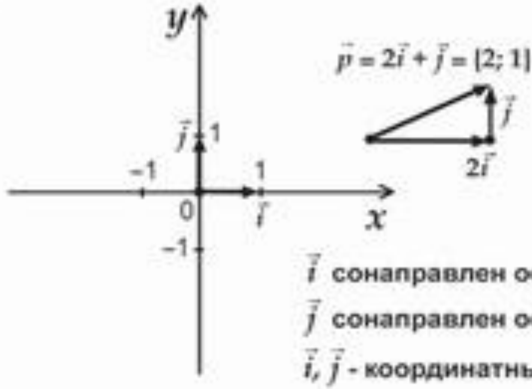
Таблицы
Геометрия

9 класс

Содержание:

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА



$\vec{i}$ **сонаправлен оси** $0x$, $|\vec{i}| = 1$;

$\vec{j}$ **сонаправлен оси** $0y$, $|\vec{j}| = 1$

$\vec{i}, \vec{j}$ **- координатные векторы**

Любой вектор $\vec{p}$ **можно разложить по векторам** $\vec{i}$ **и** $\vec{j}$:

$\vec{p} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Числа $\vec{x}$ **и** $\vec{y}$ **- координаты вектора** $\vec{p}$.

Свойства:

1) **Если** $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} = \{x_1; y_1\}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} = \{x_2; y_2\}$,
то $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}$,
а $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2\}$

2) **Если** $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = \{x; y\}$,
то $\forall k \in \mathbb{R}$ $\quad k \cdot \vec{a} = kx \cdot \vec{i} + ky \cdot \vec{j} = \{kx; ky\}$

Примеры:

1) **Если** $\vec{a} = \{2; -1\}$, $\vec{b} = \{1; -2\}$,
то $\vec{a} + \vec{b} = \{2 + 1; -1 - 2\} = \{3; -3\}$,
а $\vec{a} - \vec{b} = \{2 - 1; -1 - (-2)\} = \{1; 1\}$

2) **Если** $\vec{a} = \{1; 2\}$, $\vec{b} = \{-1; 0\}$,
то $2\vec{a} + 3\vec{b} = \{2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1); 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0\} = \{-1; 4\}$

спектр

СВЯЗЬ МЕЖДУ КООРДИНАТАМИ ВЕКТОРА И КООРДИНАТАМИ ЕГО НАЧАЛА И КОНЦА

Вектор $\overline{OM}$ называется радиус - вектором точки $M\ (x; y)$ и имеет координаты $\{x; y\}$.

Вектор $\overline{AB}$ с началом в точке $A\ (x_1; y_1)$ и концом в точке $B\ (x_2; y_2)$ имеет координаты $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$.

Свойства:

1) Длина вектора $\vec{a}\ \{x; y\}$ равна $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

Например, если $\vec{a} = \{3; 4\}$, то $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

2) Если $C\ (x; y)$ – середина отрезка AB, где $A\ (x_1; y_1)$, $B\ (x_2; y_2)$, то $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

Например, середина отрезка AB, где $A\ (1; 1)$, $B\ (2; 5)$ – это точка $A\left(\frac{3}{2}; 3\right)$

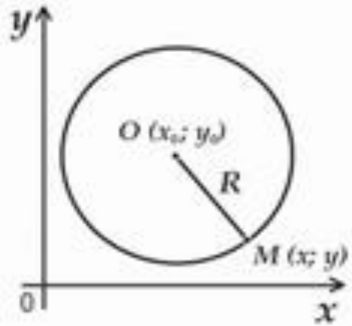
3) Расстояние d между точками $M_1\ (x_1; y_1)$ и $M_2\ (x_2; y_2)$ равно:

$$d = |\overline{M_1 M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

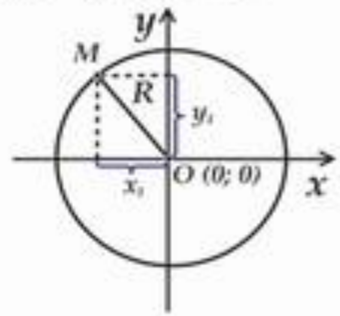
Например, если $M_1\ (0; 1)$, $M_2\ (2; 3)$, то $d = |\overline{M_1 M_2}| = \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

ГЕОМЕТРИЯ
9 класс

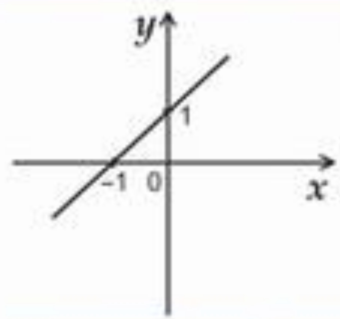
УРАВНЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ И ПРЯМОЙ



