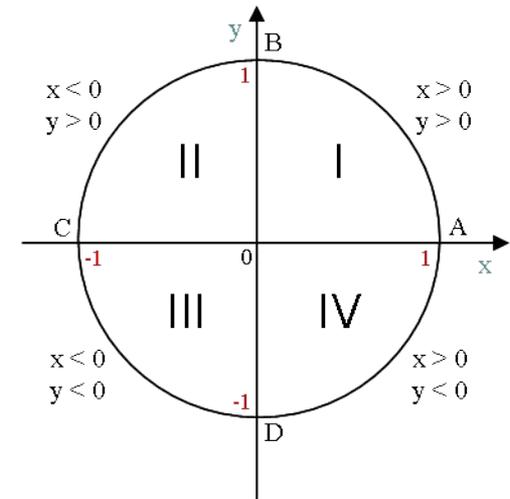


# Занимательная математика АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 10 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ:  
ЧИСЛОВАЯ ОКРУЖНОСТЬ.



# Числовая окружность.

## ЧТО БУДЕМ ИЗУЧАТЬ:

Числовая окружность в жизни.

Определение числовой окружности.

Общий вид числовой окружности.

Длина числовой окружности.

Местонахождение основных точек окружности.

Примеры задач.

# Числовая окружность.

## Числовая окружность в жизни.

В реальной жизни часто встречается движение по окружности. Например в спорте: соревнования велосипедистов, которые проезжают определенный круг на время или соревнования гоночных автомобилей которым надо проехать наибольшее количество кругов за отведенное время.



# Числовая окружность.

## Числовая окружность в жизни.

### Рассмотрим конкретный пример.

Бегун бежит по кругу длиной 400 метров. Спортсмен стартует в точке А (рис. 1) и движется против часовой стрелки. Где он будет находиться через **200м**, **800м**, **1500м**? А где провести финишную черту если бегуну пробежать **4195м**?

### Решение:

Через **200м**. бегун будет находиться в точке С, так как он пробежит ровно половину дистанции.

Пробежав **800м.**, бегун сделает ровно два круга и окажется в точке А.

**1500м.** это 3 круга по 400 м (1200м.) и еще 300 метров, то есть  $\frac{3}{4}$  от беговой дорожки, финиш этой дистанции в точке D.

Где будет находиться наш бегун пробежав **4195м**? 10 кругов это 4000 метров, останется пробежать 195 метров, это на 5 метров меньше чем половина дистанции. Значит финиш будет в точки М, расположенной около точки С.

