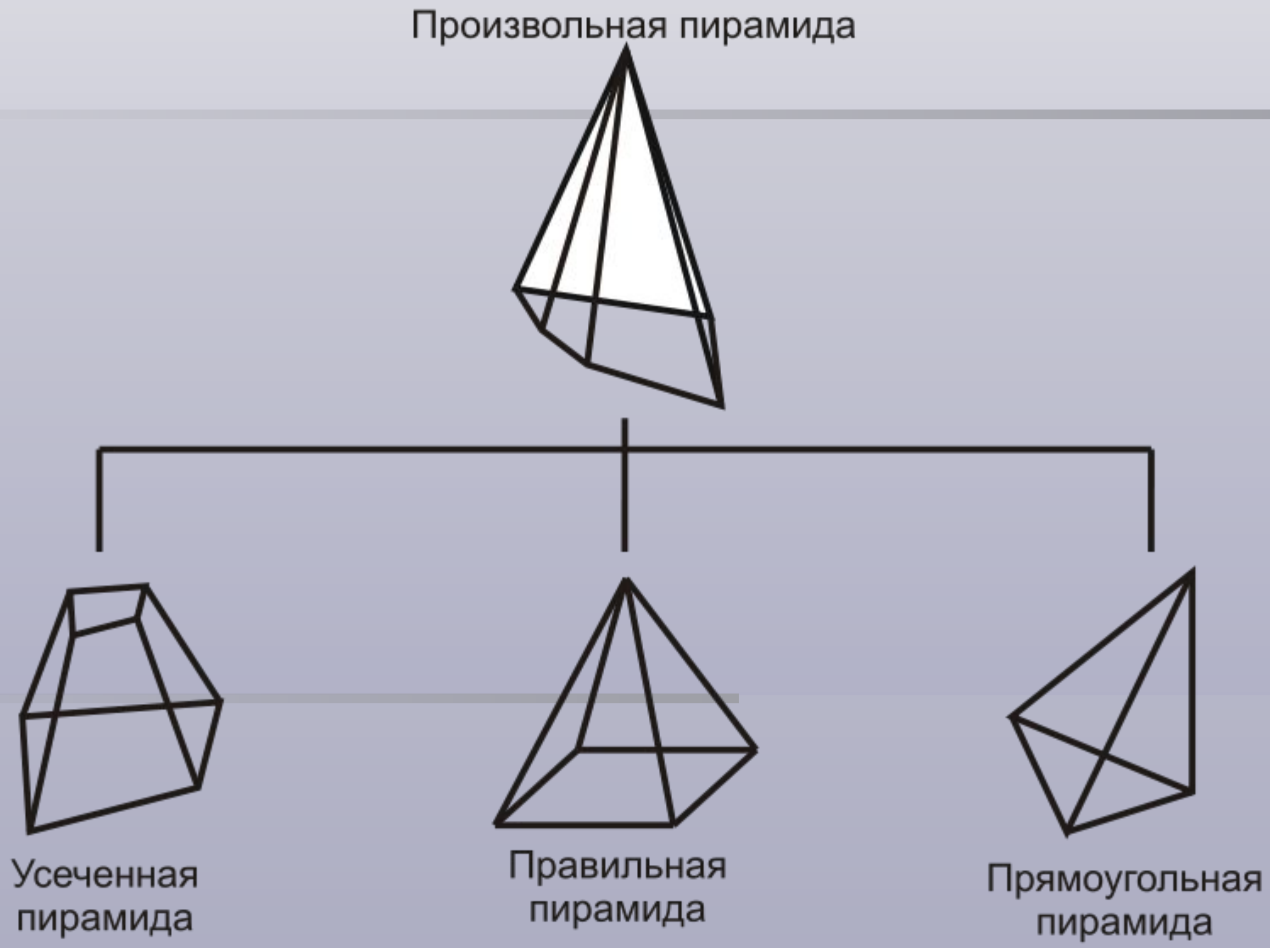
МОУ СКУГАРЕЕВСКАЯ СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА

Содержание

Что такое пирамида?

