

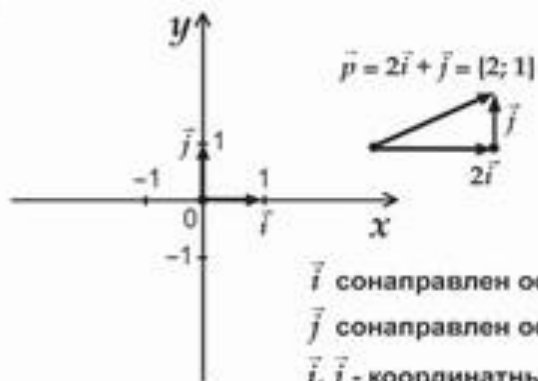
# Таблицы Геометрия

9 класс

# Содержание:

1. [Координаты вектора](#)
2. [Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца](#)
3. [Уравнения окружности и прямой](#)
4. [Синус, Косинус, Тангенс](#)
5. [Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения](#)
6. [Соотношение между сторонами и углами треугольника](#)
7. [Теоремы Синусов и Косинусов](#)
8. [Скалярное произведение векторов](#)
9. [Правильные многоугольники](#)
10. [Построение правильных многоугольников](#)
11. [Длина окружности и площадь круга](#)
12. [Понятие движения](#)
13. [Параллельный перенос и поворот](#)

# КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА



$\vec{i}$  сонаправлен оси  $Ox$ ,  $|\vec{i}| = 1$ ;

$\vec{j}$  сонаправлен оси  $Oy$ ,  $|\vec{j}| = 1$

$\vec{i}, \vec{j}$  - координатные векторы

Любой вектор  $\vec{p}$  можно разложить по векторам  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$ :

$$\vec{p} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}, x, y \in \mathbb{R}.$$

Числа  $x$  и  $y$  - координаты вектора  $\vec{p}$ .

## Свойства:

- Если  $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} = \{x_1; y_1\}$ ,  $\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} = \{x_2; y_2\}$ ,  
то  $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2) \vec{i} + (y_1 + y_2) \vec{j} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$ ,  
а  $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2) \vec{i} + (y_1 - y_2) \vec{j} = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$
- Если  $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = \{x; y\}$ ,  
то  $\forall k \in \mathbb{R} \quad k \cdot \vec{a} = kx \cdot \vec{i} + ky \cdot \vec{j} = \{kx; ky\}$

## Примеры:

- Если  $\vec{a} = \{2; -1\}$ ,  $\vec{b} = \{1; -2\}$ ,  
то  $\vec{a} + \vec{b} = \{2 + 1; -1 - 2\} = \{3; -3\}$ ,  
а  $\vec{a} - \vec{b} = \{2 - 1; -1 - (-2)\} = \{1; 1\}$
- Если  $\vec{a} = \{1; 2\}$ ,  $\vec{b} = \{-1; 0\}$ ,  
то  $2\vec{a} + 3\vec{b} = \{2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1); 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0\} = \{-1; 4\}$



# СВЯЗЬ МЕЖДУ КООРДИНАТАМИ ВЕКТОРА И КООРДИНАТАМИ ЕГО НАЧАЛА И КОНЦА



Вектор  $\overline{OM}$  называется радиус-вектором точки  $M(x; y)$  и имеет координаты  $\{x; y\}$ .

Вектор  $\overline{AB}$  с началом в точке  $A(x_1; y_1)$  и концом в точке  $B(x_2; y_2)$  имеет координаты  $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ .

### Свойства:

1) Длина вектора  $\vec{a} \{x; y\}$  равна  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;

Например, если  $\vec{a} = \{3; 4\}$ , то  $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

2) Если  $C(x; y)$  – середина отрезка  $AB$ ,

где  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ , то  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ,  $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

Например, середина отрезка  $AB$ , где  $A(1; 1)$ ,  $B(2; 5)$  – это точка  $A\left(\frac{3}{2}; 3\right)$

3) Расстояние  $d$  между точками

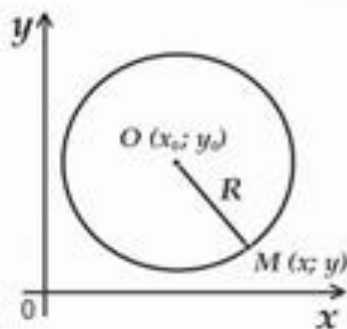
$M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$  равно:

$$d = |\overline{M_1 M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Например, если  $M_1(0; 1)$ ,  $M_2(2; 3)$ , то  $d = |\overline{M_1 M_2}| = \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

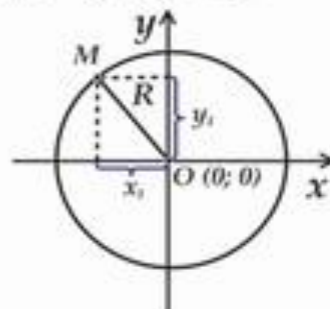


# УРАВНЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ И ПРЯМОЙ



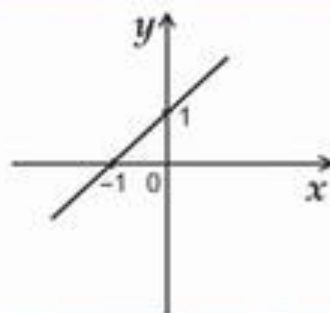
Уравнение окружности с центром в точке  $O(x_0; y_0)$  и радиусом  $OM = R$  в прямоугольной системе координат имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$



**Частный случай:**  
уравнение окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат  $O(0; 0)$ :

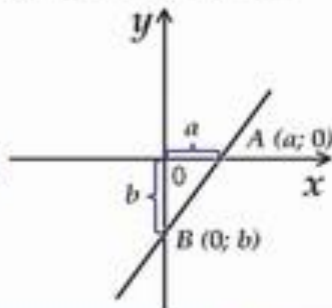
$$x^2 + y^2 = R^2$$



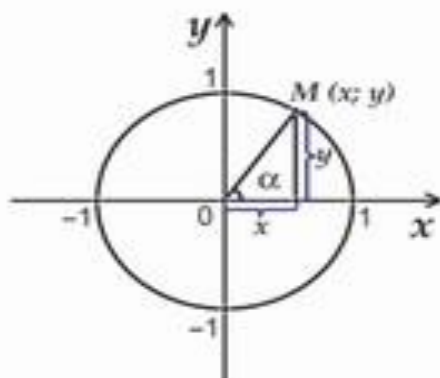
**Общее уравнение прямой** в прямоугольной системе координат:  $ax + by + c = 0$   
Например,  $x - y + 1 = 0$

**Уравнение прямой в отрезках:**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



# СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС



Синусом любого угла  $\alpha$  называется ордината  $y$  точки  $M$ :

$$\sin \alpha = y$$

Косинусом любого угла  $\alpha$  называется абсцисса  $x$  точки  $M$ :

$$\cos \alpha = x$$

Тангенсом угла  $\alpha$  ( $\alpha \neq 90^\circ$ ) называется отношение:

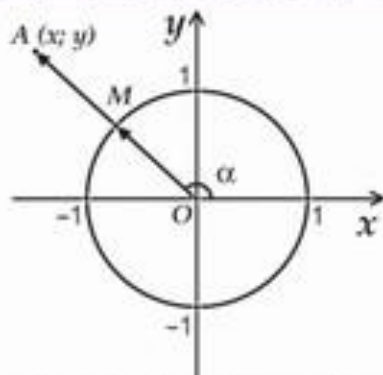
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

При  $\alpha = 90^\circ$   $\operatorname{tg} \alpha$  не определен, так как  $\cos 90^\circ = 0$  и в формуле для  $\operatorname{tg} \alpha$  знаменатель обращается в 0.

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



# ОСНОВНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ



Основное  
тригонометрическое  
тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Формулы приведения:

- 1)  $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ ;
- 2)  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ ;
- 3)  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ ;
- 4)  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ .

Точка  $M$  имеет координаты  $(\cos \alpha; \sin \alpha)$

Точка  $A$  имеет координаты  $x = |\overline{OA}| \cdot \cos \alpha$ ;  $y = |\overline{OA}| \cdot \sin \alpha$

Пример 1: Найти  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$  и  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Решение:  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Так как  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ , то  $\cos \alpha < 0$ , значит  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Пример 2: Найти  $\sin \alpha$ , если а)  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

б)  $\cos \alpha = -1$

в)  $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ ,  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$

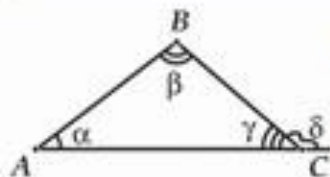
Решение: а)  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

б)  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \sin \alpha = 0$

в)  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$



# СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

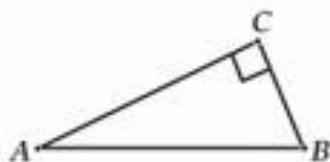


$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\delta = \alpha + \beta$$

**Теорема о сумме углов треугольника:**  
Сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ .

**Следствие:**  
Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним.



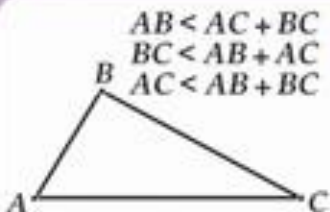
$$\angle C > \angle A \Rightarrow AB > BC$$

$$\angle C > \angle B \Rightarrow AB > AC$$

$$AC > BC \Rightarrow \angle B > \angle A$$

**Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника:**  
1) В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.  
2) В треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

**Следствие:**  
В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов.



$$AB < AC + BC$$

$$BC < AB + AC$$

$$AC < AB + BC$$

$$BC > AC - AB$$

$$AC > BC - AB$$

$$AB > AC - BC$$

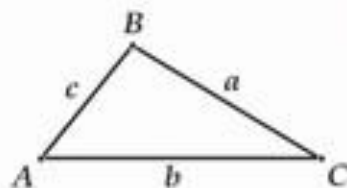
**Неравенство треугольника:**

Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон и больше разности двух других сторон





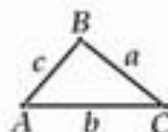
# ТЕОРЕМЫ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ



**Теорема синусов:**

Стороны произвольного треугольника прямо пропорциональны синусам противолежащих углов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

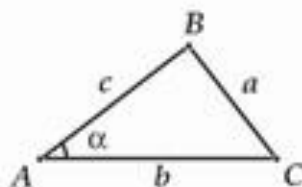


Пример: Дан треугольник ABC:

$$a = BC = 5 \text{ см}, c = AB = 3 \text{ см}, \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Найти:  $\sin C$

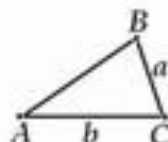
$$\text{Решение: } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}; \frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{5} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$



**Теорема косинусов:**

Квадрат стороны произвольного треугольника равен сумме квадратов длин двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$



Пример: Дан треугольник ABC:

$$a = BC = 4 \text{ см}, b = AC = 5 \text{ см}, \cos C = \frac{1}{2}$$

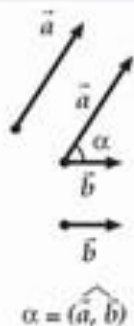
Найти: AB

$$\text{Решение: } AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 21$$

$$AB = \sqrt{21}$$



# СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ



Скалярное произведение двух векторов

$\vec{a}$  и  $\vec{b}$  - это произведение длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{a, b})$$

Если  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ , то  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ ,

$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ ;  $\vec{a}^2$  - скалярный квадрат вектора  $\vec{a}$ .

Свойства скалярного произведения:

$$1) \vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

$$2) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$3) (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$4) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

**Теорема:**

Если  $\vec{a} = \{x_1; y_1\}$ ,  $\vec{b} = \{x_2; y_2\}$ ,  
то  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$ .

