

Геометрические фигуры и их свойства в школьном курсе математики

**ТМОМ
Методика изучения
основных разделов предметного
содержания школьного курса
математики
Тема 5**

План

1. Роль геометрии в обучении
2. Методическая схема изучения геометрической фигуры и ее свойств
3. Методические особенности первых уроков геометрии 7 класса
4. Технология обучения доказательствам
5. Технология обучения решению геометрических задач

Цели изучения математики

1. Овладение системой математических знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности. Изучения смежных дисциплин, продолжения образования;
2. Интеллектуальное развитие, формирование качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе, таких как: ясность и точность мысли, критичность мышления, способность преодолевать трудности, а также развитие алгоритмической культуры и пространственных представлений;

Цели изучения математики

3. Формирование представлений об идеях и методах математики как универсального языка науки и техники, средства моделирования явлений и процессов;
4. Воспитание математической культуры, отношения к математике как части общечеловеческой культуры, понимания значимости математики для научно-технического прогресса.

«Все вокруг геометрия!»

(Ле Карбюзье)

Значимость геометрических знаний

- Геометрические знания и умения, геометрическая культура **значимы для многих современных специальностей** (конструкторы, дизайнеры и т.п.), т.е. значимы для достижения *1, 3, 4* компонентов цели обучения.
- Геометрия – **мощное средство развития личности** в широком диапазоне, поскольку развивает такие качества как
 - творчество,
 - независимость суждений и поведения

Опасные тенденции

- Сужение пространства учебных целей курса геометрии;
- Сокращение содержания программ по геометрии;
- Обывательская позиция «моя хата с краю» значительной части учительства по отношению к геометрии

В итоге – **разрушение сложившейся в прошлом системы математического образования**

Возможности дифференциации обучения детей с разным уровнем развития и разными способностями с помощью геометрии

С 1 по 6 класс

- геометрия по сути является «интеллектуальной физкультурой»;
- включаться в занятие геометрией можно в любой момент;
- геометрические интерпретации позволяют лучше понять, запомнить и сделать наглядным арифметический материал.

Возможности индивидуализации обучения детей с разными психо-физиологическими особенностями с помощью геометрии

- Традиционные методики часто перегружают левое полушарие мозга, что очень опасно для детей с преобладающим правополушарным типом мышления
- Геометрические возможности детей младшего возраста не зависят от уровня их математической подготовки
- Занятия геометрией развивает воображение и повышает творческий потенциал.

Возможности создания условий для развития познавательного интереса учащихся с помощью геометрии

С 7 класса

- Требование «систематичности» вступает в противоречие с задачей формирования заинтересованности, возникает опасность «отбить интерес»
- Геометрия имеет хорошие «инструменты» для создания заинтересованности:
 - красивая картинка,
 - хорошая задача,
 - живой язык общения, опора на интуицию

Возможности создания условий для эмоционального развития учащихся с помощью геометрии

- Эмоциональное развитие – основа интеллектуального развития, т.к. интеллектуальное удовлетворение является мощным мотивационным стимулом
- Эмоционально заинтересовывать школьников геометрией можно практически до окончания школы

Возможности обеспечения полноценного математического образования с помощью геометрии в условиях профилизации обучения

В *10 -11* классах

- Занятия геометрией на основе принципа наглядности дает возможность предоставить полноценное математическое образование учащимся с гуманитарными склонностями
- В геометрии расстояние между наукой и школьной математикой наименьшее, что позволяет обеспечить высокий уровень подготовки математически одаренным детям, дает им возможность заниматься научными исследованиями со школьной скамьи

Подводя итог сказанному...

- Для нормального развития ребенку нужно полноценное питание
- Для нормального интеллектуального развития необходима разнообразная интеллектуальная пища
- Геометрия – один из немногих «экологически чистых» и полноценных продуктов, потребляемых в системе образования
- Геометрия – учебный предмет, который может сбалансировать работу головного мозга
- Геометрия – это витамин для мозга

Подводя итог сказанному...