Пирами́да (др.-греч. πυραμίς, род. п. πυραμίδος) — многогранник, основание которого — многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие общую вершину [1]. По числу углов основания различают пирамиды треугольные, четырёхугольные **и т. д. Пирамида является частным случаем конуса.**

Виды пирамид

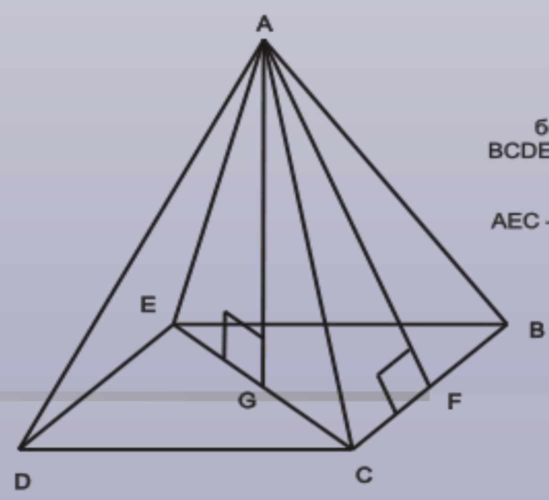


История развития геометрии пирамиды

- Начало геометрии пирамиды было положено в Древнем Египте и Вавилоне, однако активное развитие получило в Древней Греции. Первый, кто установил, чему равен объем пирамиды был Демокрит [2], а доказал Евдокс Книдский, а доказал Евдокс Книдский. Древнегреческий математик Евклид, а доказал Евдокс Книдский. Древнегреческий математик Евклид, систематизировал знания о пирамиде в XII томе своих «Начал», а также вывел первое определение пирамиды: **телесная фигура, ограниченная плоскостями, которые от одной**

