

РАССМАТРИВАЯ ПАРАБОЛУ.

(по материалам
«Математического клуба “Кенгуру”»)





Аполлоний Пергский (Ἀπολλώνιος ὁ Περυαῖος, [Перге](#), [262 до н. э.](#) — [190 до н. э.](#)) — [древнегреческий математик](#), один из трёх (наряду с [Евклидом](#) и [Архимедом](#)) великих геометров античности, живших в [III веке до н. э.](#)

Аполлоний прославился в первую очередь монографией «*Конические сечения*» (8 книг), в которой дал содержательную общую теорию [эллипса](#), [параболы](#) и [гиперболы](#).

Именно Аполлоний предложил общепринятые названия этих кривых; до него их называли просто «сечениями конуса». Он ввёл и другие математические термины, латинские аналоги которых навсегда вошли в науку, в частности: [асимптота](#), [абсцисса](#), [ордината](#), [аппликата](#) «Парабола» означает приложение или притча.

Долгое время так называли линию среза конуса, пока не появилась квадратичная функция.



Подумаем, как можно получить массу информации о коэффициентах квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$, рассматривая его график — параболу.

Сначала напомним хорошо известные факты.

1) Знак коэффициента a (при x^2) показывает направление ветвей параболы:

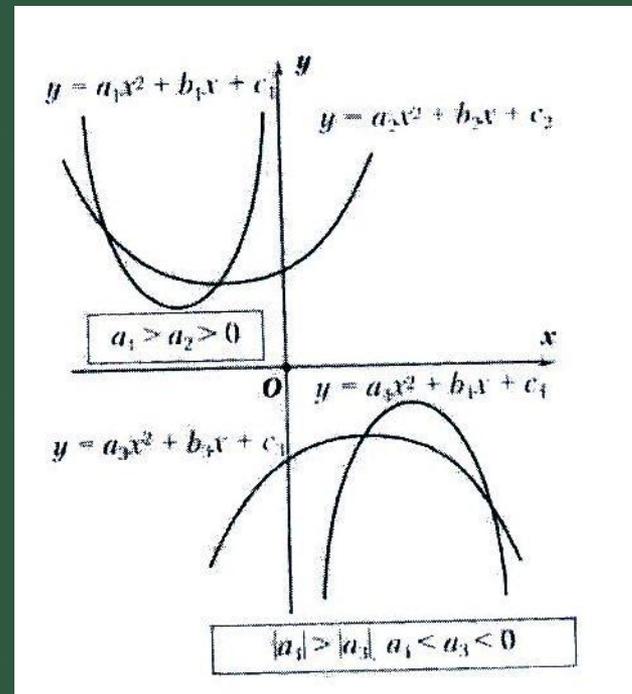
$a > 0$ — ветви вверх;

$a < 0$ — ветви вниз.

Модуль коэффициента a отвечает за

«крутизну» параболы:

чем больше $|a|$, тем «круче» парабола.



2) Коэффициент **b** (вместе с **a**) определяет абсциссу вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a}$

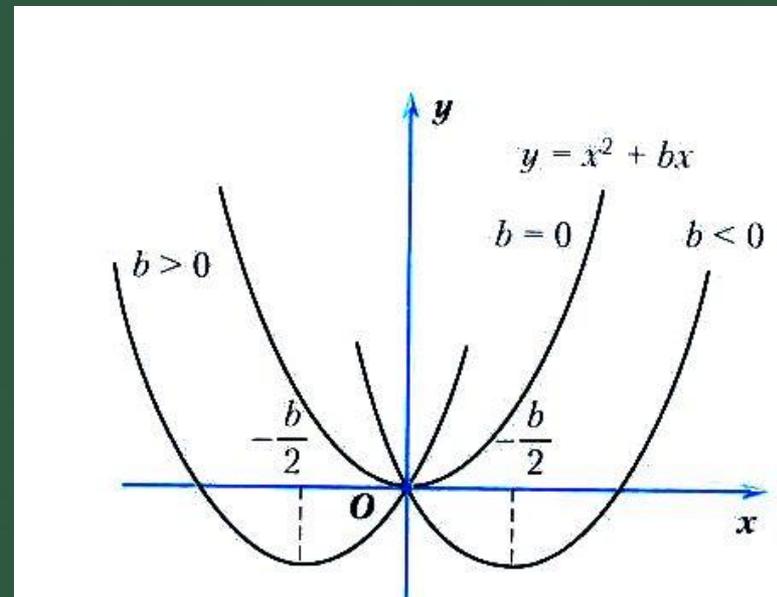
В частности, при **a = 1** абсцисса вершины квадратного трехчлена $y = x^2 + bx + c$ равна $x_0 = -\frac{b}{2}$

При $b > 0$

вершина расположена
левее оси Oy ,

при $b < 0$ — правее,

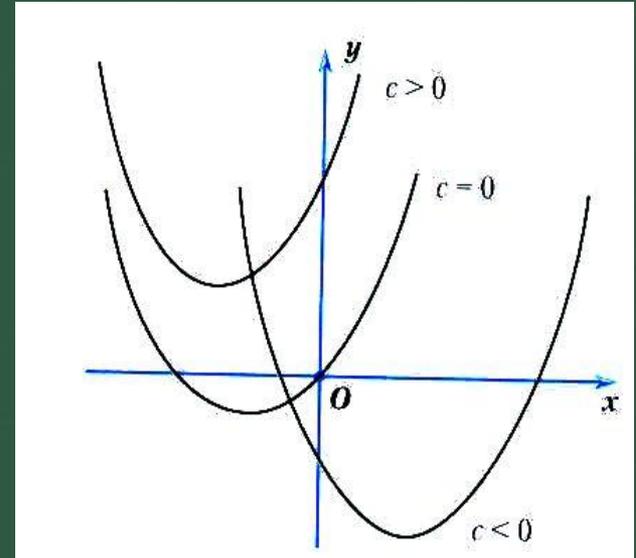
при $b = 0$ — на оси Oy



з) Сохраняя коэффициенты a и b и изменяя c , мы будем «поднимать» и «опускать» параболу вдоль оси Oy .

