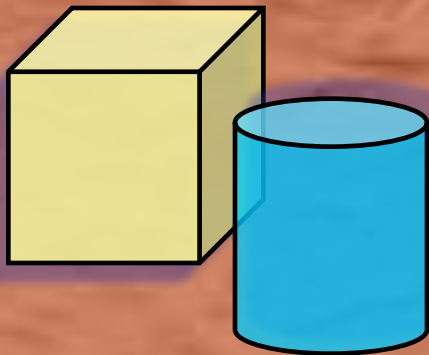


ГЕОМЕТРИЯ

(Немного из истории)



«Геометрия была открыта египтянами и возникла при измерении земли. Это измерение было им необходимо вследствие разлития реки Нила, постоянно смывавшего границы. Нет ничего удивительного в том, что эта наука, как и другие, возникла из потребностей человека. Всякое возникающее знание из несовершенного состояния переходит в совершенное. Зарождаясь путем чувственного восприятия, оно постепенно становится предметом нашего рассмотрения и, наконец, делается достоянием разума»

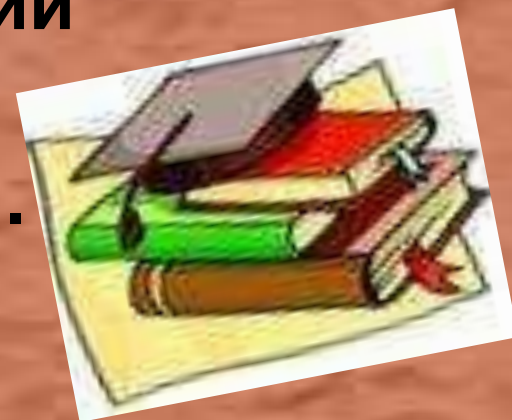
ГЕОМЕТРИЯ

(от греч. *ge* — земля и *metreo* — мерю)

— часть математики,
представляющая науку о
пространственных отношениях и
формах тел, а также о других
отношениях и формах
действительности, сходных с
пространственными по своей
структуре.

ПЕРИОДЫ РАЗВИТИЯ ГЕОМЕТРИИ

- ◆ Период зарождения геометрии как математической науки.
- ◆ Период становления геометрии как самостоятельной математической науки.
- ◆ Период развития аналитической геометрии.
- ◆ Период формирования геометрии Лобачевского.
- ◆ Период современной геометрии.



1. Период зарождения геометрии как математической науки

- Протекал в Древнем Египте, Вавилоне и Греции, примерно до 5 в. до н. э.
- Первичные геометрические сведения появляются на самых ранних ступенях развития общества. **Зачатками науки** следует считать установление первых общих закономерностей, в данном случае — зависимостей между геометрическими величинами. Этот момент не может быть датирован.
- Самое раннее сочинение, содержащее **зачатки геометрии**, дошло до нас из Древнего Египта и относится примерно к 17 в. до н. э., но оно, несомненно, не первое.

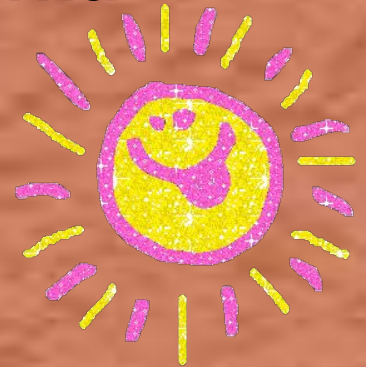
ЕГЕПТ

- ❑ Геометрия сводилась к правилам вычисления площадей и объемов.
Правильно вычислялись:
 - ❑ площади треугольника и трапеции,
 - ❑ объёмы параллелепипеда и пирамиды с квадратным основанием.
- ❑ Наивысшим известным нам достижением египтян в этом направлении явилось открытие способа вычисления объёма усечённой пирамиды с квадратным основанием.
- ❑ Правила вычисления площади круга и объёмов цилиндра и конуса соответствуют иногда грубо приближённому значению $\pi=3$, иногда же значительно более точному $\pi=3,16\dots$



ВАВИЛОН

- ❑ Из достижений вавилонской математики в области геометрии, выходящих за пределы познаний египтян, следует отметить разработанное **измерение углов** и некоторые зачатки **тригонометрии**, связанные, очевидно, с развитием астрономии.
- ❑ Вавилонянам была уже известна *теорема Пифагора*.