Элементы пирамиды

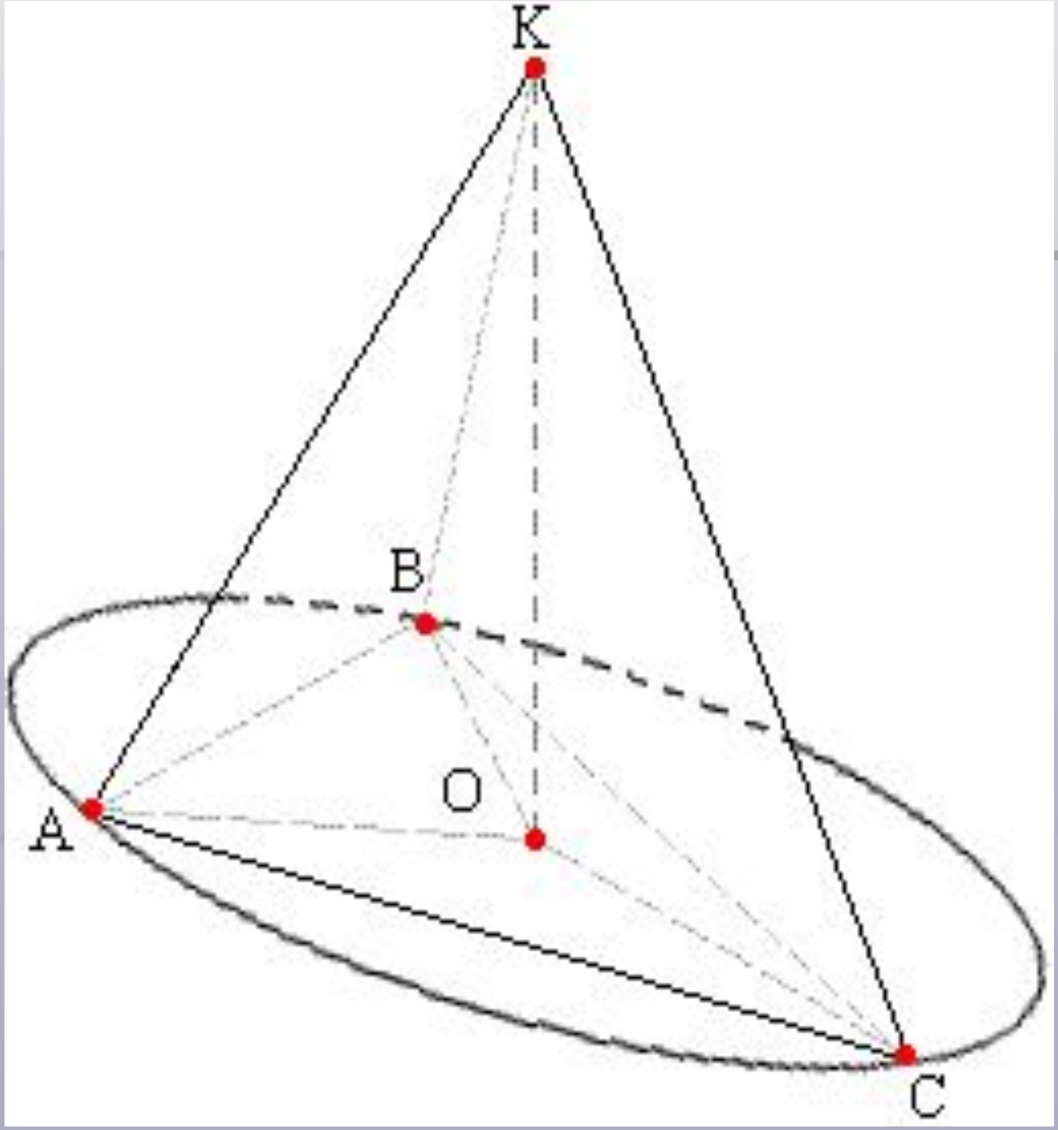
- **апофема** — высота боковой грани правильной пирамиды [3];
- **боковые грани** — треугольники, сходящиеся в вершине пирамиды;
- **боковые ребра** — общие стороны боковых граней;
- **вершина пирамиды** — точка, соединяющая боковые рёбра и не лежащая в плоскости основания;
- **высота** — отрезок перпендикуляра, проведённого через вершину пирамиды к плоскости её основания (концами этого отрезка являются вершина пирамиды и основание перпендикуляра);
- **диагональное сечение пирамиды** — сечение пирамиды, проходящее через вершину и диагональ основания;
- **основание** — многоугольник, которому не принадлежит вершина пирамиды



A – вершина пирамиды;
AB, AC, AD, AE – ребра пирамиды;
ADE, AEB, ABC, ACD – боковые грани пирамиды;
BCDE – основание пирамиды;
AG – высота;
AF – апофема;
AEC – диагональное сечение.

Свойства пирамиды

- Все диагонали пирамиды принадлежат её граням.
- **Если все боковые ребра равны**, то:
- около основания пирамиды можно описать окружность, причём вершина пирамиды проецируется в её центр;
- боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы.
- **Если боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом**, то:
- в основание пирамиды можно вписать окружность, причём вершина пирамиды проецируется в её центр;
- высоты боковых граней равны;
- площадьплощадь боковой поверхности равна половине произведения периметраплощадь боковой поверхности равна половине произведения периметра основания на высоту боковой грани


K
B
O
A
C

Развертка пирамиды

Развёрткой многогранной поверхности называется плоская фигура, получаемая последовательным совмещением всех граней поверхности с плоскостью.