Как «прочитать» на чертеже значение c ?

Ясно, что $c = y(0)$ — ордината точки пересечения параболы с осью Oy .



Упражнение № 1.

Для каждого из
квадратных трехчленов:

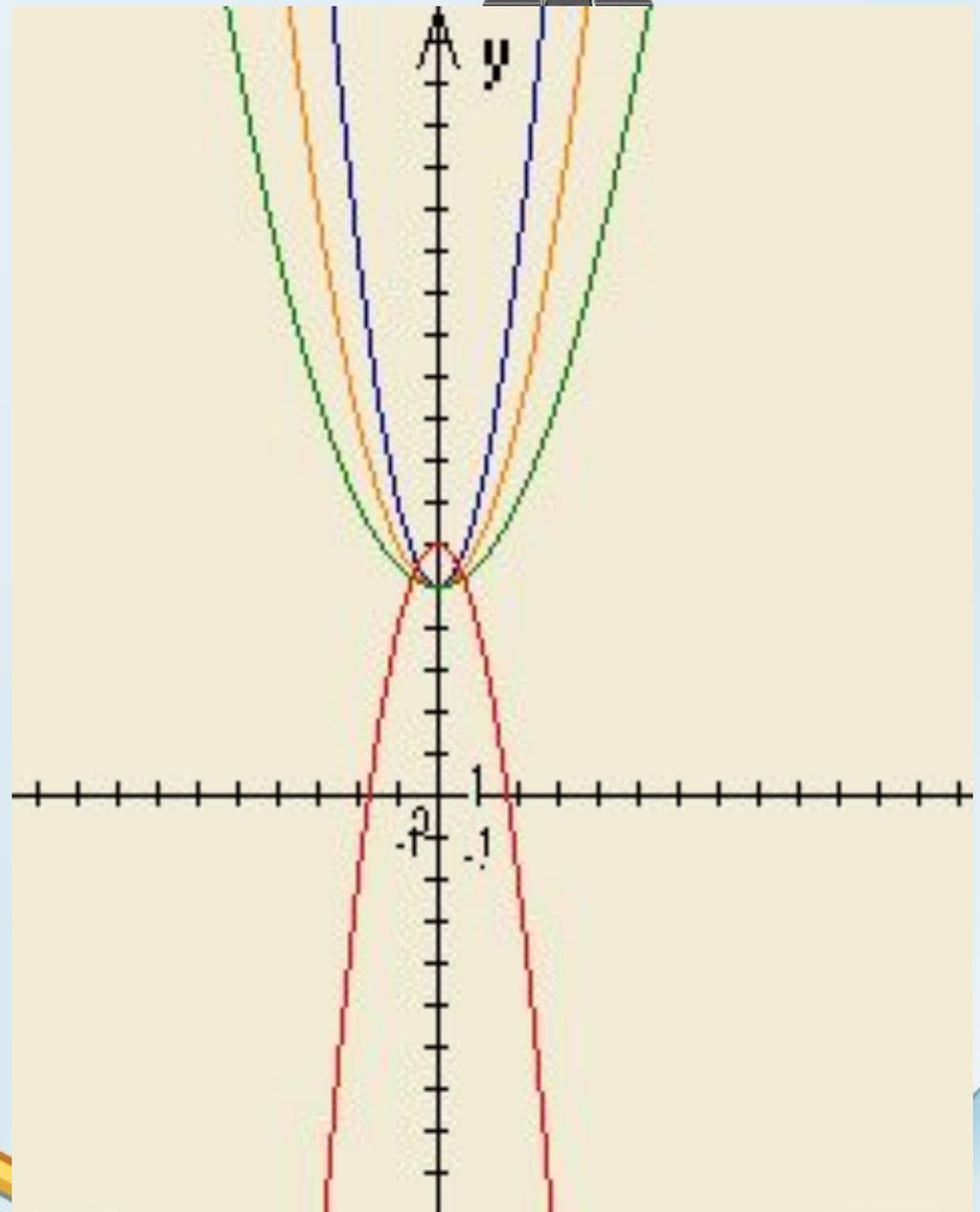
$$y = x^2 + 5;$$

$$y = 6 - 2x^2;$$

$$y = 2x^2 + 5;$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 5$$

найдите на чертеже
его график.



Решение .

Упражнение 1

$a > 0$ — ветви вверх; $a < 0$ — ветви вниз.

чем больше $|a|$, тем «круче» парабола.

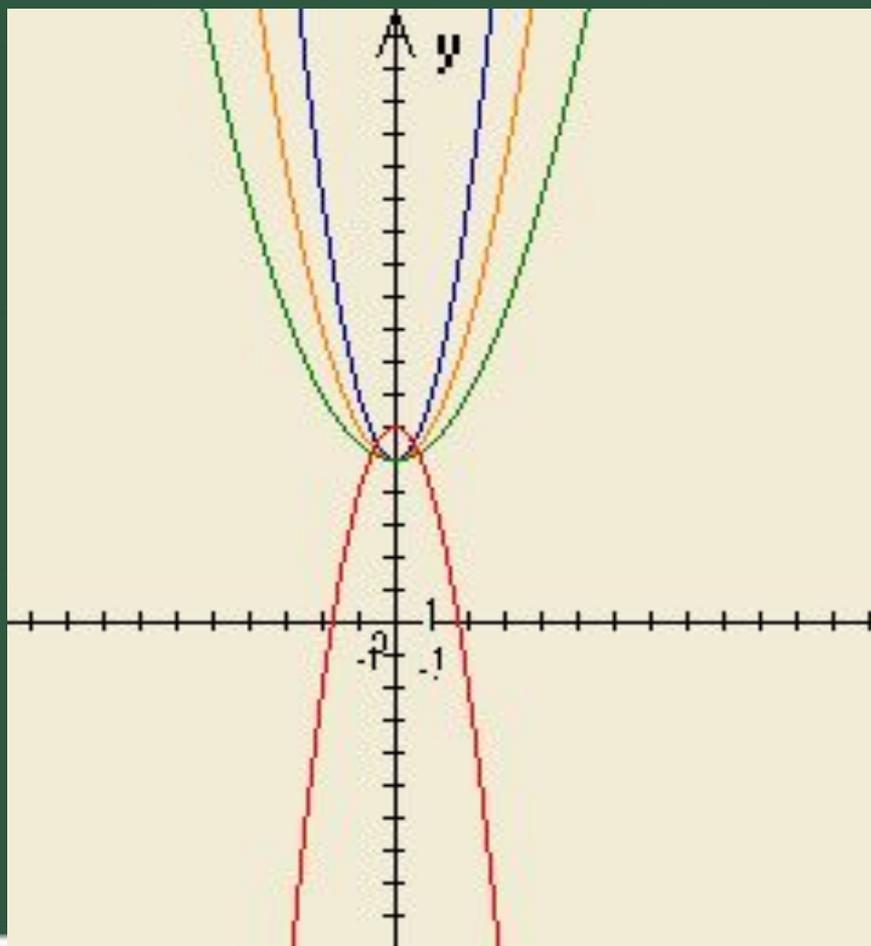
Значит:

$$y = x^2 + 5;$$

$$y = 2x^2 + 5;$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 5;$$

$$y = 6 - 2x^2;$$



Упражнение №2

Для каждого из
квадратных трехчленов

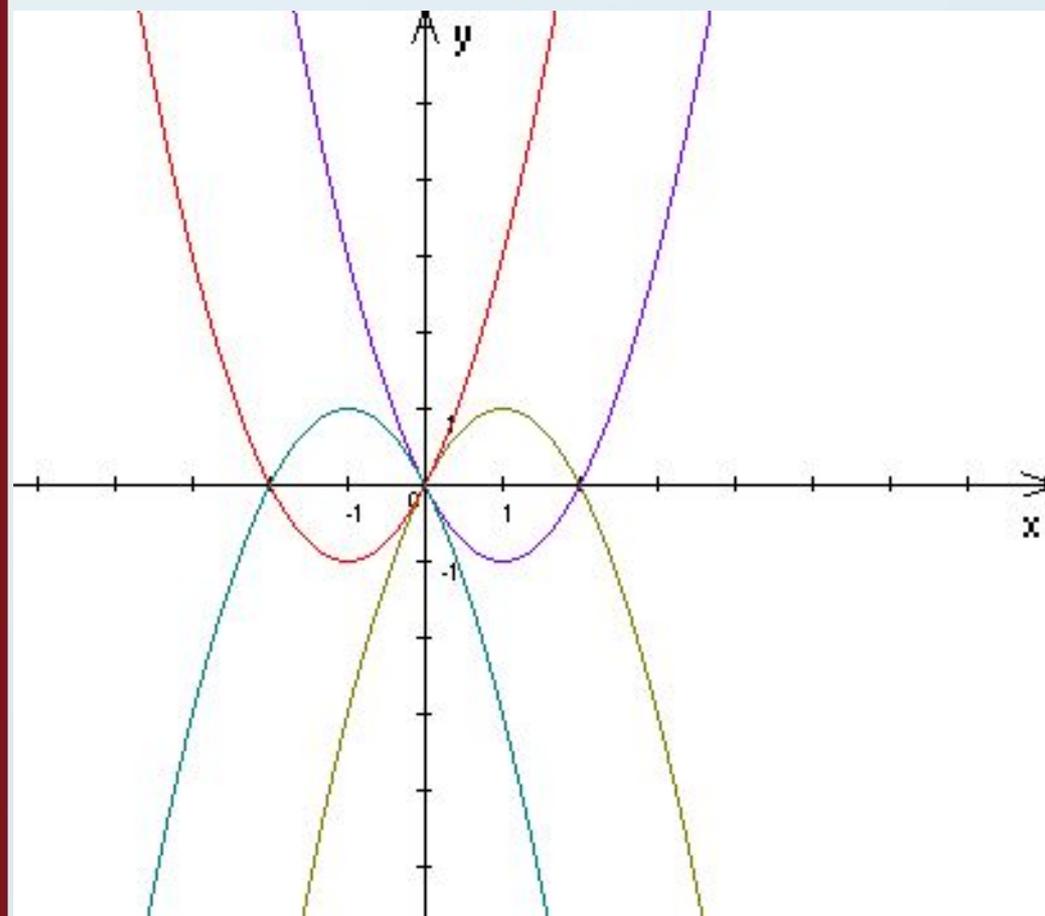
$$y = x^2 + 2x;$$

$$y = x^2 - 2x;$$

$$y = -x^2 + 2x;$$

$$y = -x^2 - 2x$$

найдите на чертеже
его график.



Решение .

