Геометрические места точек

Геометрическим местом точек (ГМТ) называется фигура, состоящая из всех точек, удовлетворяющих заданному свойству или нескольким заданным свойствам.

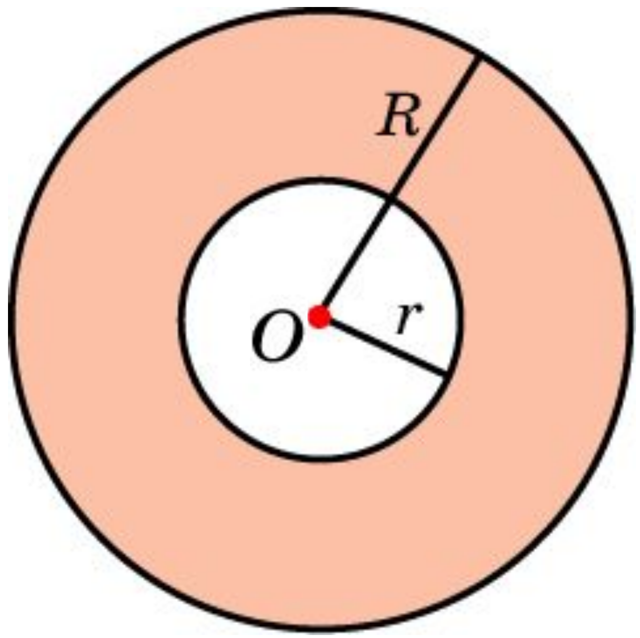
Примерами геометрических мест точек являются:

окружность – ГМТ, удаленных от данной точки на данное расстояние;
круг – ГМТ, удаленных от данной точки на расстояние, не превосходящее данное.

Упражнение 1

Пусть O – точка плоскости. Изобразите ГМТ X, для которых выполняются неравенства

$r \leq OX \leq R$.

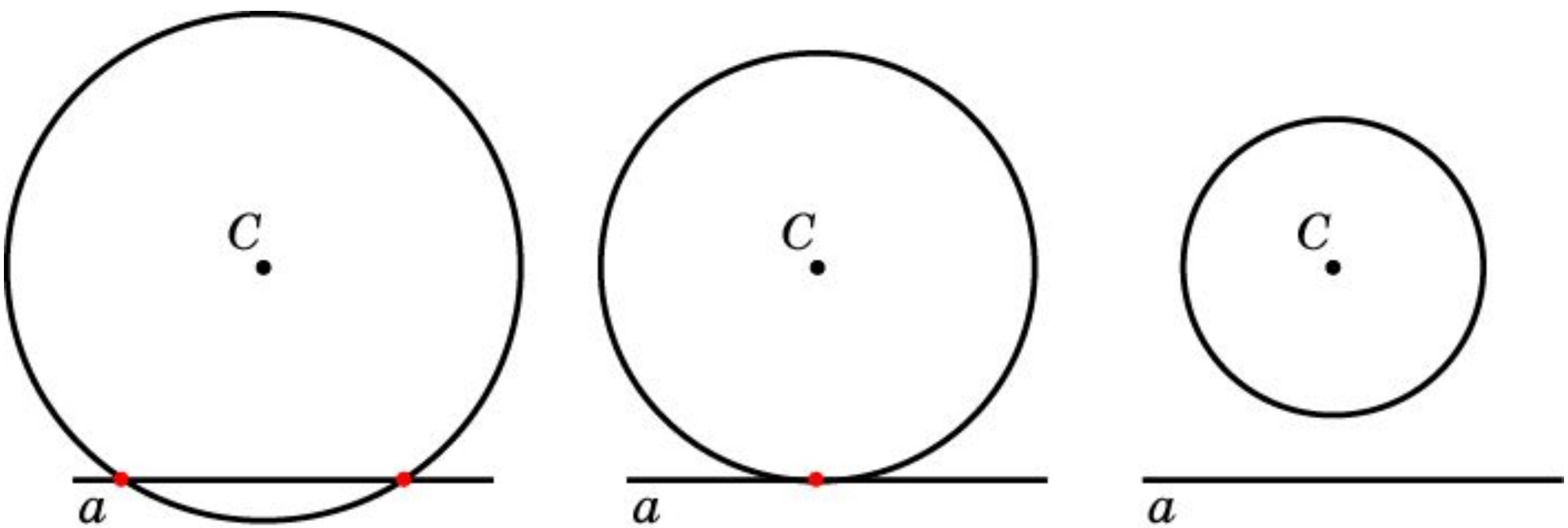


Ответ: Кольцо

Упражнение 2

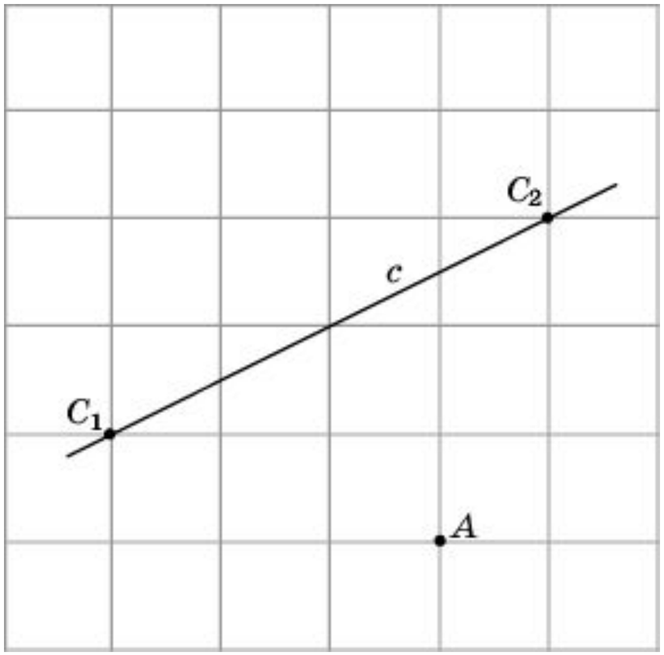
На данной прямой a найдите точки, удаленные от данной точки C на заданное расстояние R. Какие при этом возможны случаи?

Ответ: Точки пересечения прямой a и окружности с центром в точке C и радиусом R. Получаются две, одна или ни одной точки в зависимости от того, расстояние от точки C до прямой a больше R, равно R или меньше R соответственно.