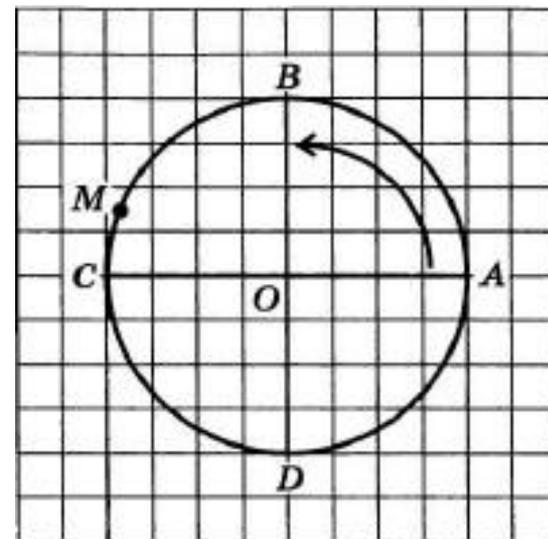


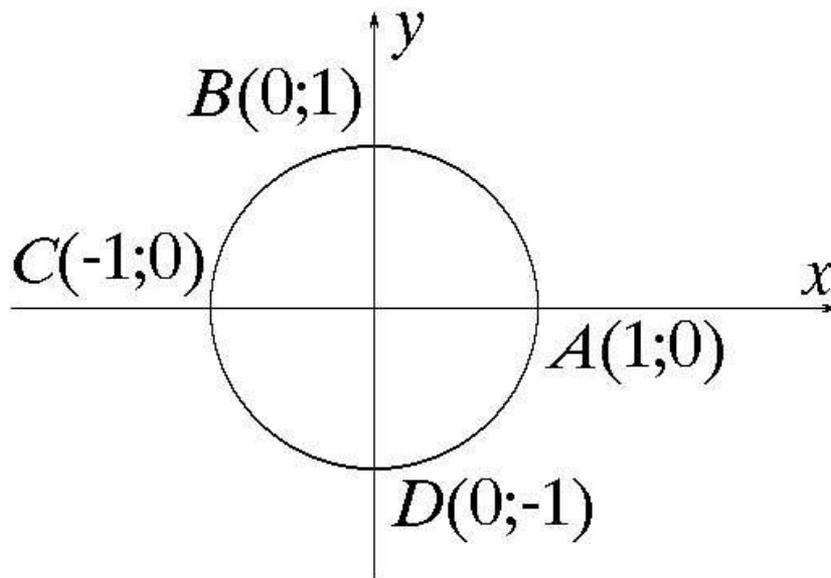
Рисунок 1.

# Числовая окружность.

## Определение.

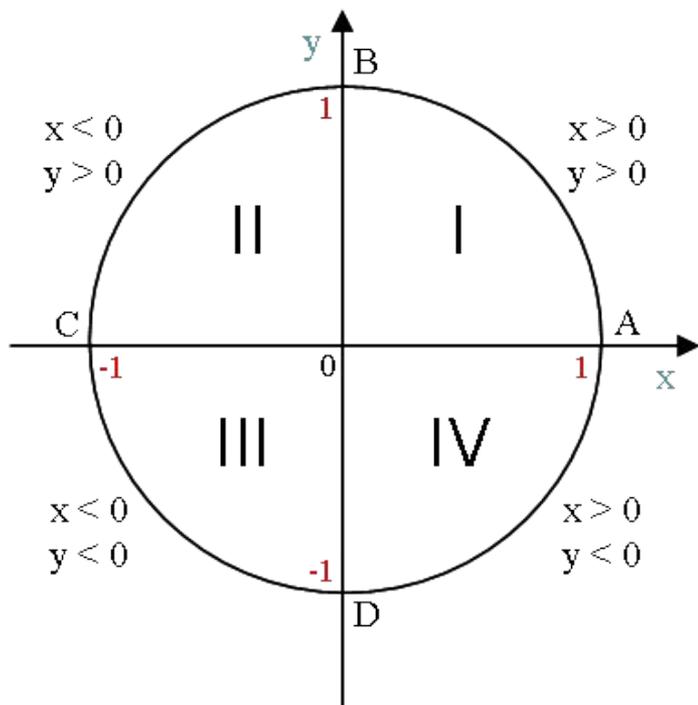
*Числовая окружность* – это единичная окружность, точки которой соответствуют определенным действительным числам.

*Единичной окружностью* называют окружность радиуса 1.



# Числовая окружность.

## Общий вид числовой окружности.



1) Радиус окружности принимается за **единицу** измерения.

2) **Горизонтальный** диаметр обозначают AC, причем A – это крайняя **правая** точка.

**Вертикальный** диаметр обозначают BD, причем B – это крайняя **верхняя** точка.

Диаметры AC и BD делят окружность на четыре четверти:

*первая четверть* – это дуга AB

*вторая четверть* – дуга BC

*третья четверть* – дуга CD

*четвертая четверть* – дуга DA

3) **Начальная точка** числовой окружности – точка A.

Отсчет от точки A **против** часовой стрелки называется **положительным направлением**.

Отсчет от точки A **по** часовой стрелке называется **отрицательным направлением**.