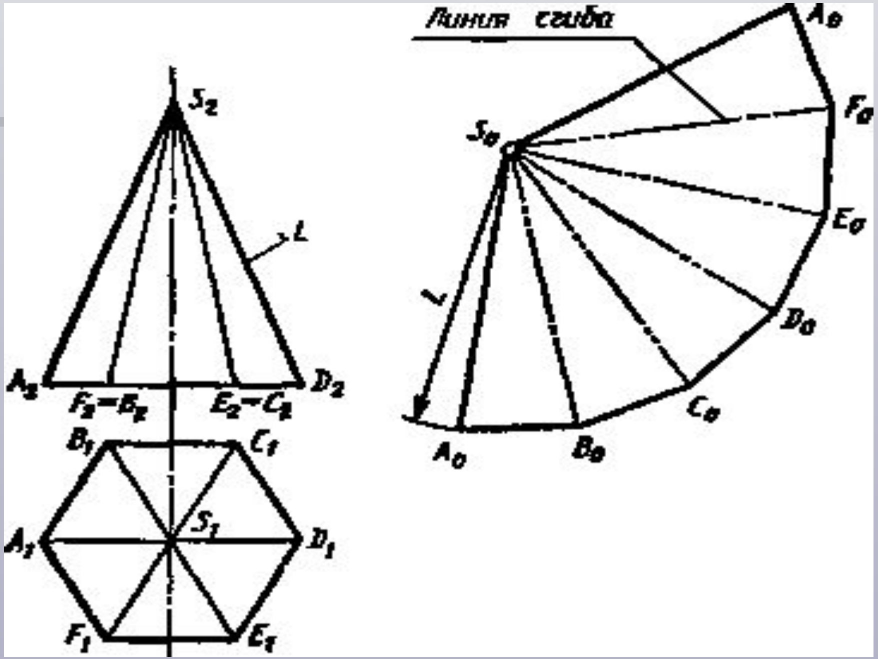
Так как все грани многогранной поверхности изображаются на развёртке в натуральную величину, построение её сводится к определению величины отдельных граней поверхности — плоских многоугольников.

Существует три способа построения развёртки многогранных поверхностей:

Способ нормального сечения;

Способ раскатки;

Способ треугольника.



При построении развёртки пирамида применяется способ треугольника. Развёртка боковой поверхности пирамиды представляет собой плоскую фигуру, состоящую из треугольников — граней пирамиды и многоугольника — основания. Поэтому построение развёртки пирамиды сводится к определению натуральной величины основания и граней пирамиды. Грани пирамиды можно построить по трём сторонам треугольников, их образующих. Для этого необходимо знать натуральную величину рёбер и сторон основания. Определение истинной величины основания и рёбер пирамиды

Алгоритм построения

Определяют натуральную величину основания пирамиды (например методом замены плоскостей проекций);

Определяют истинную величину всех рёбер пирамиды любым из известных способов (в данном примере натуральная величина всех рёбер пирамиды определена методом вращения вокруг оси перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций и проходящей через вершину пирамиды S);

Строят основание пирамиды и по найденным трём сторонам строят какую-либо из боковых граней, пристраивая к ней следующие.

Точки, расположенные внутри контура развёртки, находят во взаимно однозначном соответствии с точками поверхности многогранника. Но каждой точке тех рёбер, по которым многогранник разрезан, на развёртке соответствуют две точки, принадлежащие контуру развёрт

ТЕОРЕМЫ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ ПИРАМИДУ С ДРУГИМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ТЕЛАМИ