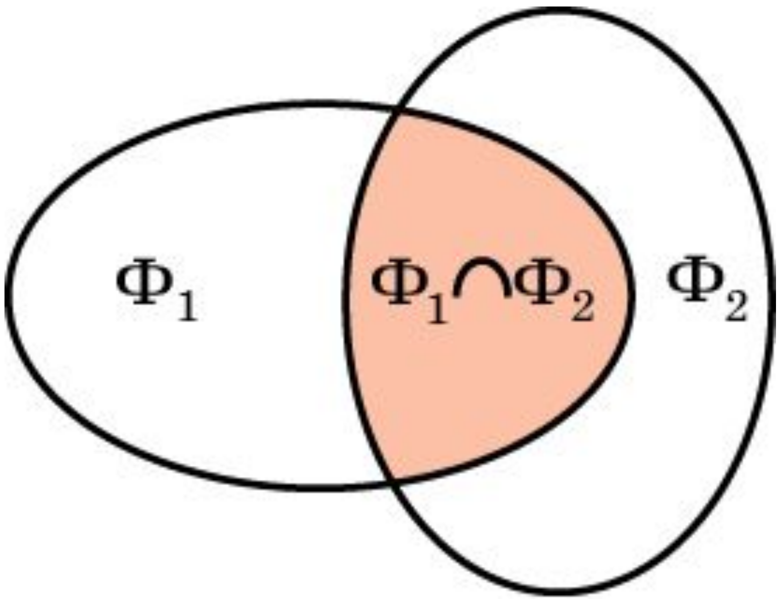
Упражнение 3

На прямой c отметьте точки, удаленные от точки A на расстояние, равное $\sqrt{10}$ (стороны квадратных клеток равны 1).



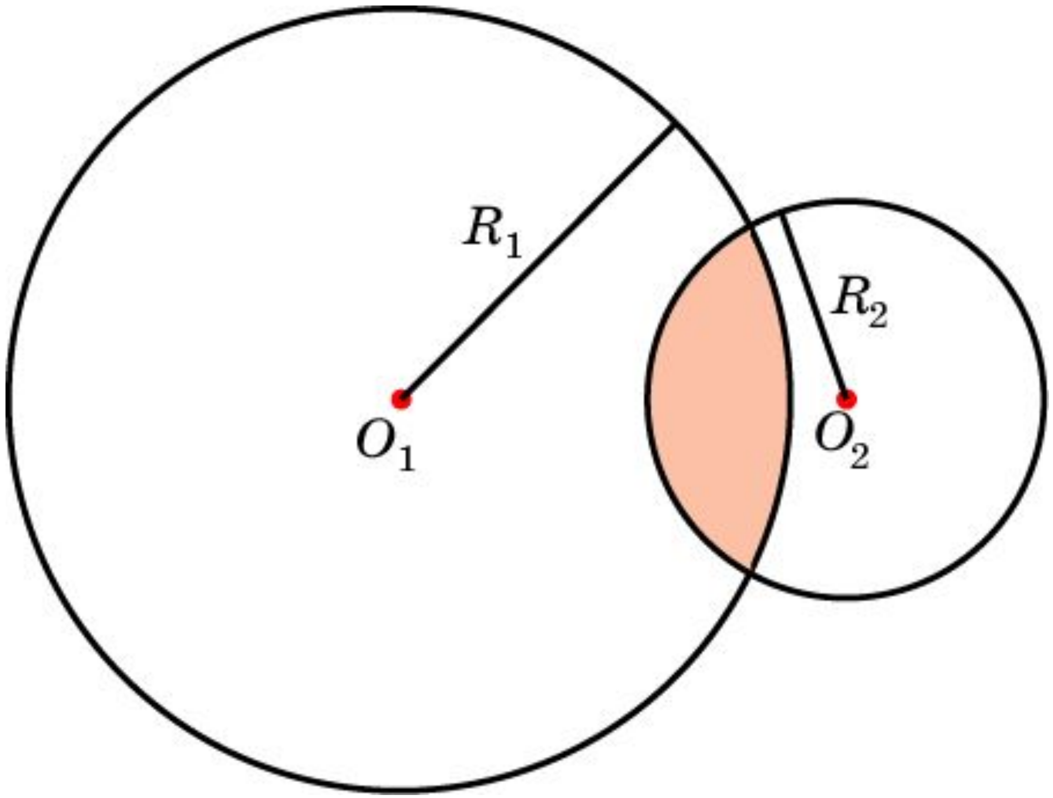
Пересечение фигур

Пусть $Ф_1$ и $Ф_2$ – фигуры на плоскости. Фигура Ф, состоящая из всех точек, принадлежащих фигуре $Ф_1$ и фигуре $Ф_2$, называется пересечением фигур $Ф_1$ и $Ф_2$ и обозначается $Ф_1 \cap Ф_2$.



Упражнение 4

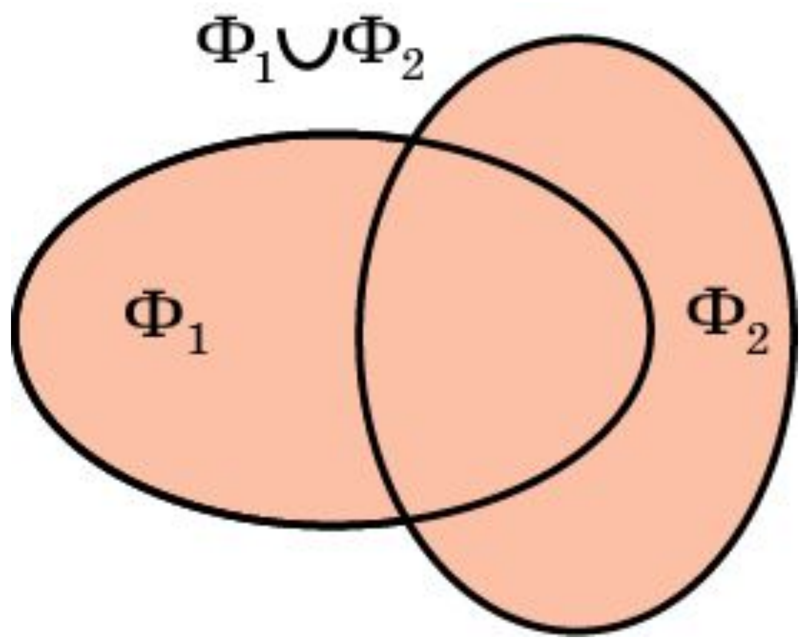
Даны две точки O_1 и O_2. Найдите ГМТ X, для которых $XO_1 \leq R_1$ и $XO_2 \leq R_2$. Пересечением каких фигур является искомое ГМТ.



Ответ: Искомое ГМТ является пересечением двух кругов с центрами в точках O_1, O_2 и радиусами R_1, R_2.