- Чтобы витамины не утратили свои питательные качества, они должны использоваться умелыми кулинарами

**Стать такими «кулинарами» -
ваша задача!**

Общие цели изучения геометрических фигур в школьном курсе математики

- Систематическое изучение свойств плоских и пространственных геометрических фигур, методов их изучения и применения для решения практических и прикладных задач;
- Развитие познавательных процессов
 - восприятия,
 - представления,
 - воображения,
 - мышления,
 - внимания,
 - памяти,
 - речи,
 - умения учиться;

Общие цели изучения геометрических фигур в школьном курсе математики

- Формирование и развитие интереса к математической деятельности;
- Формирование элементов творческой деятельности и конструктивных умений;
- Формирование элементов научного мировоззрения:
 - Развитие и совершенствование математического аппарата под влиянием практики,
 - Влияние развития науки на практику;
- Развитие чувства прекрасного;
- Воспитание культуры общения, активности,

Технологическая цепочка изучения геометрической фигуры

1. Подготовительный этап – рассмотрение объектов. Имеющих форму данной фигуры, вычерчивание. Моделирование. Конструирование. Выявление характеристических свойств;
2. Описание, введение термина и формулирование определения понятия фигуры, выделение ближайшего рода и видовых отличий;
3. Изображение фигуры на основе определения, распознавание на моделях,

Технологическая цепочка изучения геометрической фигуры

4. Решение задач на усвоение определения
 - Через подведение под понятие,
 - Через приведение примеров и контрпримеров;
5. Составление родословной и классификации понятий;
6. Решение задач с использованием определения и классификации;
7. Текущий контроль и коррекция знаний и умений;

Технологическая цепочка изучения геометрической фигуры

8. Выявление свойств и признаков фигуры, не указанных в определении путем наблюдения, построения, измерения;
9. Формулировка утверждения, основанного на догадке (гипотезе)
10. Краткая запись и доказательство признаков или свойств
11. Рассмотрение частных случаев (свойств);
12. Решение задач на усвоение каждой теоремы и ее следствий;

Технологическая цепочка изучения геометрической фигуры

13. Решение математических и прикладных задач с применением всех свойств и признаков фигуры (т.е. на применение определения и всех изученных теорем);
14. Текущий контроль и коррекция знаний и умений;
15. Анализ, обобщение и систематизация изученного, выделение главного;
16. Итоговый контроль усвоения, определение уровня овладения материалом.

Уровни овладения и усвоения материала

Наглядно-практический

- информация добывается из опыта,
- главный результат усвоения:
 - ✓ наглядно-оперативное знание предмета (без заучивания формулировки),
 - ✓ умение правильно оперировать материалом.

Логико-теоретический

- полное логическое обоснование изученному материалу,
- главный результат усвоения:
 - ✓ владение доказательством большинства теорем,
 - ✓ установление логических связей между понятиями
 - ✓ Умение правильно оперировать материалом.

Основная причина трудностей первых уроков геометрии в 7 классе

- В пропедевтическом курсе геометрии ведущую роль играют **практические, наглядные и индуктивные** методы обучения;
- В систематическом курсе геометрии, при сохранении практических, наглядных и индуктивных методов, осуществляется постепенный переход к преобладанию **дедуктивных методов** обучения

Особенности первых уроков геометрии

- При систематизации сведений о геометрических фигурах, накопленных в пропедевтическом курсе математики, подчеркивается и закрепляется в сознании учащихся абстрактный характер понятия «геометрическая фигура»;
- Накопленный учащимися запас сведений о геометрических фигурах для формирования понятия конкретных геометрических фигур используется в форме «подводящих» задач, чаще всего, практического характера;

Особенности первых уроков геометрии

- «Подводящими» задачами чаще всего являются задачи:
 - на построение объектов с заданными свойствами;
 - на измерение длин сторон, величин углов фигуры;
 - на вычисление длин сторон или углов фигуры;
 - на конструирование и моделирование (разрезание, складывание, перегибание и т.п.)
- Выделяются основные неопределяемые, а только описываемые и наблюдаемые

Особенности первых уроков геометрии

- Разъясняется, что всем другим фигурам в геометрии даются определения, как правило, через указание рода и видовых отличий или через способ их построения;
- Свойства всех геометрических фигур, кроме неопределяемых, тоже не только рассматриваются непосредственно, но обязательно выводятся или обосновываются с помощью рассуждений с опорой на свойства известных уже фигур.

Особенности первых уроков геометрии

Таким образом, к концу «первых уроков» геометрии:

- учащиеся постепенно подводятся к пониманию логического строения геометрии;
- вводится и предполагается усвоение учащимися таких понятий как «определение», «аксиома», «теорема»;
- усвоенные понятия являются основой для изучения дедуктивным методом свойств всех остальных геометрических фигур.