Сфера

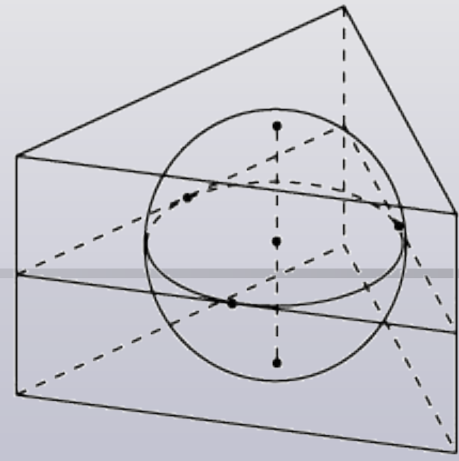


Рис. 25

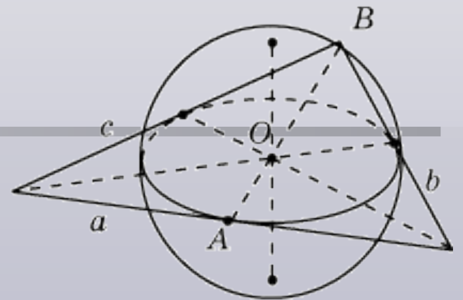
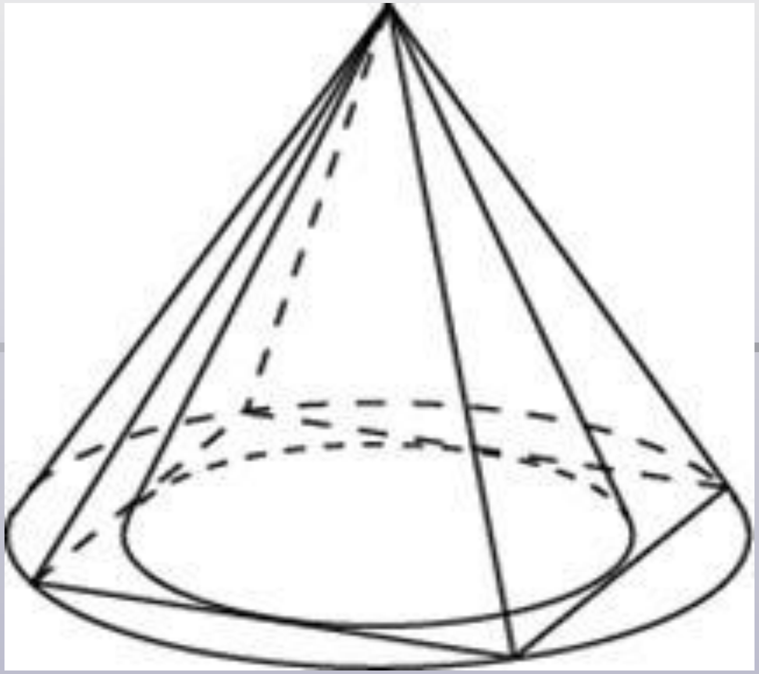


Рис. 26

около пирамиды можно описать сферу тогда, когда в основании пирамиды лежит вписанный многоугольник (необходимое и достаточное условие). Центром сферы будет точка пересечения плоскостей, проходящих через середины рёбер пирамиды перпендикулярно им. Как следствие из этой теоремы следует, что как около любой треугольной, так и около любой правильной пирамиды можно описать сферу;

в пирамиду можно вписать сферу тогда, когда биссекторные плоскостив пирамиду можно вписать сферу тогда, когда биссекторные плоскости внутренних двугранных угловв пирамиду можно вписать сферу тогда, когда биссекторные плоскости внутренних двугранных углов пирамиды пересекаются в одной точке (необходимое и достаточное условие). Эта точка будет центром сферы.