Упражнение 2

$$y = x^2 + 2x;$$

$$y = x^2 - 2x;$$

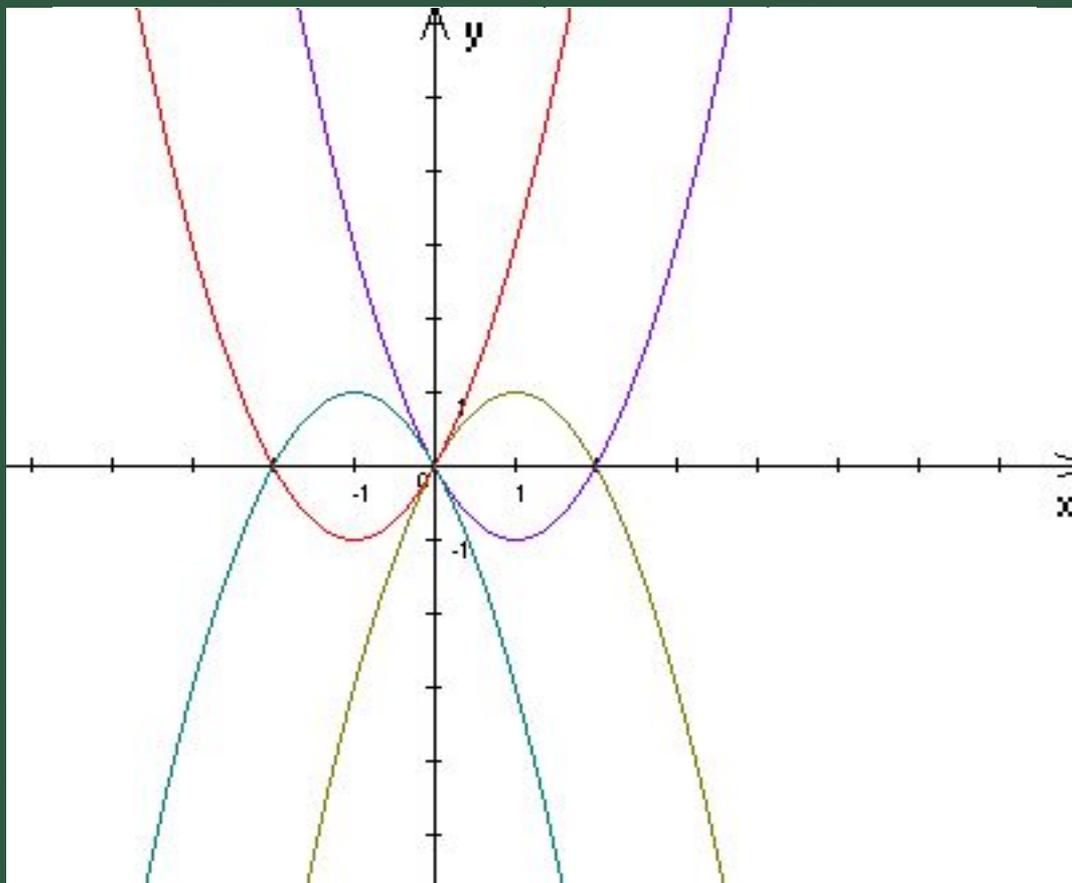
$$y = -x^2 + 2x;$$

$$y = -x^2 - 2x;$$

при $a < 0; b < 0$ график располагается левее оси Oy ,

при $a < 0; b > 0$ график располагается правее оси Oy ,

При $b > 0$ – вершина расположена левее оси Oy ,
при $b < 0$ — правее,
при $b = 0$ — на оси Oy при $a > 0$



*А теперь, когда мы вспомнили как
влияют коэффициенты на
построение графика параболы
выполним следующие упражнения:*

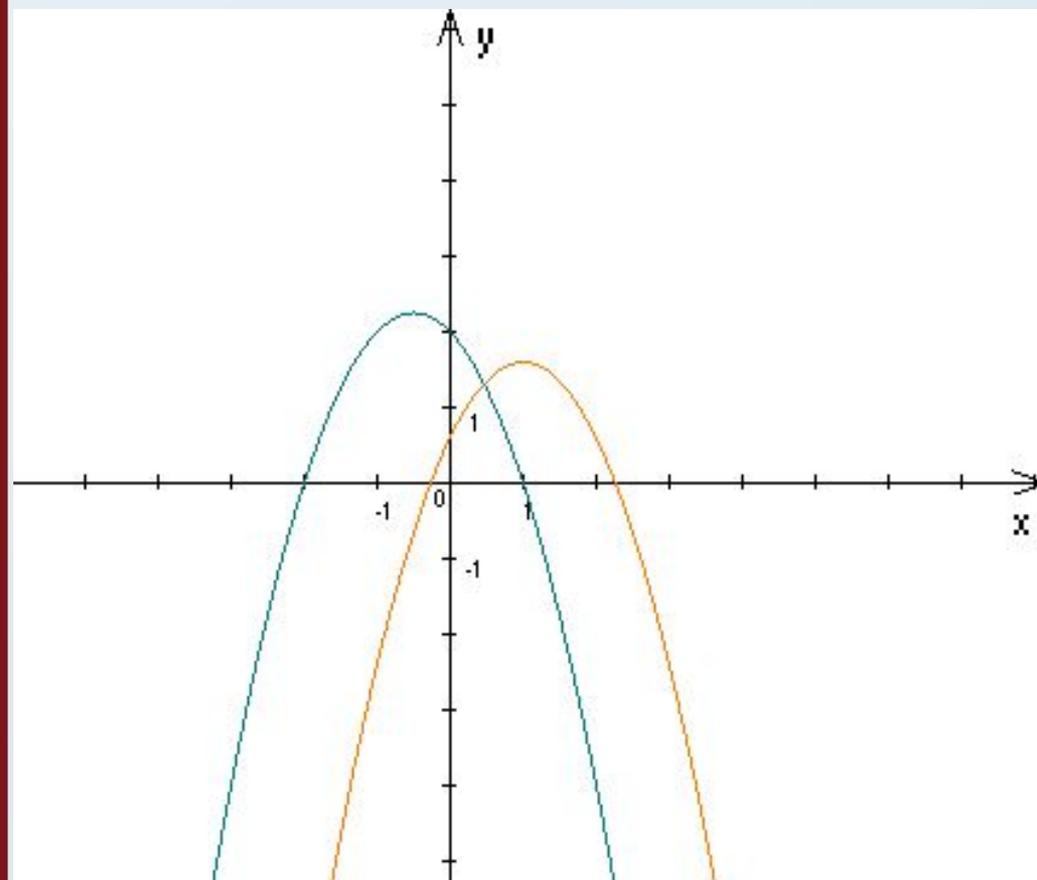
Упражнение №3

На чертеже изображены
графики функций

$$y = ax^2 + bx + 1$$

$$y = -x^2 - x + c$$

- Где какой график?
- Что больше: c или 1 ?
- Определите знак b .



Решение .