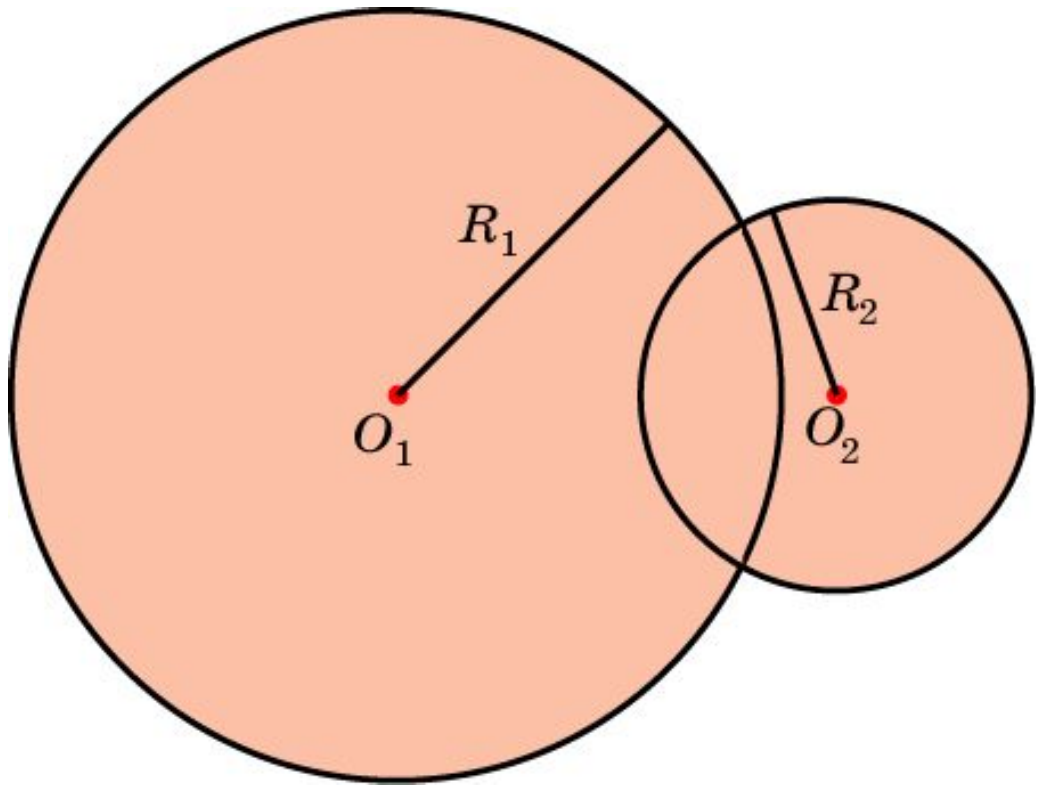
Объединение фигур

Пусть $Ф_1$ и $Ф_2$ – фигуры на плоскости. Фигура Ф, состоящая из всех точек, принадлежащих фигуре $Ф_1$ или фигуре $Ф_2$, называется объединением фигур $Ф_1$ и $Ф_2$ и обозначается $Ф_1 \cup Ф_2$.



Упражнение 5

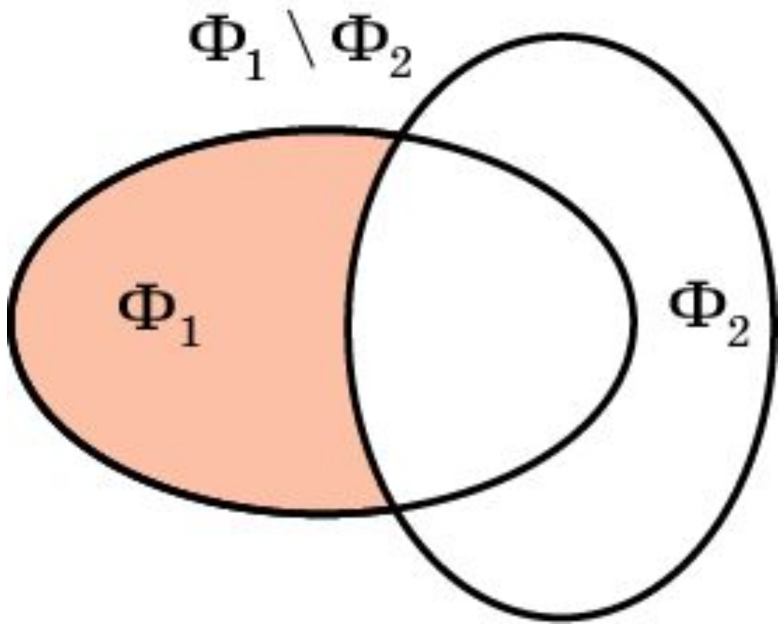
Даны две точки O_1 и O_2. Найдите ГМТ X, для которых $XO_1 \leq R_1$ или $XO_2 \leq R_2$. Объединением каких фигур является искомое ГМТ.



Ответ: Искомое ГМТ является объединением двух кругов с центрами в точках O_1, O_2 и радиусами R_1, R_2.

