



# Вывод формулы Герона

геометрия 8 класс

---

# Формула Герона

---

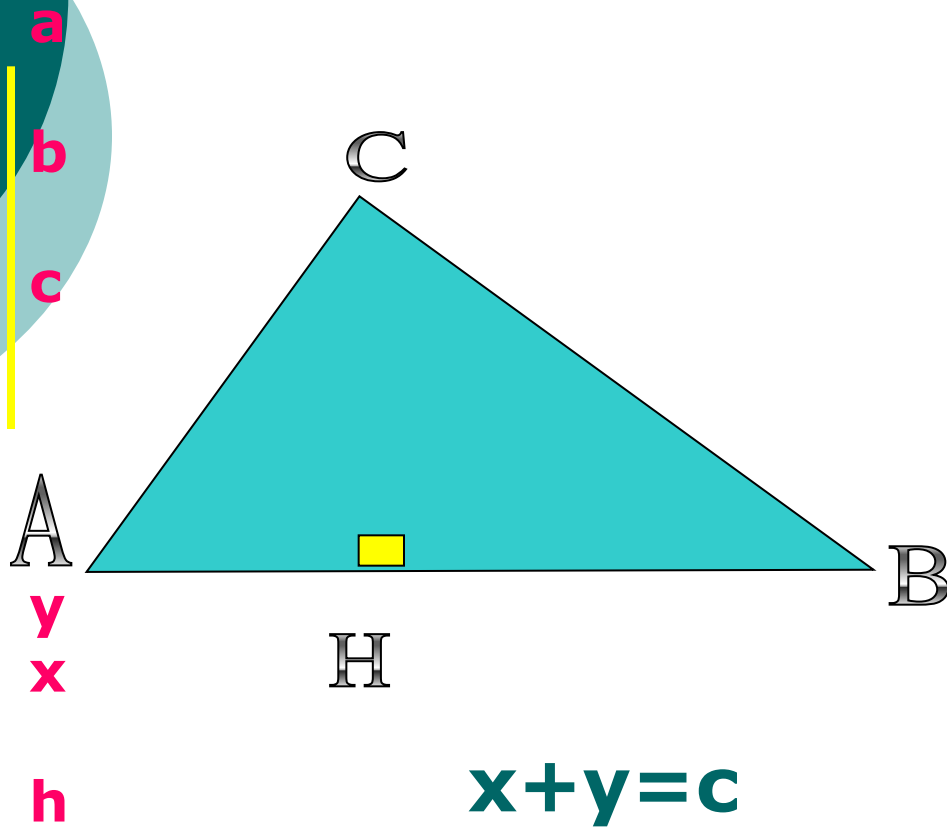
Площадь треугольника со сторонами  $a, b, c$  выражается формулой

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

где  $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$  **полупериметр треугольника**