Упражнение 3

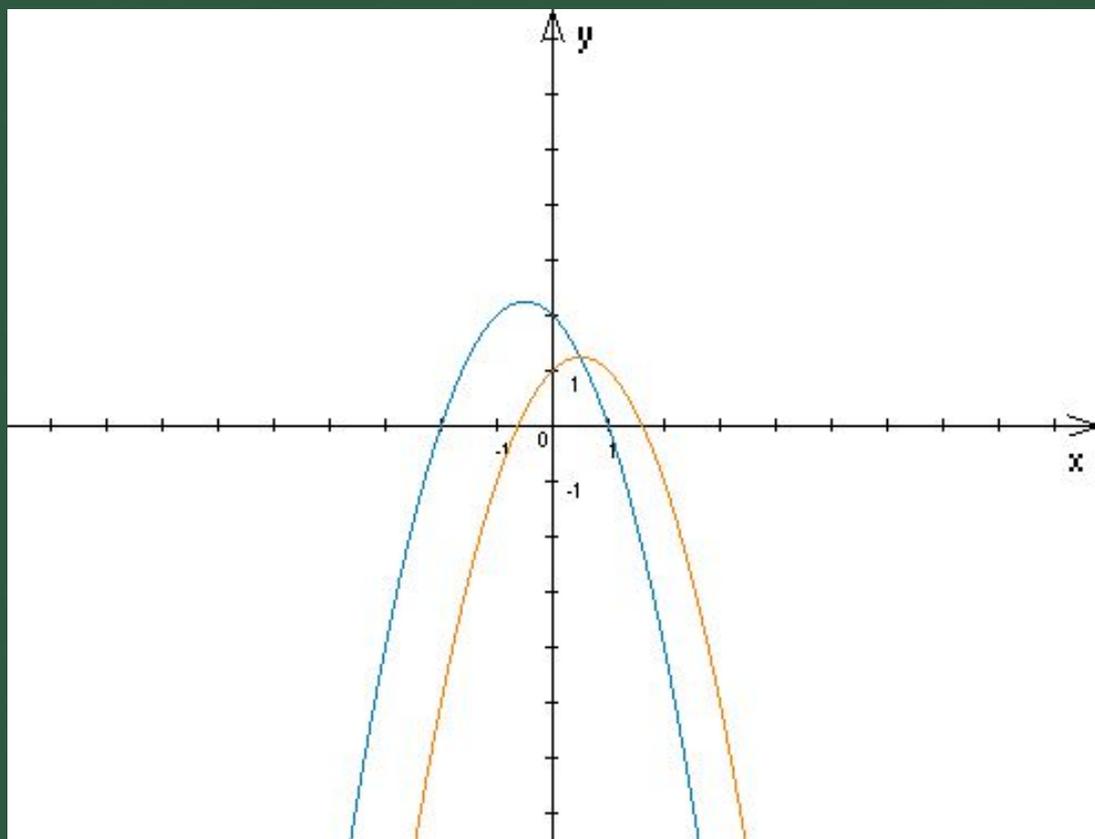
- а) Где какой график?
- б) Что больше: c или 1 ?
- в) Определите знак b .

а) $y = -x^2 - x + c;$

$$y = ax^2 + bx + 1$$

б) $c > 1$

в) $b > 0$ ($a < 0$)



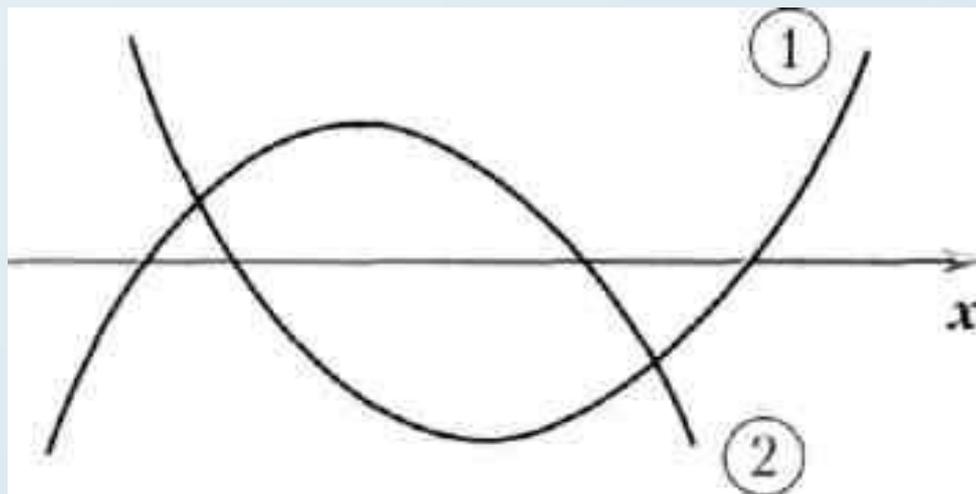
Упражнение №4

На чертеже
изображены
графики функций

$$y = ax^2 + c,$$
$$y = x^2 + bx + d$$

причем ось oy, идущая, как
всегда, «снизу вверх»
перпендикулярно оси ox,
стерта.

- Какая функция имеет
график 1, а какая -2?
- Определите знаки c и d .
- Определите знак b .



Решение .