- Созданная древними греками система изложения элементарной геометрии на два тысячелетия вперёд сделалась образцом дедуктивного построения *математической теории*.
- Начало же греческой геометрии традиция связывает с путешествиями в Египет первых греческих геометров и философов *Фалеса Милетского* (конец 7 в.— 1-я половина 6 в. до н. э.) и *Пифагора Самосского* (6 в. до н. э.).
- В связи с геометрической теоремой Пифагора был найден метод получения неограниченного ряда троек «пифагоровых чисел», т. е. троек чисел, удовлетворяющих соотношению $a^2+b^2=c^2$.



- В области геометрии задачи, которыми занимались греческие геометры 6—5 вв. до н. э. после усвоения египетского наследства, также естественно возникают из простейших запросов строительного искусства, землемерия и навигации.
- Не ограничиваясь приближёнными, эмпирически найденными решениями, греческие геометры ищут точных доказательств и логически исчерпывающих решений проблемы.
- Первый систематический учебник геометрии приписывается *Гиппократу Хиосскому* (2-я половина 5 в. до н. э.).



2. Период становления геометрии как самостоятельной математической науки

- На протяжении нескольких поколений геометрия складывалась в стройную систему. Процесс этот происходил путём накопления новых геометрических знаний, выяснения связей между разными геометрическими фактами, выработки приёмов доказательств и, наконец, формирования понятий о фигуре, о геометрическом предложении и о доказательстве.
- Этот процесс привёл, наконец, к качественному скачку; *геометрия превратилась в самостоятельную математическую науку*: появились систематические её изложения, где её предложения последовательно доказывались.

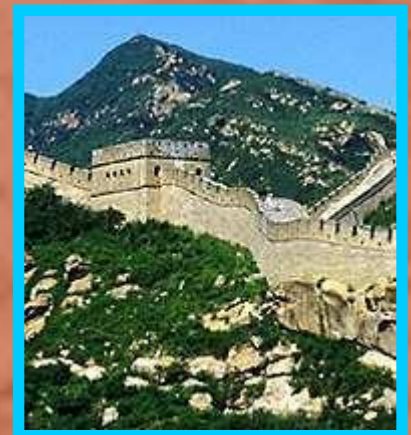
"НАЧАЛА" ЕВКЛИДА

- Сохранились и сыграли в дальнейшем решающую роль появившиеся около 300 до н. э. «Начала» Евклида.
- Здесь геометрия представлена так, как ее в основном понимают и теперь, если ограничиваться **элементарной геометрией**, начала которой изучают в средней школе, — это наука о простейших пространственных формах и отношениях, развиваемая в логической последовательности, исходя из явно сформулированных основных положений — аксиом и основных пространственных представлений.



Геометрию, развиваемую на принципах Евклида, даже уточнённую и обогащённую новыми предметами и методами исследования, называют евклидовой.

Падение рабовладельческого античного общества привело к сравнительному застою в развитии геометрии: однако она продолжала развиваться в странах *арабского Востока, в Средней Азии и Индии.*



3. Период развития аналитической геометрии



Возрождение наук и искусств в Европе, вызванное зарождением капитализма, повлекло новый расцвет геометрии.

- Принципиально новый шаг был сделан в 1-й половине 17 в. **Рене Декартом**, который ввёл в геометрию метод координат, позволивший связать геометрию с развивавшейся тогда алгеброй и зарождающимся анализом.
- Применение методов этих наук в геометрии породило *аналитическую*, а потом и *дифференциальную* геометрию.
- Здесь геометрия перешла на качественно новую ступень по сравнению с геометрией древних: в ней рассматриваются уже гораздо более общие фигуры и используются существенно новые методы.

4. Период формирования геометрии Лобачевского

Четвёртый период в развитии геометрии открывается построением Н. И. Лобачевским новой, неевклидовой геометрии, называемой теперь геометрией Лобачевского. Первая работа Лобачевского в этом направлении была доложена им на заседании физико-математического факультета Казанского университета в 1826 г. и опубликована в развитой форме в 1829 г.

