC)/2 = 5 \text{ (см)}.$$

Способ №10

(тригонометрический)

1. Из подобия треугольников BOC и AOD :

$$x/(6-x) = y/(8-y), y = 4/3x. x/(6-x) = b/a.$$

$$2. ax = 6b - bx, (a+b)x = 6b, \\ (a+b)/2 = 3b/x, (a+b)/2 = 3/\sin \alpha.$$

$$tg \alpha = x/y = x/(4/3x) = 3/4, \alpha = \arctg 3/4.$$

$$3. (a+b)/2 = 3/\sin(\arctg 3/4) = 3 / 3/5 = 5.$$

$$4. tg \alpha = 3/4 \\ \sin \alpha = ? \\ \sin \alpha = 3/5$$