Упражнение 4

На чертеже изображены графики функций

$$y = ax^2 + c;$$

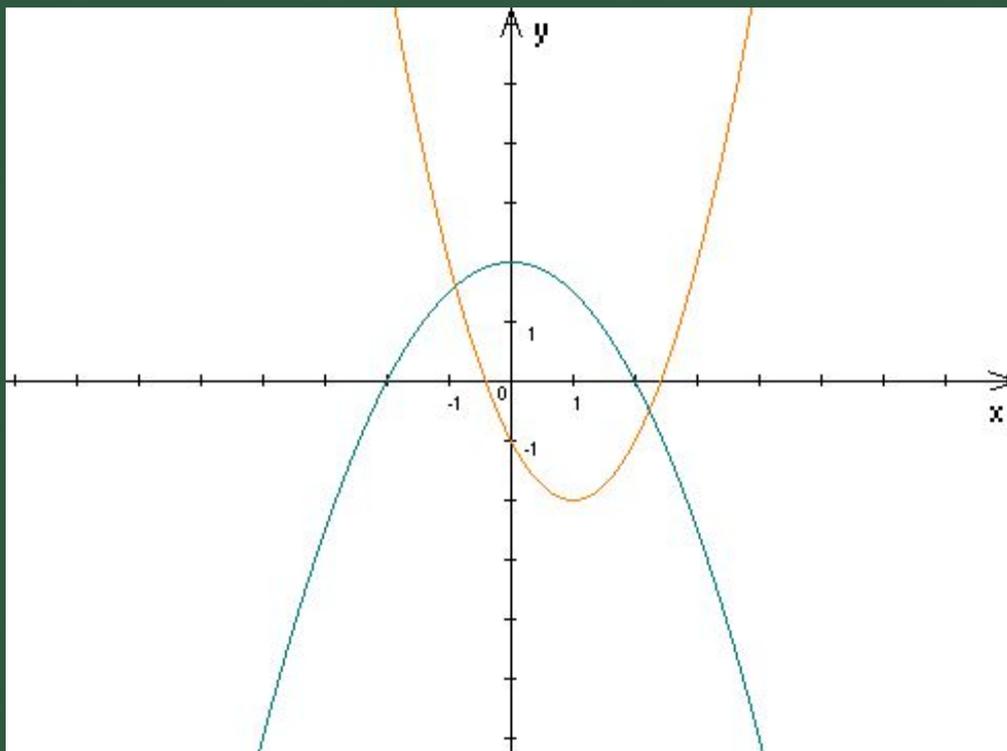
$$y = ax^2 + bx + d;$$

а) $y = ax^2 + c;$

$$y = ax^2 + bx + d;$$

б) $c > 0; d < 0.$

в) $b < 0$



Упражнение №5

На чертеже изображены
графики функций

$$y = x^2 + 4x + c,$$

$$y = x^2 + bx + d \text{ и } y = x^2 + 1,$$

причем ось Ox , идущая, как
всегда, «слева направо»

перпендикулярно оси Oy , стерта.

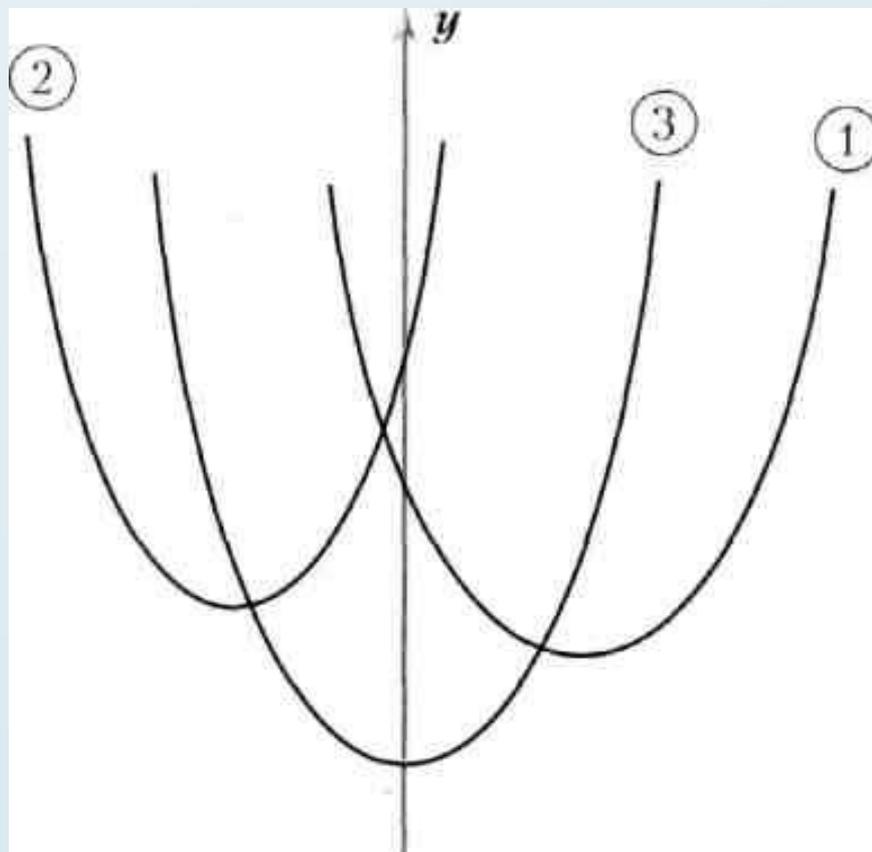
а) Какая функция имеет график 1,

какая — 2, а какая — 3?

б) Определите знак b .

в) Что больше: c или d ?

г) Определите знаки c и d .



Решение .

Упражнение 5

а) Какая функция имеет график 1,

какая — 2, а какая — 3?

б) Определите знак b .

в) Что больше: c или d ?

г) Определите знаки c и d .