# Числовая окружность.

## Длина числовой окружности.

Длина числовой окружности вычисляется по формуле:

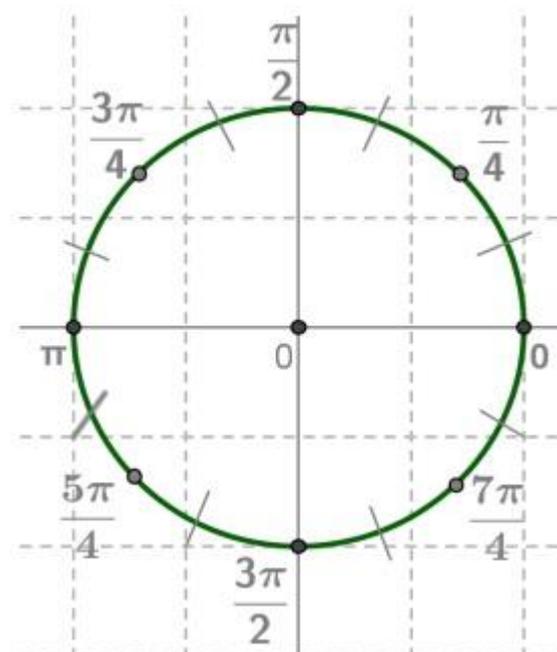
$$l = 2 \pi \cdot R = 2 \pi \cdot 1 = 2 \pi$$

Так как единичная окружность то  $R = 1$ .

Если взять  $\pi \approx 3,14$ , то длина окружности  $l$

может быть выражена числом  $2 \pi \approx 2 \cdot 3,14 = 6,28$

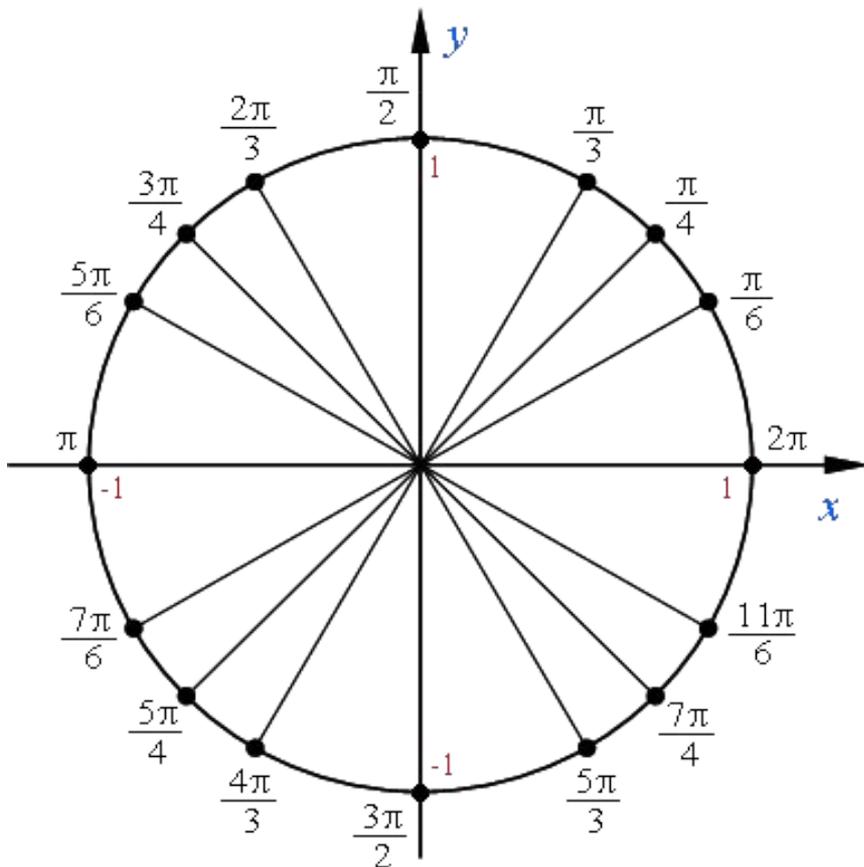
Длина каждой четверти равна  $\frac{1}{4} \cdot 2 \pi = \frac{\pi}{2}$



# Числовая окружность.

## Местонахождение основных точек окружности.

*Основные точки на окружности и их имена представлены на рисунке:*



Каждая из четырёх четвертей числовой окружности разделена на три равные части и около каждой из полученных двенадцати точек записано число, которому она соответствует.