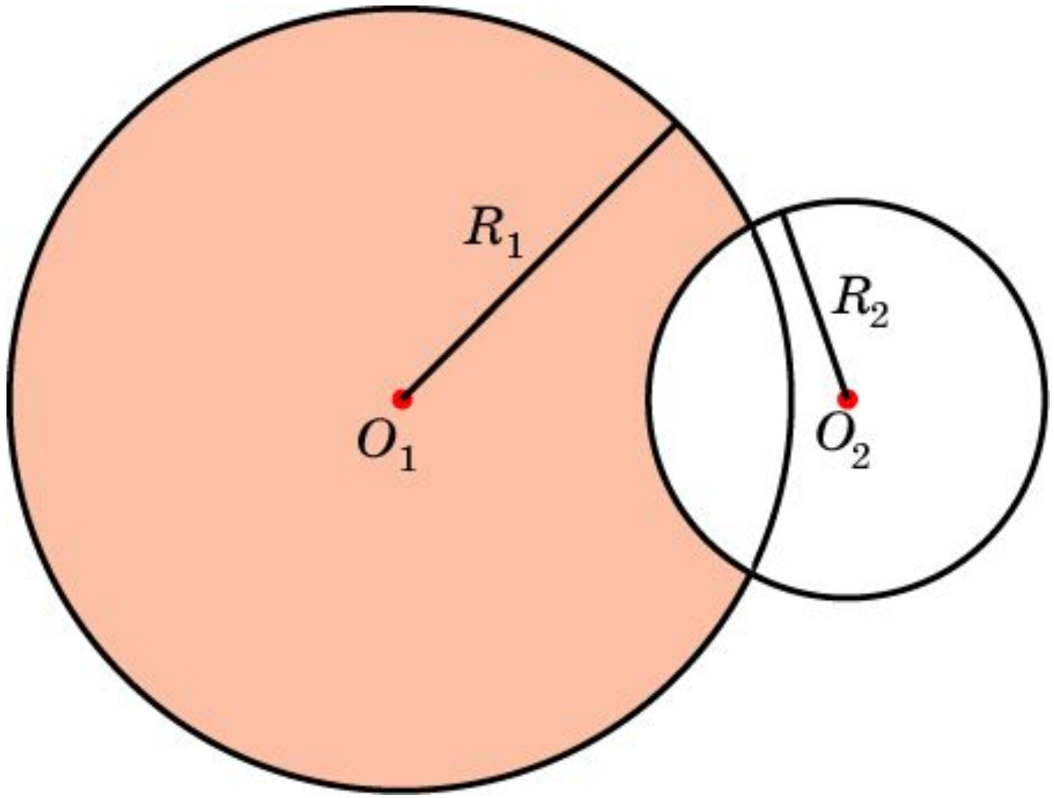
Разность фигур

Пусть $Ф_1$ и $Ф_2$ – фигуры на плоскости. Фигура Ф, состоящая из всех точек, принадлежащих фигуре $Ф_1$ и не принадлежащих фигуре $Ф_2$, называется разностью фигур $Ф_1$ и $Ф_2$ и обозначается $Ф_1 \setminus Ф_2$.



Упражнение 6

Даны две точки O_1 и O_2. Найдите ГМТ X, для которых $XO_1 \leq R_1$ и $XO_2 \geq R_2$. Разностью каких фигур является искомое ГМТ.

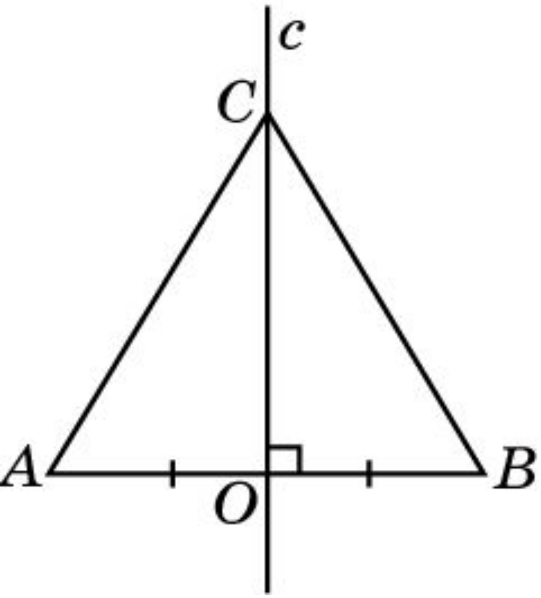


Ответ: Искомое ГМТ является разностью двух кругов с центрами в точках O_1, O_2 и радиусами R_1, R_2.

Серединный перпендикуляр

Серединным перпендикуляром к заданному отрезку называется …

прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.



Теорема. Серединный перпендикуляр к отрезку является ГМТ, одинаково удаленных от концов этого отрезка.

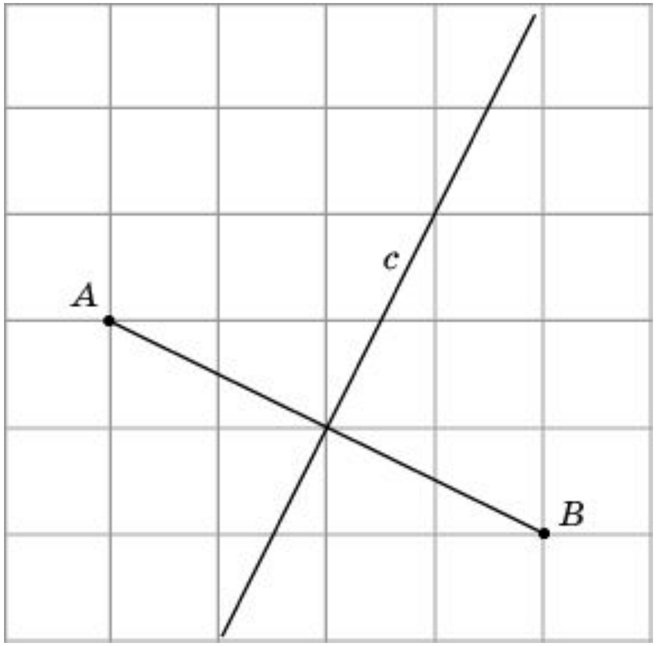
Доказательство. Пусть дан отрезок AB и точка O – его середина. Очевидно, точка O одинаково удалена от точек A, B и принадлежит серединному перпендикуляру. Пусть точка C одинаково удалена от точек A и B и не совпадает с точкой O.

Тогда треугольник ABC равнобедренный и CO – медиана. По свойству равнобедренного треугольника медиана является также и высотой. Значит, точка C принадлежит серединному перпендикуляру.

Обратно, пусть точка C принадлежит серединному перпендикуляру и не совпадает с O, тогда прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по катетам). Следовательно, $AC=BC$.

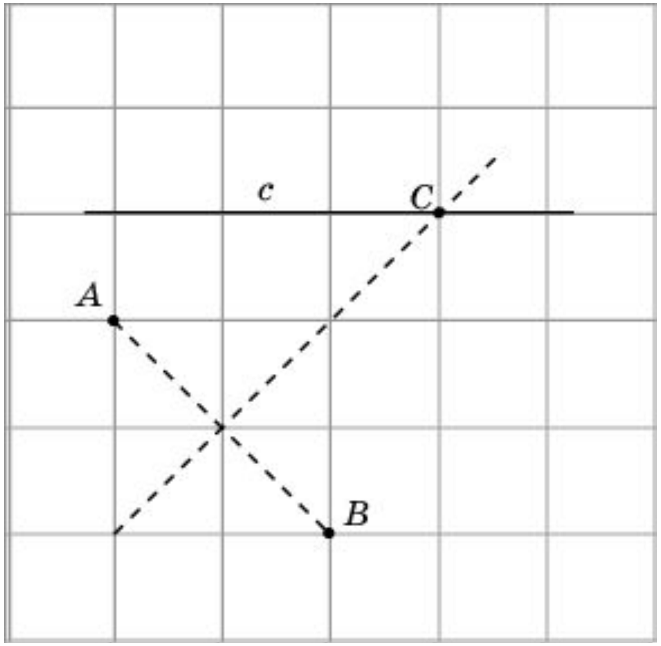
Упражнение 7

Постройте геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и B.