# Доказательство:

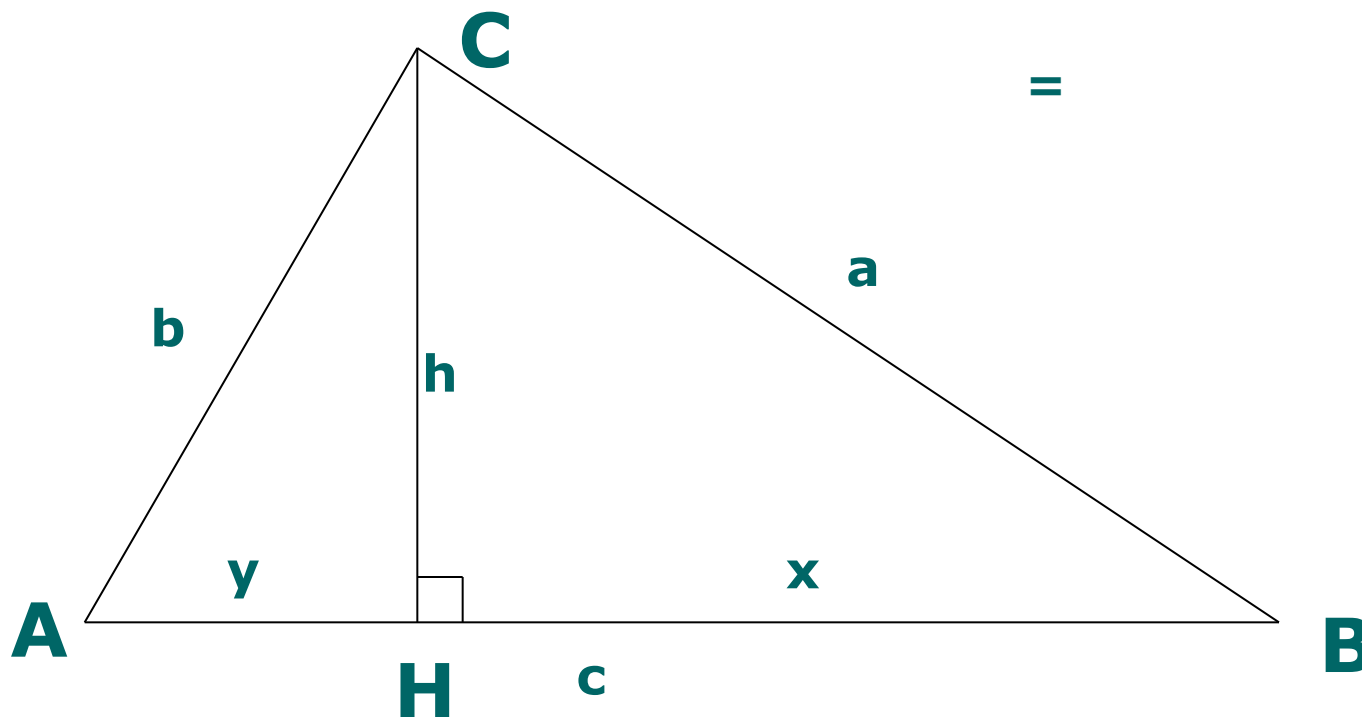
---



## Треугольники АСН и ВСН – прямоугольные

---

По теореме Пифагора  
в треугольнике ВСН :  $h^2 = a^2 - x^2$   
в треугольнике АСН :  $h^2 = b^2 - y^2$



## Преобразуем получившееся равенство

---

$$a^2 - x^2 = b^2 - y^2, \quad y^2 - x^2 = b^2 - a^2$$

$$(y-x)(y+x) = b^2 - a^2, \quad \text{но } y+x=c$$

$$(y-x)c = b^2 - a^2$$

$$y-x = \frac{1}{c} (b^2 - a^2)$$

$$y+x=c$$

$$\left. \begin{array}{l} y-x = \frac{1}{c} (b^2 - a^2) \\ y+x=c \end{array} \right\} +, \text{ получим } 2y = c + \frac{1}{c} (b^2 - a^2)$$

Раскрыв скобки и сложив слагаемые в правой части, получим

$$2y = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{c}, \quad y = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

$$a^2 - x^2 = b^2 - y^2 = h^2$$


---

$$h^2 = b^2 - y^2 = (b - y)(b + y) =$$

**HO**

$$y = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

$$= \left( b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right) \left( b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \right) =$$

$$= \frac{2bc - (b^2 + c^2 - a^2)}{2c} \cdot \frac{2bc + (b^2 + c^2 - a^2)}{2c} =$$

$$= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c} \cdot \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c} =$$

$$= \frac{-(-2bc + b^2 + c^2) + a^2}{2c} \cdot \frac{(2bc + b^2 + c^2) - a^2}{2c} =$$

$$= \frac{a^2 - (b - c)^2}{2c} \cdot \frac{(b - c)^2 - a^2}{2c} =$$

$$= \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2c} \cdot \frac{(b + c - a)(b + c + a)}{2c}$$

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$2p = a + b + c$$

$$2p - a = b + c$$

$$2p - b = a + c$$

$$2p - c = a + b$$

## Продолжим преобразование

---

$$\begin{aligned} & \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2c} \cdot \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2c} = \\ & = \frac{(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4c^2} = \\ & = \frac{(2p-b-b)(2p-c-c)(2p-a-a)2p}{4c^2} = \\ & = \frac{(2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)2p}{4c^2} = \\ & = \frac{4p(p-b)(p-c)(p-a)}{c^2} \end{aligned}$$



Итак, 
$$h^2 = \frac{4p(p-b)(p-c)(p-a)}{c^2}$$

---

$$h = \sqrt{\frac{4p(p-b)(p-c)(p-a)}{c^2}}$$

$$h = \frac{2\sqrt{p(p-b)(p-c)(p-a)}}{c}$$

$$S = \frac{1}{2}hc = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{p(p-b)(p-c)(p-a)}}{c} \cdot c$$

$$S = \sqrt{p(p-b)(p-c)(p-a)}$$



---

**теорема доказана!**