**Примеры:**

$$1) \vec{a} = \{2; 1\}, \vec{b} = \{1; -1\}. \text{ Вычислить } \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 2 - 1 = 1$$

$$2) \vec{a} = \{1; 1\}, \vec{b} = \{0; 2\}. \text{ Найти угол между векторами } \vec{a} \text{ и } \vec{b}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2$$

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\widehat{a, b}) = 45^\circ$$



# ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Многоугольник называется выпуклым, если он целиком лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.

Выпуклый многоугольник называется правильным, если все его стороны равны и все углы равны.



Сумма углов правильного  $n$ -угольника равна  $180^\circ(n - 2)$ .

Углы правильного  $n$ -угольника равны  $\frac{n - 2}{n} \cdot 180^\circ$ .

$O$  – центр вписанной и описанной окружности – называется центром многоугольника.

Формула площади правильного  $n$ -угольника:

$$S = \frac{1}{2} Pr \quad (P - \text{периметр многоугольника, } r - \text{радиус вписанной окружности})$$

Формула стороны правильного  $n$ -угольника:

$$a_n = 2R \sin \frac{\pi}{n} \quad (a_n - \text{сторона, } R - \text{радиус описанной окружности})$$

Формула радиуса вписанной окружности:

$$r = R \cos \frac{\pi}{n}$$

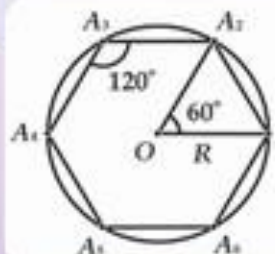
Например, площадь правильного шестиугольника

со стороной  $a$  равна:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot R \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$$



# ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ



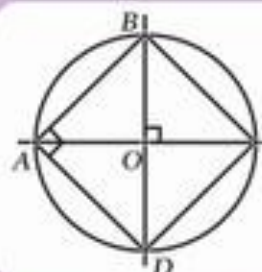
**Построение правильного вписанного шестиугольника:**

Выбираем точку  $A_1$  на окружности, далее из точки  $A_1$  как из центра радиусом  $R$  делаем засечку и получаем вершину –  $A_2$ , аналогично получаем остальные вершины.



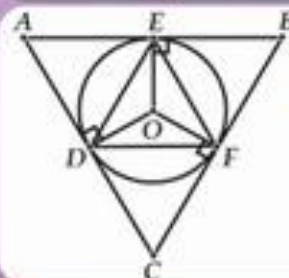
**Построение правильного вписанного треугольника:**

Соединяем через одну вершины правильного шестиугольника.



**Построение правильного вписанного четырехугольника, то есть квадрата:**

Через центр окружности проводим две перпендикулярные прямые. Точки их пересечения с окружностью - вершины квадрата.

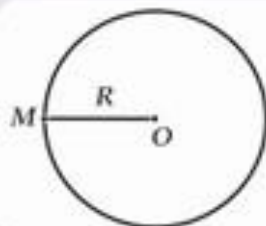


**Построение правильного описанного многоугольника по правильному вписанному многоугольнику:**

Необходимо провести касательные к окружности в вершинах правильного вписанного многоугольника.

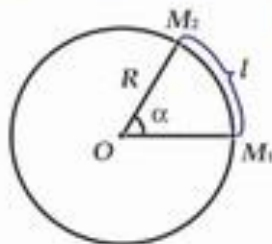


# ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА



Формула длины окружности:  $l = 2\pi R$ ,  
где  $R$  – радиус окружности, а  $\pi \approx 3,14$ .