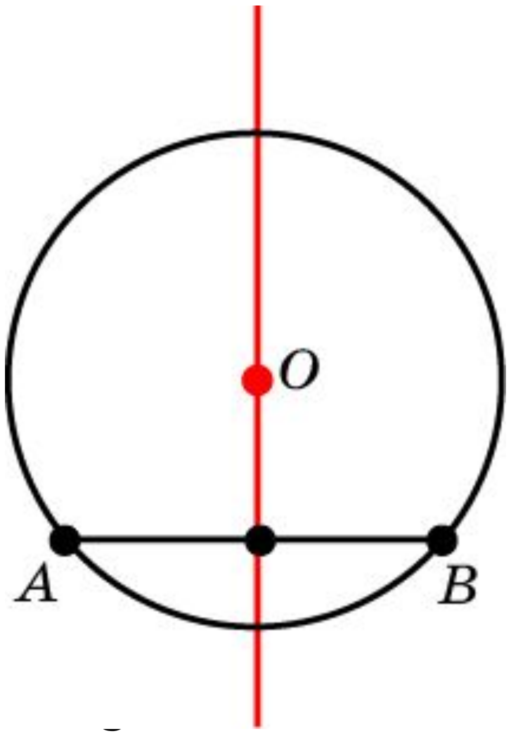
Упражнение 8

На прямой c отметьте точку C равноудаленную от точек A и B.



Упражнение 9

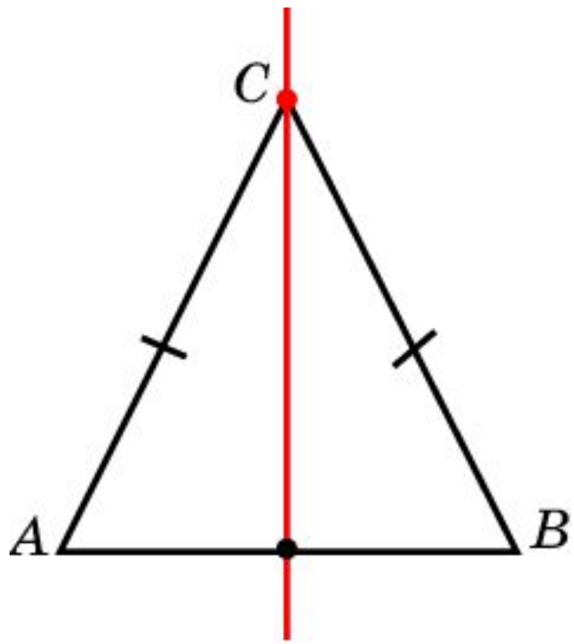
Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.



Ответ: Серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему две данные точки.

Упражнение 10

Найдите геометрическое место вершин C равнобедренных треугольников с заданным основанием AB.

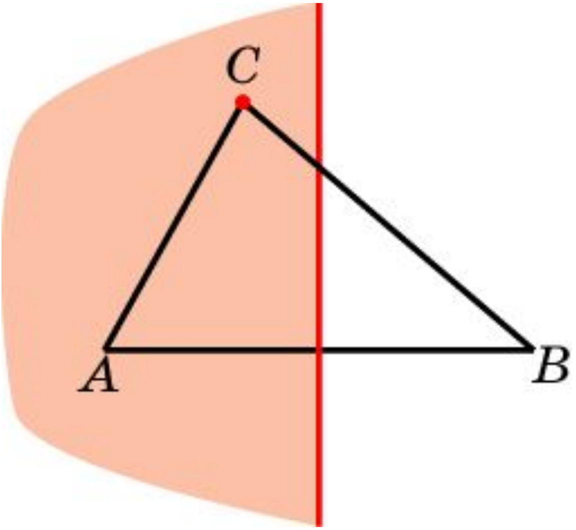


Ответ: Серединный перпендикуляр к отрезку AB без середины этого отрезка.

Упражнение 11

Пусть A и B - точки плоскости. Найдите геометрическое место точек C, для которых $AC \leq BC$.

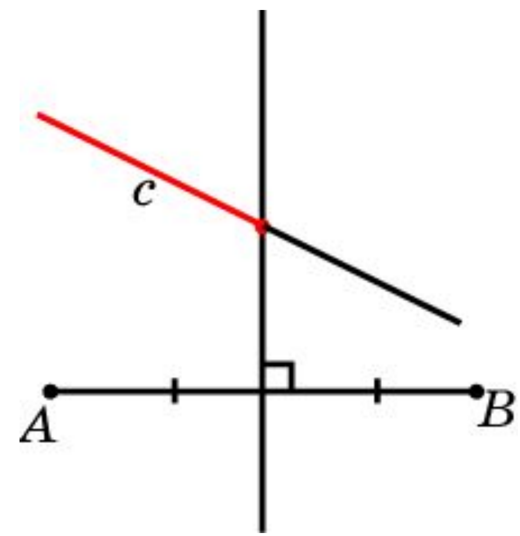
Ответ: Полуплоскость, определяемая серединным перпендикуляром к отрезку AB, содержащая точку A;



Упражнение 12

Пусть A и B точки плоскости, c - прямая. Найдите геометрическое место точек прямой c, расположенных ближе к A, чем к B. В каком случае таких точек нет?

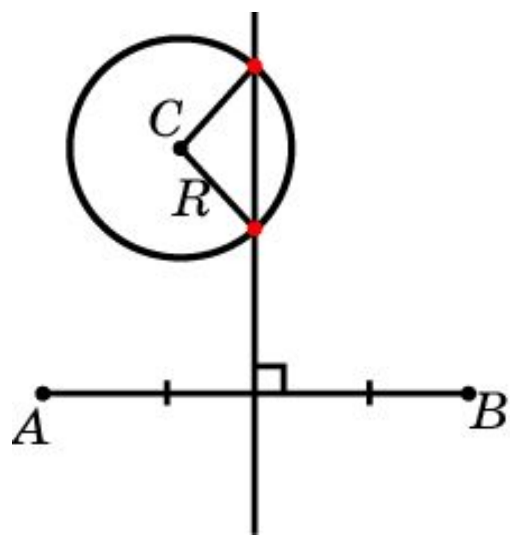
Ответ: Часть прямой c, лежащая внутри полуплоскости, определяемой серединным перпендикуляром к отрезку AB и точкой A. Если прямая c целиком лежит в полуплоскости, определяемой серединным перпендикуляром и точкой B, то таких точек нет.