Конус

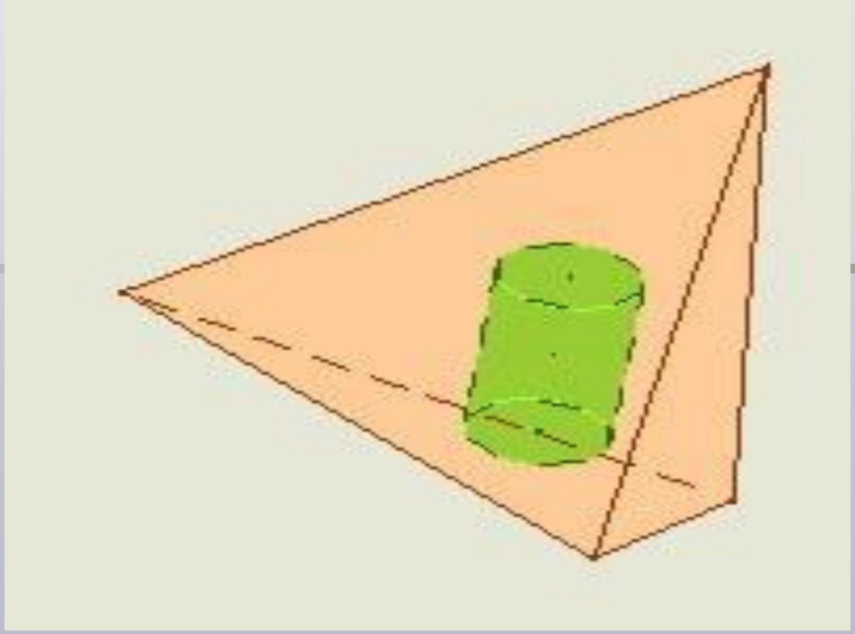


Конус называется вписанным в пирамиду, если вершины их совпадают, а его основание вписано в основание пирамиды. Причём вписать конус в пирамиду можно только тогда, когда апофемы пирамиды равны между собой (необходимое и достаточное условие);

Конус называется описанным около пирамиды, когда их вершины совпадают, а его основание описано около основания пирамиды. Причём описать конус около пирамиды можно только тогда, когда все боковые ребра пирамиды равны между собой (необходимое и достаточное условие);

Высоты у таких конусов и пирамид равны между собой.

Цилиндр



Цилиндр называется вписанным в пирамиду, если вершина пирамиды принадлежит его одному основанию, а другое его основание совпадает с окружностью вписанной в сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Причём вписать цилиндр в пирамиду можно только тогда, когда в основании пирамиды — описанный многоугольник (необходимое и достаточное условие);

Цилиндр называется описанным около пирамиды, если вершина пирамиды принадлежит его одному основанию, а другое его основание описано около основания цилиндра. Причём описать цилиндр около пирамиды можно только тогда, когда в основании пирамиды — вписанный многоугольник (необходимое и достаточное условие).

Формулы, связанные с пирамидой

Объём пирамиды может быть вычислен по формуле:

где S — площадь основания и h — высота; Боковая поверхность — это сумма площадей боковых граней:

Полная поверхность — это сумма боковой поверхности и площади основания:

$S_p = S_b + S_o$ Для нахождения боковой поверхности в правильной пирамиде можно использовать формулы:

где a — апофемагде a — апофема боковой грани, P — периметр основания, n — число сторон основания, b — боковое ребро, α — плоский угол при вершине пирамиды

Особые случаи пирамиды

Правильная пирамида

Пирамида называется правильной, если основанием её является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания. Тогда она обладает такими свойствами:

боковые ребра правильной пирамиды равны;

в правильной пирамиде все боковые грани — равные равнобедренные треугольники;

в любую правильную пирамиду можно как вписать, так и описать около неё сферу;

если центры вписанной и описанной сферы совпадают, то сумма плоских углов при вершине пирамиды равна π, а каждый из них соответственно , где n — количество сторон многоугольника основания[6];

площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

Пирамида правильная (рис. 8)

a — апофема;
h — высота;
p — периметр основания;
V — объем;
S — площадь основания;
$S_{бок}$ — боковая поверхность.