а) $y = ax^2 + 4x + c$ — 2

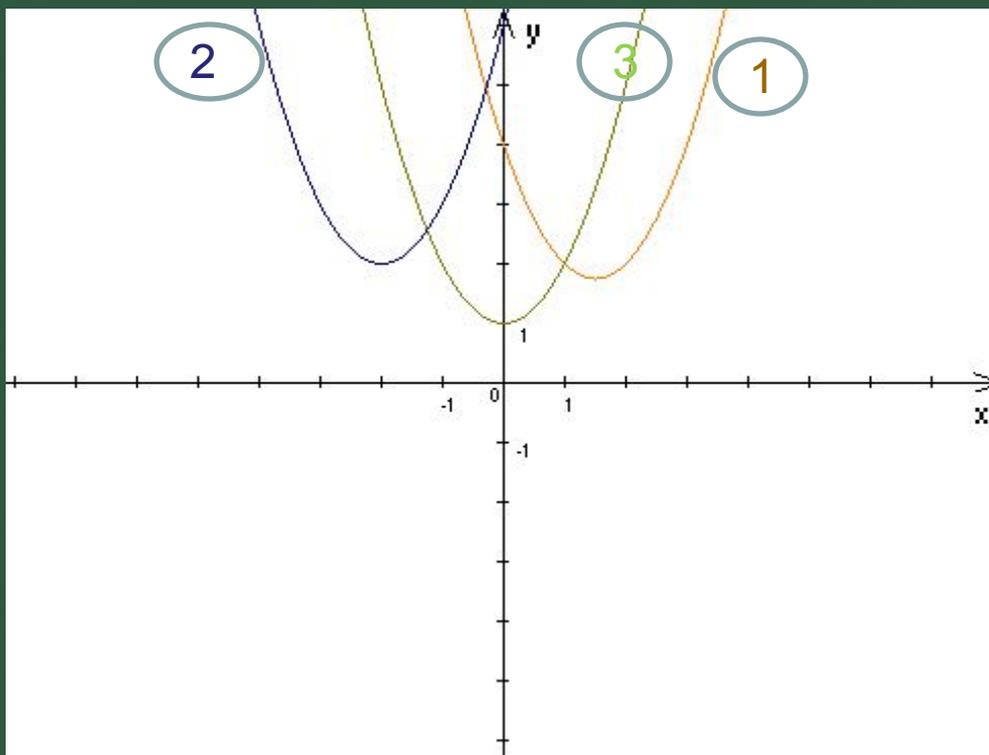
$y = x^2 + bx + d$; — 1

$y = x^2 + 1$ — 3

б) $b < 0$

в) $c > d$

г) c и d больше нуля



Упражнение №6.

На чертеже изображены графики функций $y = ax^2 + x + c$ и

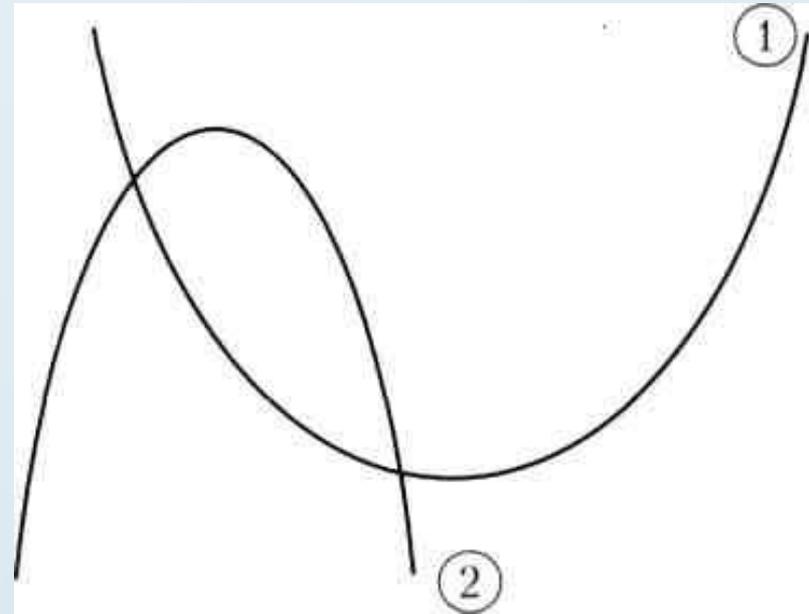
$$y = -x^2 + bx + 2,$$

причем оси Oy и Ox , расположенные стандартным образом (параллельно краям листа, Ox — горизонтально «слева направо», Oy — вертикально («снизу вверх»), стерты.

а) Определите знак b .

б) Определите знак c .

в) Докажите, что $c > \frac{1}{4a} + \frac{b^2}{4} + 2$



Решение .

Упражнение 6

а) Определите знак b

б) Определите знак c .

$$y = ax^2 + x + c$$

$$y = -x^2 + bx + 2$$

в) Докажите, что

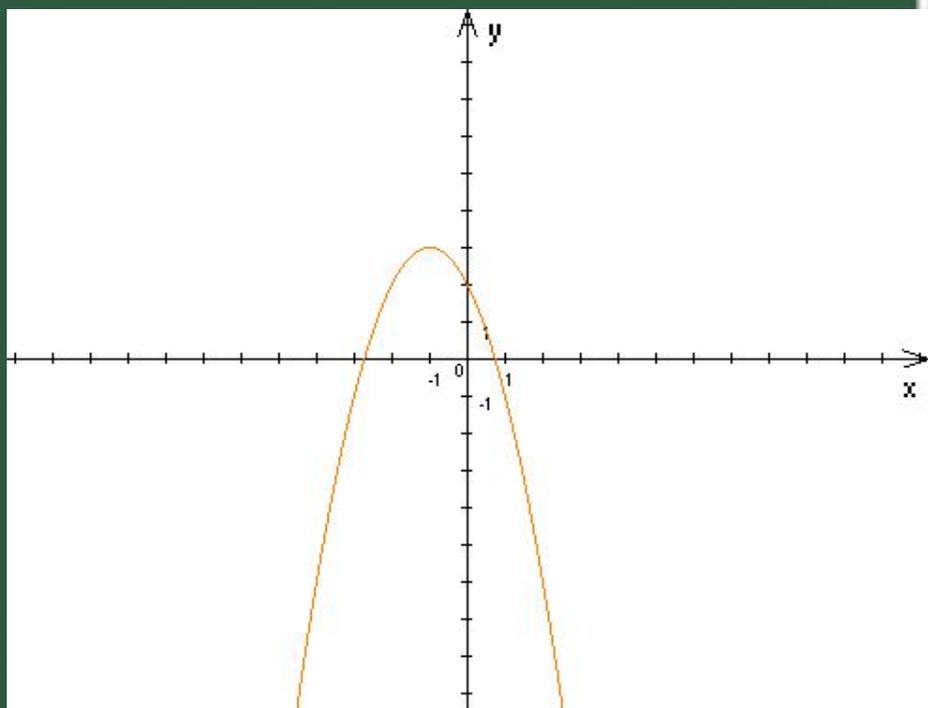
$$c < \frac{1}{4a} + \frac{b^2}{4} + 2$$

1) Ветви параболы $y = ax^2 + x + c$ направлены вверх, значит $a > 0$, знак абсциссы вершины параболы минус. Тогда, у параболы $y = -x^2 + bx + 2$ абсцисса тем более отрицательна. Значит $b < 0$.

2) Ось oy проходит правее вершины параболы $y = ax^2 + x + c$ значит $c < 0$.