Упражнение 13

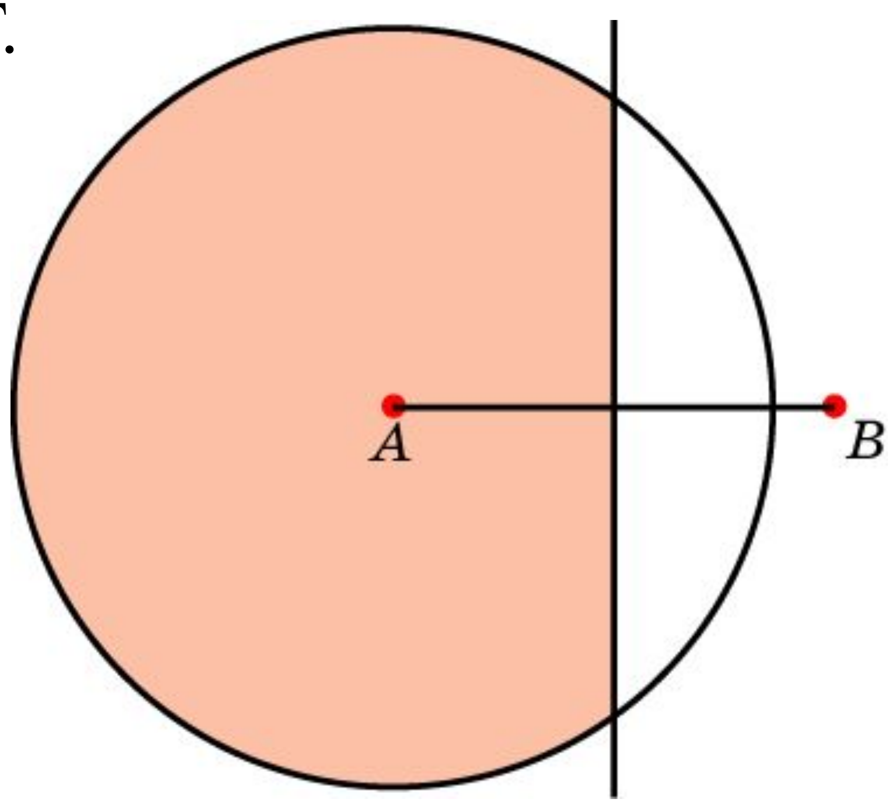
Даны три точки: A, B, C. Найдите точки, которые одинаково удалены от точек A и B и находятся на расстоянии R от точки C.

Ответ: Точки пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AB и окружности с центром в точке C и радиусом R.



Упражнение 14

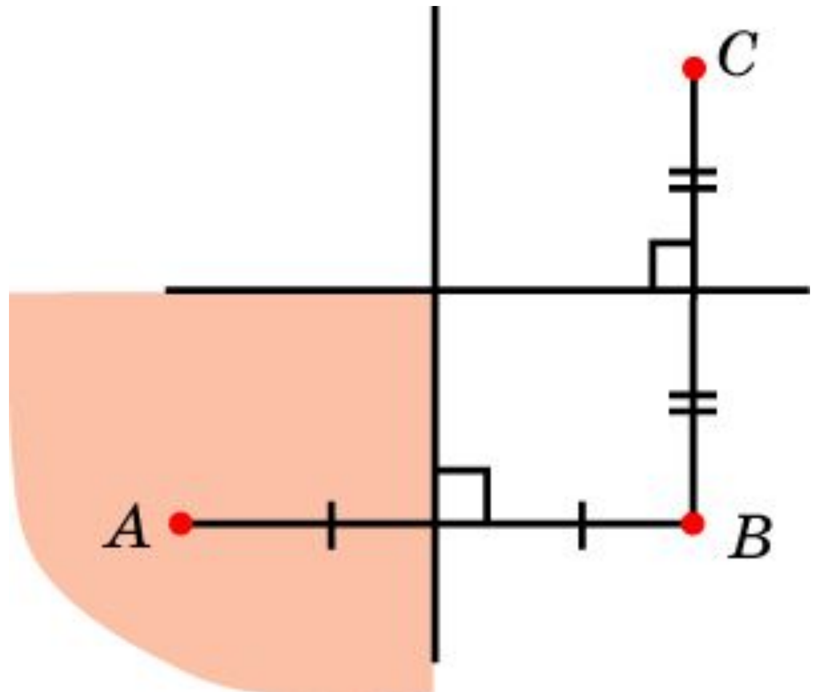
Даны две точки A и B. Найдите ГМТ C, для которых $CA \leq CB \leq AB$. Пересечением каких фигур является искомое ГМТ.



Ответ: Искомое ГМТ является пересечением круга и полуплоскости.

Упражнение 15

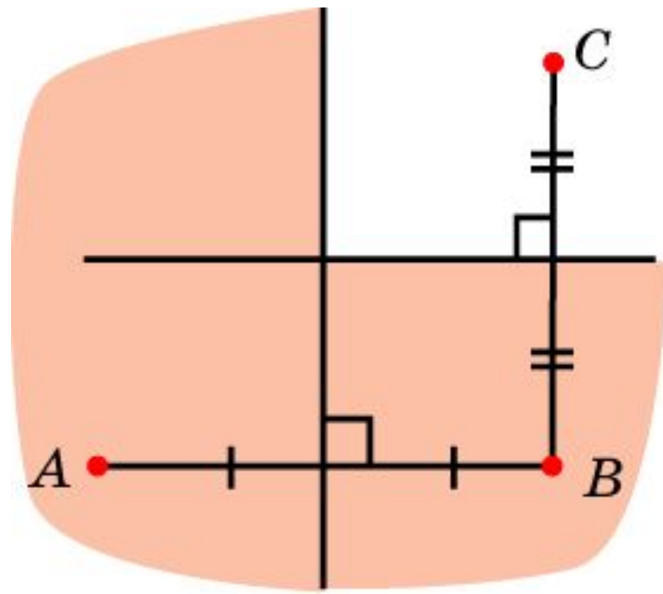
Даны три точки A, B, C. Найдите ГМТ X, для которых $AX \le BX$ и $BX \le CX$. Пересечением каких фигур является искомое ГМТ.



Ответ: Искомое ГМТ является пересечением двух полупространств, определяемых серединными перпендикулярами к отрезкам AB и BC.