Например, длина окружности радиуса  
 $R = 3$  см равна  $l = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$  (см)

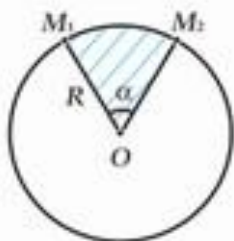


Формула длины дуги окружности  
с градусной мерой  $\alpha$ :

$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$$

Например, длина дуги окружности  
радиуса 2 см с градусной мерой  $60^\circ$  равна:

$$l = \frac{\pi \cdot 2}{180} \cdot 60 = \frac{2\pi}{3} \text{ (см)}$$



Формула площади круга:  $S = \pi R^2$

Например, площадь круга радиуса 10 см  
равна  $S = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$  (см<sup>2</sup>)

Площадь кругового сектора  
радиуса  $R$ , ограниченного дугой  
с градусной мерой  $\alpha$ :

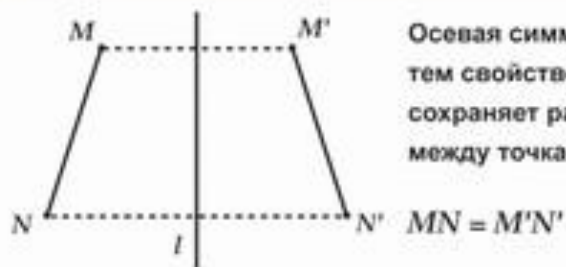
$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$$

Например, площадь кругового сектора  
радиуса 5 см, ограниченного дугой  
с градусной мерой  $120^\circ$ , равна:

$$S = \frac{\pi \cdot 25}{360} \cdot 120 = \frac{25\pi}{3} \text{ (см}^2\text{)}$$



# ПОНЯТИЕ ДВИЖЕНИЯ

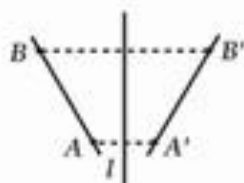


Осевая симметрия обладает тем свойством, что она сохраняет расстояния между точками:

$$MN = M'N'$$

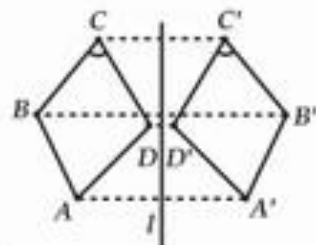
**Движение плоскости** – это такое отображение плоскости на себя, которое сохраняет расстояния.

**Свойства движения:**



1) Точки прямой при движении переходят в точки прямой и при этом сохраняется порядок их взаимного расположения

2) Прямые при движении переходят в прямые, отрезки в отрезки

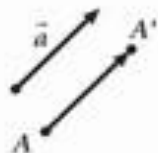


3) При движении сохраняются углы

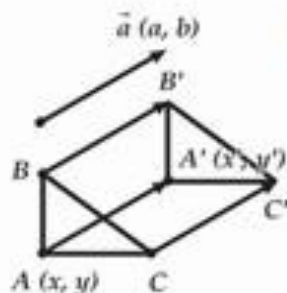
4) При движении многоугольник переходит в равный ему многоугольник



# ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС И ПОВОРОТ



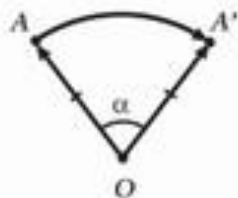
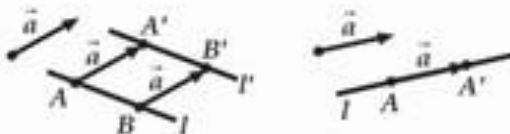
Параллельный перенос на вектор  $\vec{a}$  – это такое отображение плоскости на себя, при котором каждая точка плоскости  $A$  отображается в такую точку  $A'$ , что  $\vec{AA'} = \vec{a}$ .



Свойство параллельного переноса:

- 1) Параллельный перенос – движение
- 2) При параллельном переносе прямая переходит либо в параллельную прямую, либо в себя.

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + a \end{cases}$$



Поворот плоскости вокруг точки  $O$  на угол  $\alpha$  – это такое отображение плоскости на себя, при котором каждая точка плоскости  $A$  отображается в такую  $A'$ , что  $OA = OA'$  и  $\angle AOA' = \alpha$ .

Поворот плоскости – это движение.