3) Абсцисса вершины параболы

$y = -x^2 + bx + 2$ равна $\frac{b}{2}$,



а ордината равна $2 + \frac{b^2}{4}$.

Ордината вершины параболы $y = ax^2 + x + c$

равна $c - \frac{1}{4a}$. Сравним их:

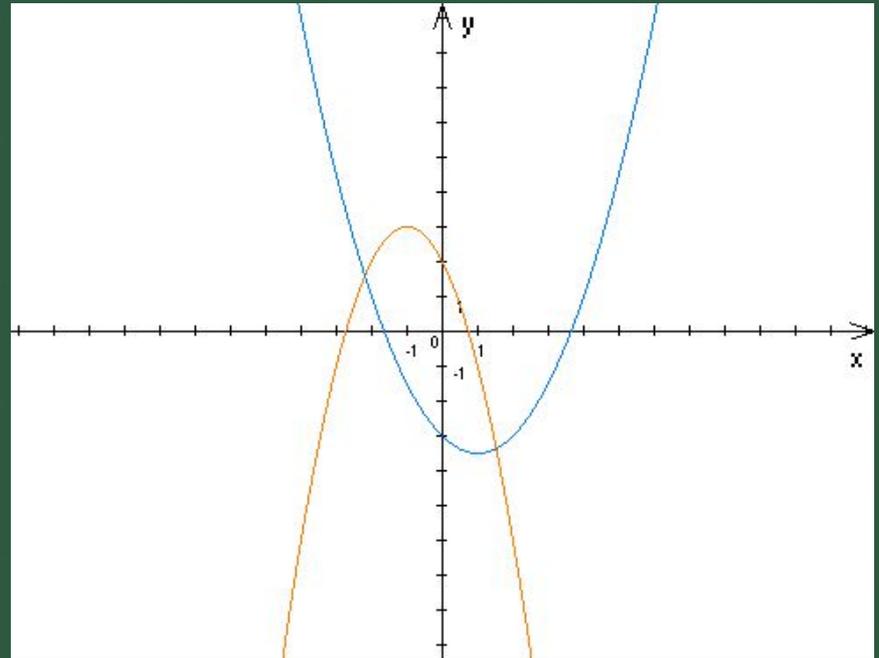
$$\frac{b^2}{4} + 2 > -\frac{1}{4a} + c;$$

$$\frac{b^2}{4} + 2 + \frac{1}{4a} > c;$$

т.е

$$c < \frac{1}{4a} + \frac{b^2}{4} + 2$$

ч.т. д.



Решение упражнений основывается на тех фактах, которые мы знаем о коэффициентах квадратного трехчлена.

Свойства параболы чрезвычайно богаты и разнообразны, используя их решите следующую задачу.

Задача.

Известно, что парабола, являющаяся графиком квадратного трехчлена $y = ax^2 + 10x + c$, не имеет точек в третьей четверти. Какое из следующих утверждений может быть неверным?

- (A) $a > 0$
- (B) Вершина параболы лежит во второй четверти.
- (C) $c \geq 0$
- (D) $c > 0,1$
- (E) $100 - 4ac \leq 0$.

Решение.

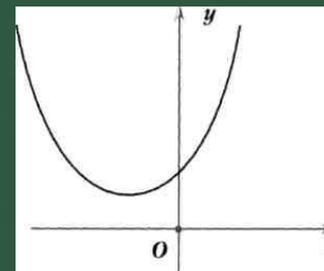
Поскольку парабола не имеет точек в III четверти, то a не может быть отрицательным. Итак, $a > 0$, следовательно, абсцисса вершины $x_0 = -\frac{10}{a} < 0$. То есть вершина не может лежать ни в I, ни в IV четвертях. В III четверти ее нет по условию, значит, она лежит во II четверти.

Итак, парабола обязана иметь такой вид, как показано на рисунке,

поэтому условия A, B и C обязательно выполняются.

Неравенство в E означает, что дискриминант неположителен, то есть у квадратного трехчлена не более одного корня, — это условие тоже

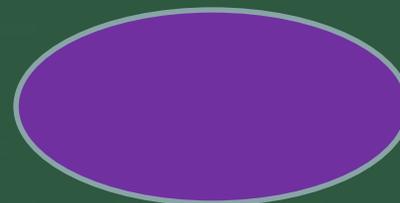
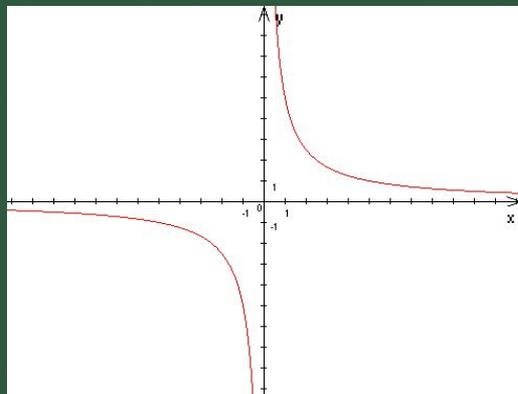
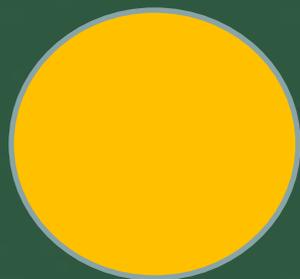
обязательно выполняется. Условие $c > 0,1$ ни из чего не следует.



Действительно, оно может быть нарушено, например, для параболы $y = x^2 + 10x + 0,01$, удовлетворяющей условиям задачи.

Ответ: (D).

Самые близкие родственники параболы – это окружность, гиперболола и эллипс.



У этого термина существуют и другие значения.

(литература)

Пара́бола «сравнение, сопоставление, подобие, приближение»:

Небольшой рассказ иносказательного характера, имеющий поучительный смысл и особую форму повествования, которое движется как бы по кривой (параболе): начатый с отвлечённых предметов, рассказ постепенно приближается к главной теме, а затем вновь возвращается .

РАССМАТРИВАЯ ПАРАБОЛУ.

(по материалам

«Математического клуба “Кенгуру”»)