Упражнение 16

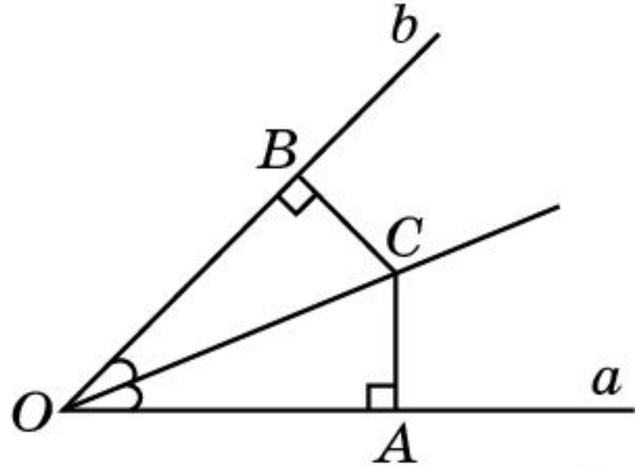
Даны три точки A, B, C. Найдите ГМТ X, для которых $AX \le BX$ или $BX \le CX$. Объединением каких фигур является искомое ГМТ.



Ответ: Искомое ГМТ является объединением двух полупространств, определяемых серединными перпендикулярами к отрезкам AB и BC.

Биссектриса угла

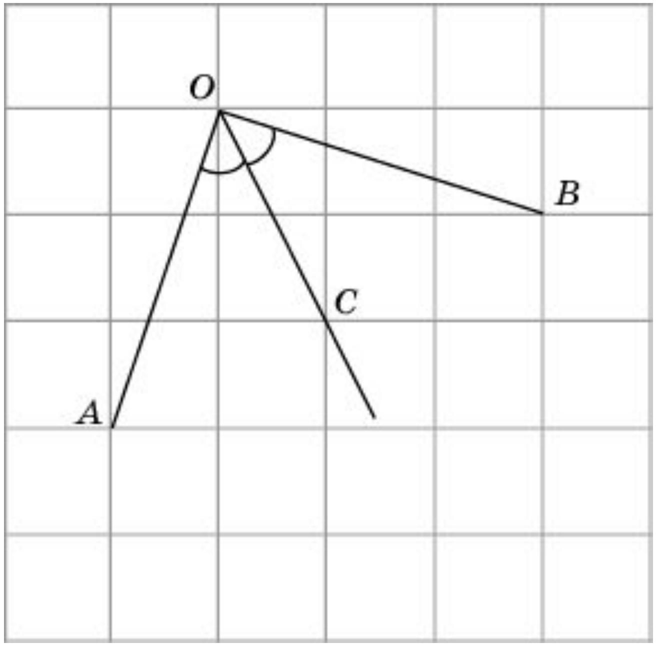
Теорема. Биссектриса угла является ГМТ, лежащих внутри этого угла и одинаково удаленных от его сторон.



Доказательство. Рассмотрим угол с вершиной в точке O и сторонами a, b. Пусть точка C лежит внутри данного угла. Опустим из нее перпендикуляры CA и CB на стороны a и b. Если $CA = CB$, то прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по гипотенузе и катету). Следовательно, углы AOC и BOC равны. Значит, точка C принадлежит биссектрисе угла. Обратно, если точка C принадлежит биссектрисе угла, то прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $AC = BC$. Значит, точка C одинаково удалена от сторон данного угла.

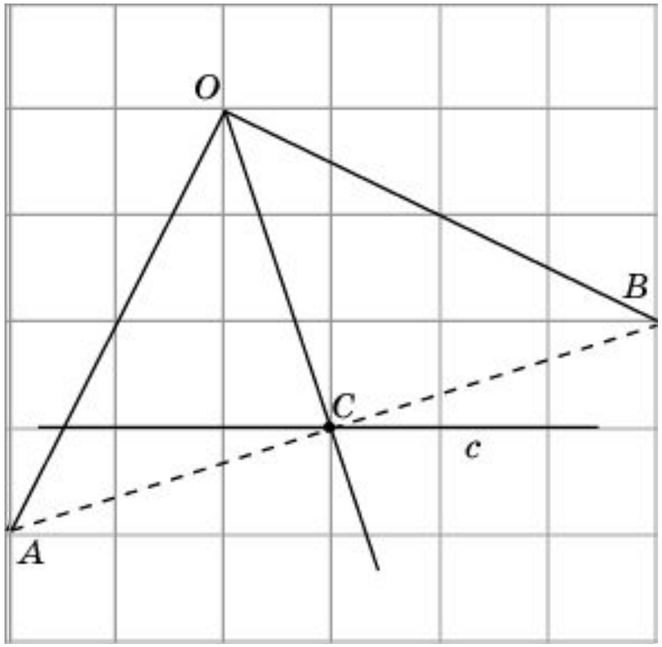
Упражнение 17

Постройте геометрическое место внутренних точек угла AOB, равноудаленных от его сторон.



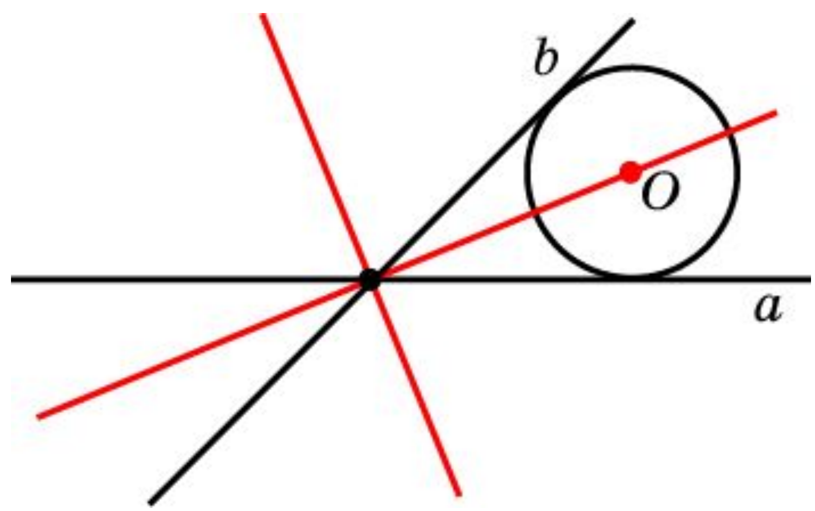
Упражнение 18

На прямой *c* отметьте точку *C*, равноудаленную от сторон угла *AOB*.