- **Источник, сущность и значение идей Лобачевского сводятся к следующему. В геометрии Евклида имеется аксиома о параллельных, утверждающая: «через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более чем одну прямую, параллельную данной». Многие геометры пытались доказать эту аксиому, исходя из других основных посылок *геометрии*, но безуспешно. Лобачевский пришёл к мысли, что такое доказательство невозможно.**
- **Утверждение, противоположное аксиоме Евклида, будет: «через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не одну, а по крайней мере две параллельные ей прямые». Это и есть аксиома Лобачевского.**
- **По мысли Лобачевского, присоединение этого положения к другим основным положениям *геометрии* не должно приводить к противоречию, т. е. все выводы, получаемые на основе такого соединения, будут логически безупречными.**

Система этих выводов и образует новую, неевклидову геометрию.

«Напрасное старание со времен Евклида, в продолжение двух тысяч лет, — писал он, — заставило меня подозревать, что в самых понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать и в которую поверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, астрономические наблюдения».



- Заслуга Лобачевского состоит в том, что он не только высказал эту идею, но действительно построил и всесторонне развил эту новую *геометрию*, логически столь же совершенную и богатую выводами, как евклидова, несмотря на её несоответствие обычным наглядным представлениям. Лобачевский рассматривал свою *геометрию* как возможную теорию пространственных отношений; однако она оставалась гипотетической до 1868—1870 гг., когда был выяснен её реальный смысл и тем самым было дано её полное обоснование.
- Переворот в *геометрии*, произведённый Лобачевским, по своему значению не уступает ни одному из переворотов в естествознании, и недаром Лобачевский был назван *«Коперником геометрии»*.

ПРИНЦИПЫ,

ОПРЕДЕЛИВШИЕ НОВОЕ РАЗВИТИЕ ГЕОМЕТРИИ

- Первый принцип заключается в том, что логически мыслима не одна евклидова геометрия, но и другие «геометрии».
- Второй принцип — это принцип самого построения новых геометрических теорий путём видоизменения и обобщения основных положений евклидовой геометрии, т. е. в конечном счёте данных пространственного опыта. Именно в этом направлении пошло и продолжает идти развитие абстрактной геометрии.
- Третий принцип состоит в том, что истинность геометрической теории может проверяться только опытом, и не исключено, что дальнейшие опытные исследования обнаружат неточность соответствия евклидовой геометрии реальным свойствам пространства.

Вопрос об этих свойствах есть вопрос физического опыта, а не математического умозрения.

- Перечисленные **общие принципы** сыграли определяющую роль не только в *геометрии*, но и в развитии математики вообще, в развитии её аксиоматического метода, в понимании её отношения к действительности.
- Главная особенность нового периода в истории *геометрии*, начатого Лобачевским, состоит в развитии новых геометрических теорий — **новых «геометрий»** и в соответствующем обобщении предмета *геометрии*; возникает понятие о разного рода **«пространствах»** (термин «пространство» имеет в науке два смысла: с одной стороны, это обычное реальное пространство, с другой — абстрактное математическое «пространство»).
- *Геометрия* превратилась в разветвлённую и быстро развивающуюся в разных направлениях **совокупность математических теорий, изучающих разные пространства** (евклидово, Лобачевского, проективное, римановы и т. д.) и **фигуры в этих пространствах**.
- Одновременно с развитием новых геометрических теорий велась разработка уже сложившихся областей евклидовой *геометрии* — **элементарной, аналитической и дифференциальной**. Вместе с тем в *евклидовой геометрии* появились также новые направления. Предмет *геометрии* расширился также в том смысле, что расширился круг исследуемых фигур, круг изучаемых их свойств, расширилось самое понятие о фигуре.

5. Период современной

геометрии

- Для современной *геометрии* характерно ещё большее, чем прежде, проникновение её идей и методов в другие области математики и обратно, так что **точное выделение *геометрии* из всей математики оказывается, по существу, невозможным.**
- Существенно изменилось также отношение геометрии к изучению материальной действительности: если раньше *геометрия* была лишь теорией пространственных отношений и форм, основанной на положениях, сформулированных у Евклида, то теперь она стала также **наукой о формах и отношениях действительности, сходных с пространственными.**
- Область её применения к исследованию природы чрезвычайно расширилась. Но при всём разнообразии приложений и абстрактности теорий современной *геометрии* все они имеют общий источник в изучении конкретных пространственных форм и отношений, которое было впервые суммировано в элементарной евклидовой *геометрии* и из которого, в конечном счёте, исходят все понятия *геометрии*.

Это единство источника позволяет дать определение *геометрии* как той части математики, которая развилась из изучения пространственных форм и отношений.