Некоторые рекомендации к первым урокам геометрии

- Свойства простейших геометрических фигур целесообразно изучать через организацию лабораторных и практических работ, т.к. важно дать возможность учащимся строить геометрические объекты своими руками, конструировать их свойства.
- Задачи на первые уроки подбираются так, чтобы процесс ее решения содержит все элементы триады: «увидел, понял, доказал»
- Для предотвращения формализма сократить число формулировок для обязательного заучивания

Некоторые рекомендации к первым урокам геометрии

- Не спрашивать на отметку формулировок и доказательств до тех пор, пока учащиеся не привыкнут к терминам «определение», «теорема», «доказательство» и не поймут их смысл;
- Доказательства целесообразно рассматривать фронтально (или в парах) по готовым чертежам или с использованием заданий с пропусками (есть в печатных рабочих тетрадях)
- Доказательства у доски спрашивать только по желанию и если есть уверенность, что ответ будет близким к образцу;

Некоторые рекомендации к первым урокам геометрии

- При доказательстве теорем учителем очень важно раскрывать состав действия доказательства:
 - анализировать условия,
 - выводить из него следствия,
 - выявлять условия, при которых возможно заключения (достаточные условия),
 - обосновывать правомерность выводов;
- Проверку овладения первичными навыками доказательства целесообразно проводить в форме зачета по темам «Равенство треугольников» и «Параллельность прямых» или вообще в конце года

Основы технологии обучения доказательствам

- Проблема обучению доказательствам – одна из центральных в теории и методике обучения математике
- Как в теории, так и в практике традиционного обучения доказательствам преобладает логический подход
- Основу современного подхода к решению проблемы обучения доказательствам составляет единство логики и эвристики
- В последнее время все чаще акцентируется внимание и на эвристической составляющей обучения доказательствам

Основные положения современной концепции методик обучения доказательствам

1. Обучение доказательству есть обучение
 - анализу доказательства,
 - его воспроизведению,
 - самостоятельному открытию фактов,
 - поиску и конструированию доказательств,
 - опровержению готовых доказательств.
2. Важное условие результативности обучения доказательствам – единство логики и эвристики.
3. Обучение доказательствам - деятельность, имеющая специфическое строение, условия и формы существования.

Основные положения современной концепции методик обучения доказательствам

4. Обучение доказательствам требует целенаправленного формирования всех составляющих действий:
 - вычленение в формулировках теорем или задач их объектов, условий, заключений и запись их в краткой форме;
 - выбор системы признаков, необходимых и достаточных для подведения под понятия и соответствующих условиям теоремы или задачи;
 - развертывание условий (т.е. выведение из них следствий);
 - построение умозаключений таким образом, чтобы вывод любого из них использовался бы в качестве посылки в одном или нескольких последующих;

• под названием логическими приемами

Основные положения современной концепции методик обучения доказательствам

5. Развитие доказательного мышления проходит две стадии:
 - в подростковом возрасте скорее усваиваются готовые доказательства, чем их использование или создание,
 - в юношеском возрасте более заметно выступает критическое отношение к готовым доказательствами стремление к собственным доказательствам.
6. Процесс доказательства формируется постепенно: от простых к более сложным структурам, поэтому и уровень строгости учебных доказательств тоже должен

Иерархия обучения доказательствам

| | Обучение доказательствам | |
|-----------------|--|---|
| | Обучение поиску | Обучение осуществлению |
| 5-6 класс | Формирование потребности | Формирование умения выполнять дедуктивные |
| 6-7 класс | Обучение в логических обоснованиях эвристическим приемам и их применению | Обучение выводу выполнению цепочки логических шагов |
| 7 класс | Обучение самостоятельному разбору готовых доказательств | Формирование умения выделять идею доказательства |
| 7-8 класс | Обучение использованию методов научного познания | Формирование умения самостоятельно проводить доказательство |
| 9 класс и далее | Обучение умению опровергать предложенные доказательства | |

Основы технологии обучения доказательствам

Сложное **логическое умение** вести доказательство утверждений (в теоремах или задачах на доказательство) целесообразно разделить на составляющие:

- Поиск доказательства;
- Проведение доказательства

Основы технологии обучения доказательствам

Поиск доказательства включает умения :

- анализировать условие теоремы (задачи),
- выводить следствия из условия,
- выявлять достаточные условия для заключения,
- высказывать правдоподобные

Проведение доказательства включает умения:

- выполнять последовательность умозаключений (рассуждений),
- обосновывать правомерность выводов

Основы технологии обучения доказательствам

- Для формирования каждого из умений необходимо раскрывать состав действий, лежащих в его основе.
- Начинать формирование целесообразно на конкретных примерах

Например,

- состав умения «находить достаточные основания» можно выявить при изучении признаков равенства треугольников.
- Необходимо каждый раз использовать словесную конструкцию «для того, чтобы доказать равенство треугольников, достаточно доказать:
 - Равенство двух сторон и углов между ними в рассматриваемых треугольниках;
 - Равенство одной стороны и двух прилежащих к ним углов в рассматриваемых треугольниках,
 - Равенство трех сторон в рассматриваемых треугольниках

Основы технологии обучения доказательствам

- Обучение умению осуществлять дедуктивные выводы целесообразно осуществлять начиная с 5-6 класса с помощью заданий, направленных на формирование
 - умения по двум данным посылкам сделать заключение с использованием различных правил вывода;
 - умения строить доказательство, состоящее из одного умозаключения;
 - умения строить доказательство, состоящее более чем из одного умозаключения

Примеры заданий на отыскание посылок и выводов

- Задания с пропусками:

1. Вертикальные углы равны

.....?

$$\angle 1 = \angle 2$$

2.?

$\angle 1$ и $\angle 2$ – вертикальные

$$\angle 1 = \angle 2$$

равны

3. Вертикальные углы

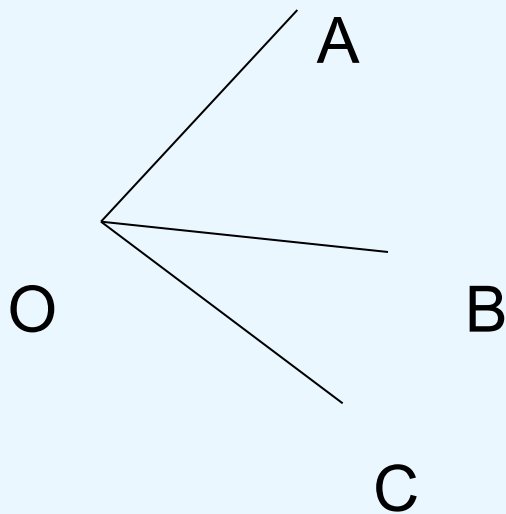
\angle \angle

 1 и 2 – вертикальные

?

Примеры заданий на отыскание ПОСЫЛОК И ВЫВОДОВ

- **Задания для построения
ВЫВОДОВ**



$$\angle AOC = 78^{\circ}$$

$$\angle BOC = 30^{\circ}$$

Сформулируйте несколько утверждений

Примеры заданий на отыскание посылок и выводов

- **Одношаговая задача:** лежат ли точки А, В и С на одной прямой,

если $AC = 5$ см, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см?

| | |
|-----------------|--|
| Большая посылка | Если точки А, В и С лежат на одной прямой, то больший из отрезков АВ, АС, ВС равен сумме двух других |
| Малая посылка | $AC \neq AB + BC$ |
| Вывод | А, В и С не лежат на одной прямой |

Примеры заданий на отыскание ПОСЫЛОК И ВЫВОДОВ

- **Двушаговая задача:** один из двух смежных углов равен 40° ,

найдите другой угол.

1 шаг: Сумма двух смежных углов равна 180°



1 и 2 - смежные

$$\begin{array}{c} \angle \\ \Rightarrow \\ \underline{\angle} \\ 1 + \angle \\ 2 = 180^{\circ} \end{array}$$

2 шаг: $\angle 1 + \angle 2 = 180^{\circ}$

$$\angle 1 = 40^{\circ}$$

$$\begin{array}{c} \Rightarrow \\ \angle \\ 2 = 140^{\circ} \end{array}$$

Основы технологии обучения доказательствам

- Начиная с 7 класса необходимо формировать в мышлении учащихся специальные ассоциации, позволяющие осуществлять продвижение в доказательствах:
 - «доказать» – выделить условие и заключение теоремы или задачи, зафиксировать их словесно и графически;
 - «доказать» – преобразовать требование теоремы (задачи) в новое, из которого старое вытекает как следствие, и т.п.

Примеры заданий, направленные на овладение умениями извлекать информацию из условий и требований

Задание 1.

На луче АВ отложен отрезок АС. При каких условиях точка С лежит между точками А и В?