**Для числовой окружности верно следующее утверждение:**

Если точка  $M$  числовой окружности соответствует числу  $t$ , то она соответствует и числу вида  $t+2\pi \cdot k$ , где  $k$  – целое число

**Важно!**

$$M(t) = M(t+2\pi \cdot k)$$

# Числовая окружность.

## Пример

В единичной окружности дуга АВ разделена точкой М на две равные части, а точками К и Р — на три равные части.

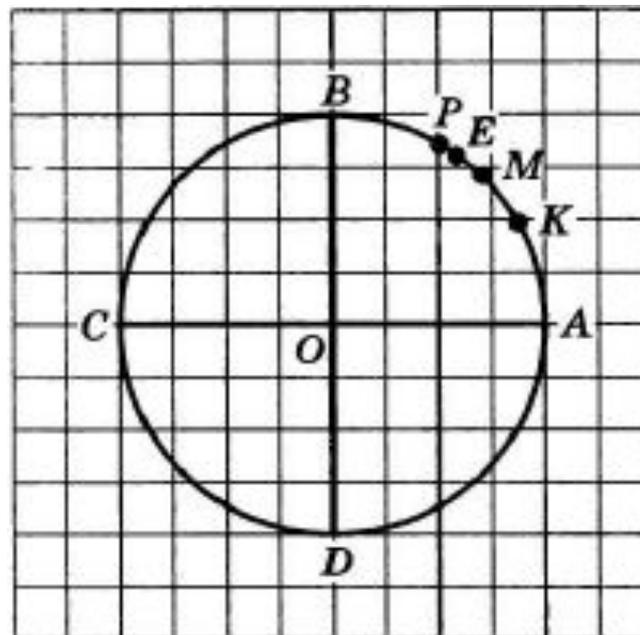
Чему равна длина дуги: АМ, МВ, АК, КР, РВ, АР, КМ?

Длина дуги АВ =  $\pi/2$ , разделив ее на две равные части точкой М, получим две дуги, длиной —  $\pi/4$  каждая. Значит,  $AM = MB = \pi/4$

Дуга АВ разбита на три равные части точками К и Р, то длина каждой полученной части равна  $1/3 \cdot \pi/2$ , т. е.  $\pi/6$  значит,  $AK = KR = RB = \pi/6$ .

Дуга АР состоит из двух дуг АК и КР длиной —  $\pi/6$ . Значит,  $AP = 2 \cdot \pi/6 = \pi/3$

Осталось вычислить длину дуги КМ. Эта дуга получается из дуги АМ исключением дуги АК. Таким образом,  $KM = AM - AK = \pi/4 - \pi/6 = \pi/12$



# Числовая окружность.

## Пример

*Найти на числовой окружности точку которая соответствует заданному числу:  $2\pi$  ,  $7\pi/2$  ,  $\pi/4$  ,  $-3\pi/2$ .*