Упражнение 19

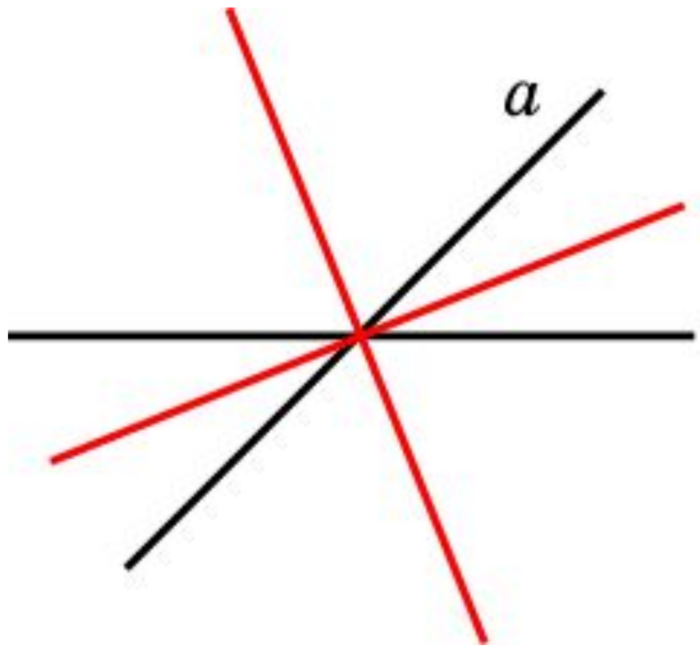
Что является геометрическим местом центров окружностей касающихся двух данных пересекающихся прямых?

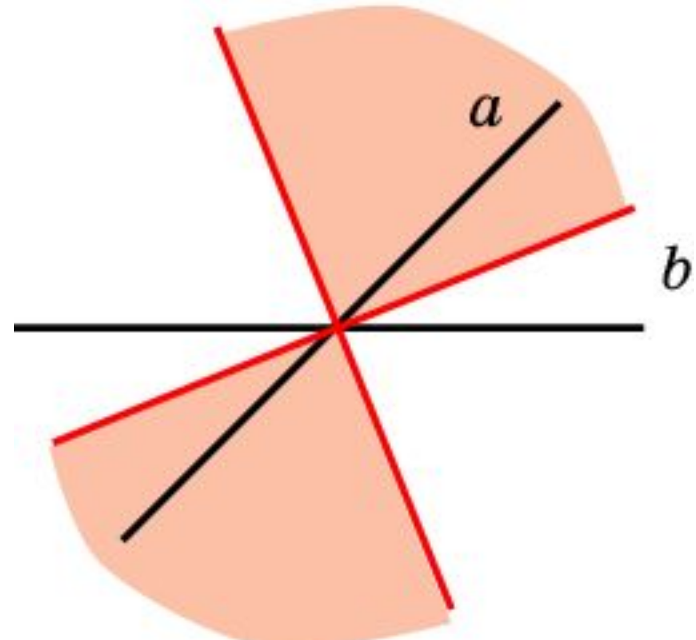


Ответ: Биссектрисы углов, образующихся при пересечении данных прямых, без точки пересечения этих прямых.

Упражнение 20

Пусть *a* и *b* - пересекающиеся прямые. Найдите геометрическое место точек: а) одинаково удаленных от *a* и *b*; б) расположенных ближе к *a*, чем к *b*.



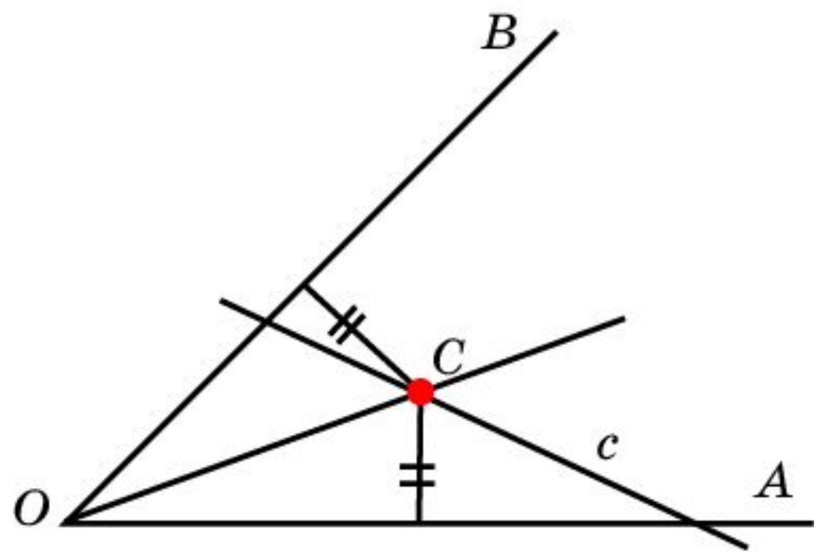


Ответ: а) Точки, принадлежащие биссектрисам четырех углов, образованных данными прямыми;

б) внутренности двух вертикальных углов, образованных биссектрисами.

Упражнение 21

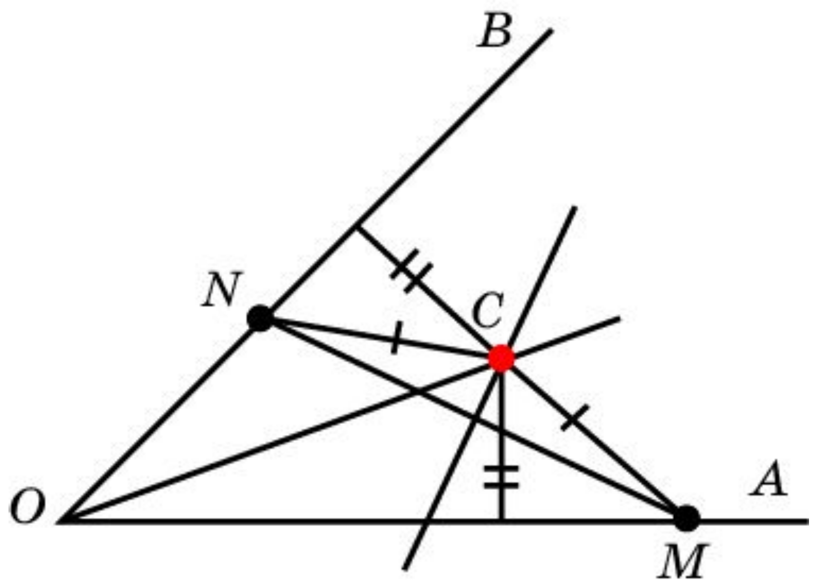
На прямой *c*, пересекающей стороны угла, найдите точку *C*, одинаково удаленную от этих сторон.



Ответ: Точка пересечения данной прямой с биссектрисой данного угла.

Упражнение 22

Дан угол AOB и точки M, N на его сторонах. Внутри угла найдите точку, одинаково удаленную от точек M и N и находящуюся на одинаковом расстоянии от сторон угла.



Ответ: Точка пересечения серединного перпендикуляра к MN с биссектрисой угла.