Задание 2.

Даны углы АОВ и АОС . При каком условии луч ОС проходит между сторонами угла АОВ?

Задание 3.

Из вершины С равнобедренного треугольника АВС с основанием АВ отложены отрезки: CA_1 – на стороне СА и CB_1 на стороне СВ. Дополните условие так, чтобы из него следовало равенство треугольников CA_1B_1 и CB_1A_1

Методика работы с заданиями данного типа на примере задания 1

| Учитель | Ученик |
|--|---|
| Что известно? | Отрезок AC отложен на луче AB, точки B и C не совпадают |
| Что можно сказать о расположении точек A, B и C? | Либо C лежит между A и B, либо B лежит между A и C |
| А что надо установить? | Найти условие, которое вместе с данными позволит сделать вывод, что C лежит между A и B |
| Что надо знать, чтобы утверждать, что C лежит между A и B? | Отрезок AC меньше по длине отрезка AB |
| Какое же утверждение нужно включить в условие ? | $AC < AB$ |

Примеры заданий, направленные на овладение действием выведения следствий из данных условий

Задание 4.

Точка X принадлежит отрезку AB и не совпадает с его концами. Что следует из этого?

Задание 5.

Известно, что сумма двух вертикальных углов равна 180 градусам. Какие выводы можно сделать из этого?

Задание 6.

Треугольники ABC и ABC_1 равнобедренные с общим основанием AB . Что отсюда следует?

Методика работы с заданиями данного типа на примере задания 4

- Акцентируется внимание на выводимых следствиях и основаниях для полученных выводах:
 1. X лежит между A и B (по определению отрезка);
 2. $AX + XB = AB$ (по свойству измерения отрезков);
 3. $AX < AB$, $BX < AB$ (по свойству величин)
- В случае необходимости следует прибегнуть к развертке получения следствий, например, для следствия 2:
 - ✓ Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой; \implies
 - ~~✓ X разбивает отрезок AB на части AX и XB~~
 $AX + XB = AB$

Основы технологии обучения доказательствам

- При обучении доказательствам предметом специального формирования должен быть прием переформулировки заключения теоремы (требования задачи).
- Использование этого приема предполагает владение
 - навыками анализа ситуации,
 - приемом выведения следствий,
 - приемом подведения объекта под понятие,

Примеры заданий, направленные на овладение приемом переформулировки требования

Задание 7.

Замените требования задачи новыми так, чтобы из них следовали первоначальные требования.

- a)* Отрезки AB и CD пересекаются в точке O . Докажите, что если отрезки AC , CB , BD и AD равны, то прямые AB и CD перпендикулярны.
- b)* Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.
- c)* Докажите, что в равнобедренном треугольнике середина основания равноудалена от прямых, содержащих

Основы технологии обучения доказательствам

- Большое внимание следует уделять умению читать геометрические чертежи.
- Умение читать чертеж – сложное умение, включающее такие действия:
 - Простое вычленение фигур;
 - Сопоставимое вычленение фигур;
 - Распознавание фигур;
 - Переосмысление элементов чертежа с точки зрения другого понятия;
 - Сравнение фигур;
 - Изменение взаимного расположения образов;
 - Изменение структуры образов

Примеры заданий, направленные на овладение умением читать чертеж

Задание 8.

Запишите множество изображенных на рисунке 1 а) отрезков; б) лучей, в) прямых.

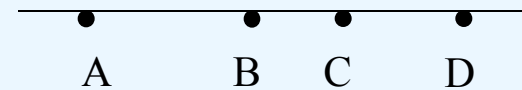


Рис.1

Задание 9.

Сколько изображено на рисунке 2 треугольников и сколько четырехугольников?

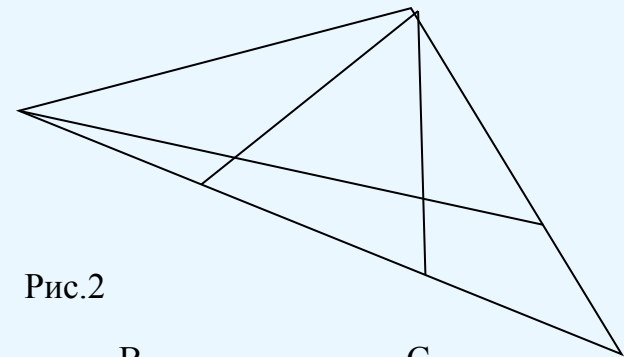


Рис.2

Задание 10.