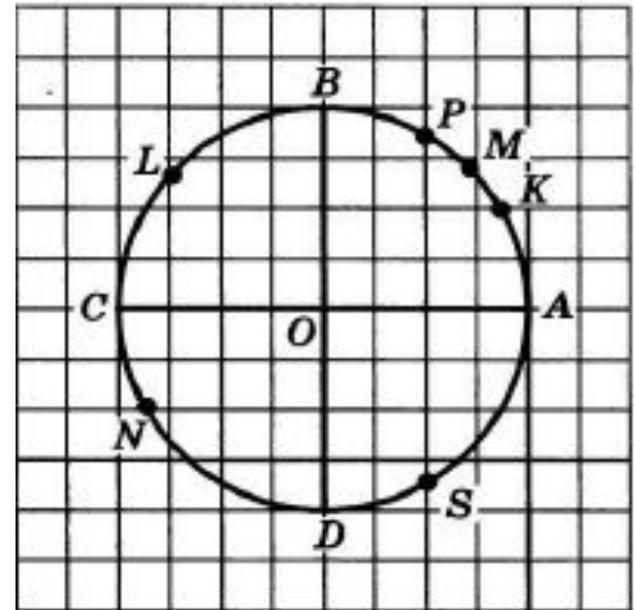
Решение:

Числу  $2\pi$  соответствует точка  $A$ , т.к. пройдя по окружности путь длиной  $2\pi$ , т.е. ровно одну окружность, мы опять попадем в точку  $A$

Числу  $7\pi/2$  соответствует точка  $D$ , т.к.  $7\pi/2 = 2\pi + 3\pi/2$ , т.е. двигаясь в положительном направлении, нужно пройти целую окружность и дополнительно путь длиной  $3\pi/2$ , который закончится в точке  $D$

Числу  $\pi/4$  соответствует точка  $M$ , т.к. двигаясь в положительном направлении, нужно пройти путь в половину дуги  $AB$  длиной  $\pi/2$ , который закончится в точке  $M$ .

Числу  $-3\pi/2$  соответствует точка  $B$ , т.к. двигаясь в отрицательном направлении из точки  $A$ , нужно пройти путь длиной  $3\pi/2$ , который закончится в точке  $B$



# Числовая окружность.

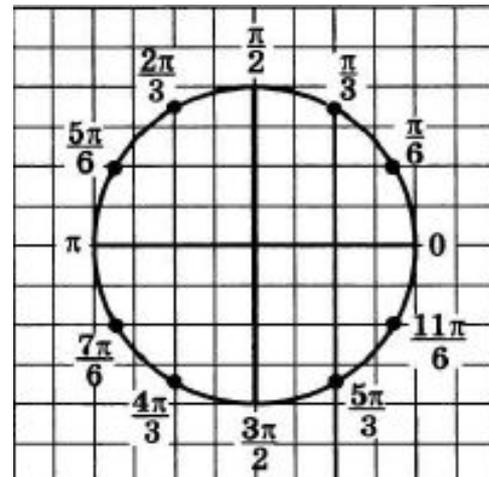
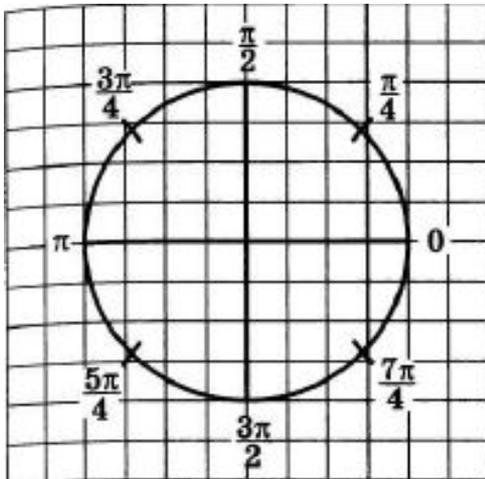
## Пример

Найти на числовой окружности точки а)  $21\pi/4$  б)  $-37\pi/6$

Решение: Пользуясь формулой что число  $M(t) = M(t+2\pi \cdot k)$  (8 слайд) получим

а)  $21\pi/4 = (4+5/4) \cdot \pi = 4\pi + 5\pi/4 = 2 \cdot 2\pi + 5\pi/4$ , значит числу  $21\pi/4$  соответствует такое же число что и числу  $5\pi/4$  - середина третьей четверти.