$$V = \frac{Sh}{3};$$

$$S_{бок} = \frac{1}{2} pa.$$

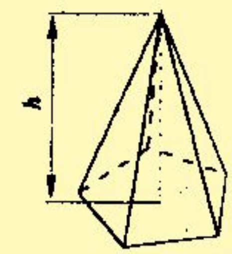
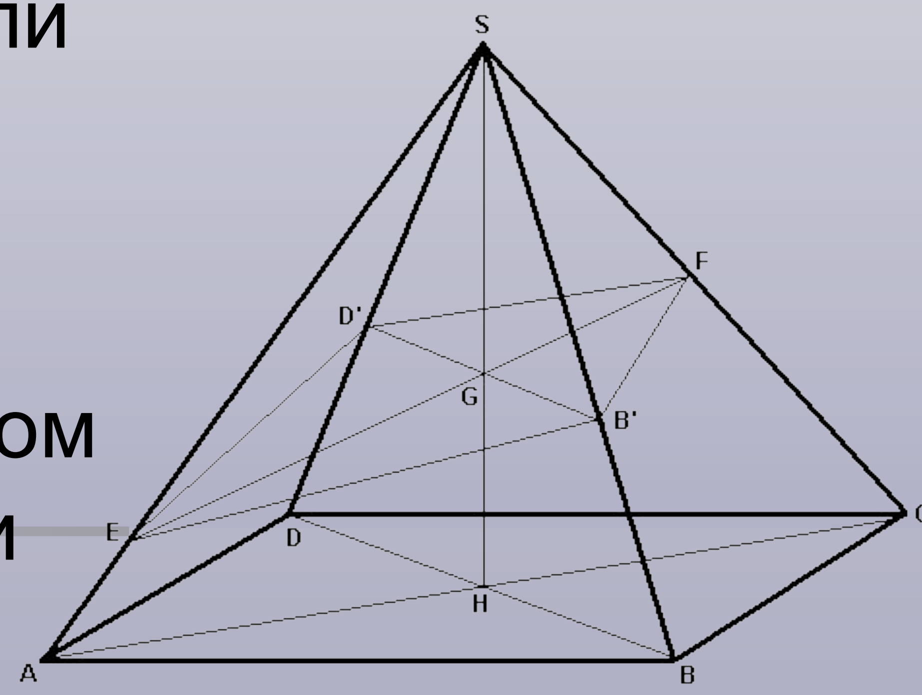


Рис. 8.

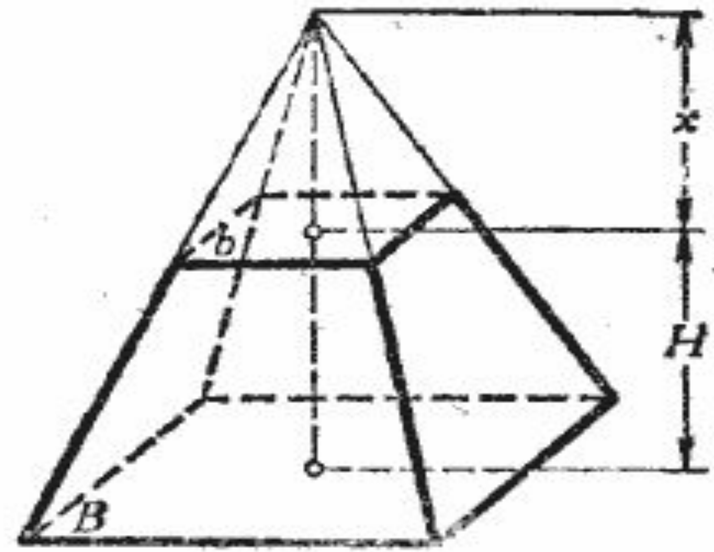
Прямоугольная пирамида

Пирамида называется прямоугольной, если одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно основанию. В данном случае, это ребро и является высотой пирамиды.



Усечённая пирамида

Усечённой пирамидой называется многогранник, заключённый между пирамидой и секущей плоскостью, параллельной её основанию.



Черт. 104.

Связанные определения

ТетраэдромТетраэдром называется треугольная пирамида. В тетраэдре любая из граней может быть принята за основание пирамиды. Кроме того, существуют большое различие в понятиях правильная треугольная пирамида и правильный тетраэдр.

Интересные факты

Интересные факты

Формула для расчёта объёма усечённой пирамиды была выведена раньше чем для полной.