Элементами каких фигур является отрезок AN на рисунке 3?

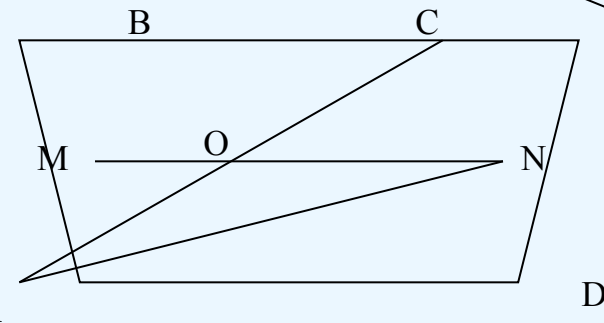


Рис.3

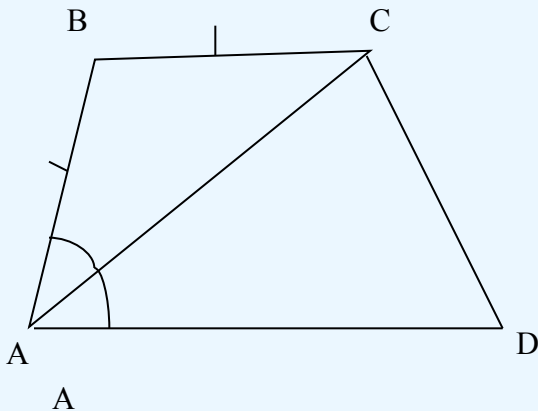
Основы технологии обучения доказательствам

- Формирование умения читать чертеж должно осуществляться в единстве с формированием умения анализировать требования и условия доказываемого утверждения.
- Эта цель хорошо достигается при систематической работе с готовыми чертежами
 - при доказательстве утверждений, условия и требования которых заданы с помощью чертежа;
 - при составлении задач по готовым

Примеры заданий по готовым чертежам

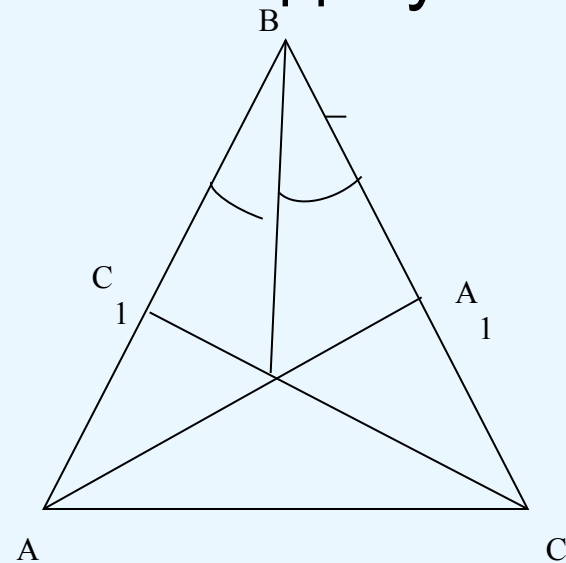
Задание 11

Используя данные рисунка, докажите, что $BC \parallel AD$



Задание 12

Используя данную конфигурацию, составьте задачу



Состав действий, необходимых при оформлении решения задачи или доказательства теоремы

- Выполните чертеж и, если необходимо, дополнительные построения;
- Опишите построенный чертеж и дополнительные построения;
- Введите все необходимые обозначения для чертежа и записи решения;
- Обоснуйте выбранные для решения свойства и зависимости;
- Следите за правильным использованием символики, приема решения, приема построения и вычислений.

Состав обобщающего анализа приема решения задачи на доказательство

Обобщая решение задачи, ответьте на вопросы:

- Относится ли решенная задача к какому-либо известному типу?
 - Если «да», то
 - Был ли вам известен прием решения задачи?
 - Использовали ли вы его?
 - Были ли трудности?
 - Допустили ли ошибки?
 - Как преодолели их?
 - Если «нет», то
 - Какой способ решения использовали?
 - Является ли он рациональным?
 - Какие теоретические знания использовали при решении?
 - Были ли трудности?
 - Как преодолели их ?

Состав обобщающего анализа приема решения задачи на доказательство (продолжение)

- Какой новый прием получили?
- В каких задачах его можно использовать в дальнейшем?
- Чему научились, решая эту задачу?

Благодарю за
внимание!