б)  $-37\pi/6 = -(6+1/6) \cdot \pi = -(6\pi + \pi/6) = -3 \cdot 2\pi - \pi/6$ , значит числу  $-37\pi/6$  соответствует такое же число что и числу  $-\pi/6$ , тоже самое что и  $11\pi/6$ .



# Числовая окружность.

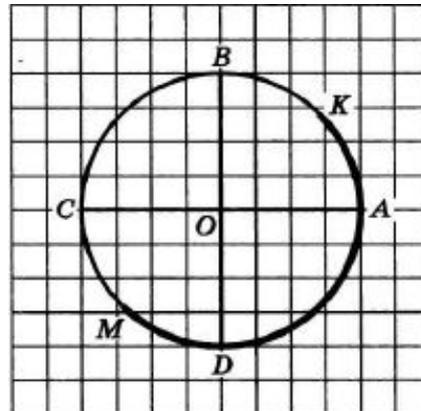
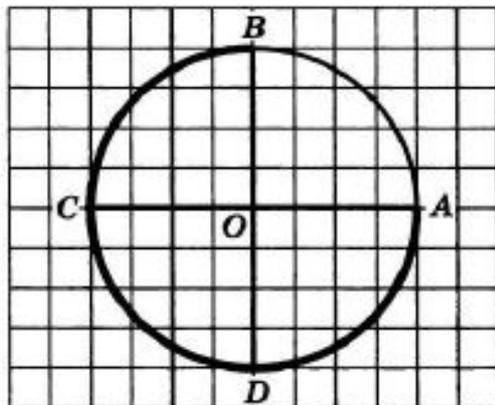
## Пример

Найти все числа  $t$ , которым на числовой окружности соответствуют точки, принадлежащие заданной дуге: а) ВА б) МК

Решение:

а) Дуга ВА - это дуга с началом в точке В и концом в точке А при движении по окружности против часовой стрелки. Точка В соответственно равна  $\pi/2$ , а точка А равна  $2\pi$ . Значит для точек  $t$  имеем:  $\pi/2 \leq t \leq 2\pi$ . Но согласно формуле на слайде 8 числам  $\pi/2$  и  $2\pi$  соответствуют числа вида  $\pi/2 + 2\pi \cdot k$  и  $2\pi + 2\pi \cdot k$ , соответственно. Тогда наше число  $t$  принимает значения:  $\pi/2 + 2\pi \cdot k \leq t \leq 2\pi + 2\pi \cdot k$ , где  $k$  – целое число

б) Дуга МК - это дуга с началом в точке М и концом в точке К. Точка М соответственно равна  $-3\pi/4$ , а точка К равна  $\pi/4$ . Значит для точек  $t$  имеем:  $-3\pi/4 \leq t \leq \pi/4$ . Но согласно формуле на слайде 8 числам  $-3\pi/4$  и  $\pi/4$  соответствуют числа вида  $-3\pi/4 + 2\pi \cdot k$  и  $\pi/4 + 2\pi \cdot k$ , соответственно. Тогда наше число  $t$  принимает значения:  $-3\pi/4 + 2\pi \cdot k \leq t \leq \pi/4 + 2\pi \cdot k$ , где  $k$  – целое число



# Числовая окружность.

## Задачи для самостоятельного решения.

1) В единичной окружности дуга  $BC$  разделена точкой  $T$  на две равные части, а точками  $K$  и  $P$  — на три равные части.

Чему равна длина дуги:  $BT$ ,  $TC$ ,  $BK$ ,  $KP$ ,  $PC$ ,  $BP$ ,  $KT$ ?

2) Найти на числовой окружности точку которая соответствует заданному числу:  $\pi$ ,  $11\pi/2$ ,  $21\pi/4$ ,  $-7\pi/2$ ,  $17\pi/6$ .

3) Найти все числа  $t$ , которым на числовой окружности соответствуют точки, принадлежащие заданной дуге: а)  $AB$  б)  $AC$  в)  $PM$ , где  $P$  – середина дуги  $AB$ ,  $M$  - середина  $DA$