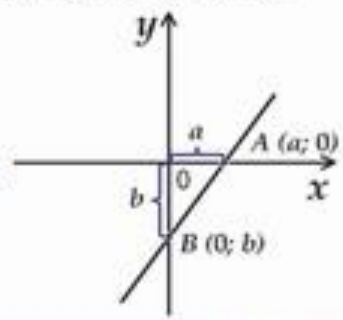
Уравнение окружности
с центром в точке $O\ (x_0;\ y_0)$
и радиусом $OM = R$
в прямоугольной системе
координат имеет вид:
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$



Частный случай:
уравнение окружности
радиуса R с центром
в начале координат $O\ (0;\ 0)$:
$x^2 + y^2 = R^2$



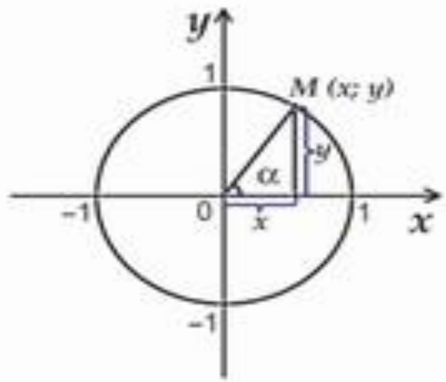
Общее уравнение прямой
в прямоугольной системе
координат: $ax + by + c = 0$
Например, $x - y + 1 = 0$



Уравнение прямой в отрезках:
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

спектр

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС



Синусом любого угла α называется ордината y точки M:

$\sin\alpha = y$

Косинусом любого угла α называется абсцисса x точки M:

$\cos\alpha = x$

Тангенсом угла α ($\alpha \neq 90^\circ$) называется отношение:

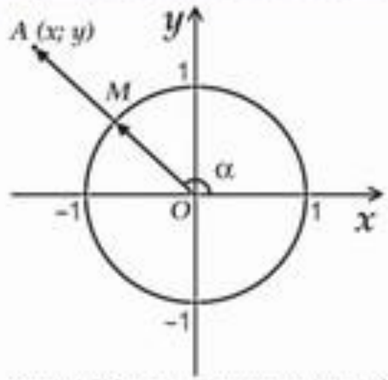
$$tg\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

При $\alpha = 90^\circ$ $tg\alpha$ не определен, так как $\cos 90^\circ = 0$ и в формуле для $tg\alpha$ знаменатель обращается в 0.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

спектр

ОСНОВНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ



Основное тригонометрическое тождество:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Формулы приведения:

1) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$;
2) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$;
3) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$;
4) $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$.

Точка M имеет координаты $(\cos\alpha; \sin\alpha)$

Точка A имеет координаты $x = |\overline{OA}| \cdot \cos\alpha$; $y = |\overline{OA}| \cdot \sin\alpha$

Пример 1: Найти $tg\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Решение: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Так как $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, то $\cos\alpha < 0$, значит $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2} : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Пример 2: Найти $\sin\alpha$, если а) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

б) $\cos\alpha = -1$

в) $\cos\alpha = -\frac{2}{5}$, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$

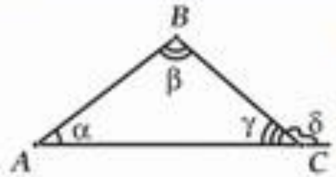
Решение: а) $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

б) $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0$

в) $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$

спектр

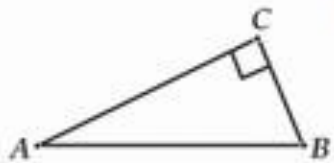
СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$
$$\delta = \alpha + \beta$$

Теорема о сумме углов треугольника:
Сумма углов треугольника равна 180°.

Следствие:
Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним.

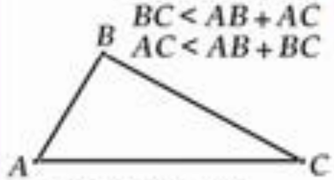


$$\angle C > \angle A \Rightarrow AB > BC$$
$$\angle C > \angle B \Rightarrow AB > AC$$
$$AC > BC \Rightarrow \angle B > \angle A$$

Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника:
1) В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.
2) В треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

Следствие:
В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов.

$$AB < AC + BC$$
$$BC < AB + AC$$
$$AC < AB + BC$$

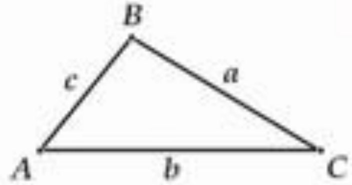


$$BC > AC - AB$$
$$AC > BC - AB$$
$$AB > AC - BC$$

Неравенство треугольника:

Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон и больше разности двух других сторон

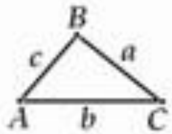
ТЕОРЕМЫ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ



Теорема синусов:

Стороны произвольного треугольника прямо пропорциональны синусам противолежащих углов

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

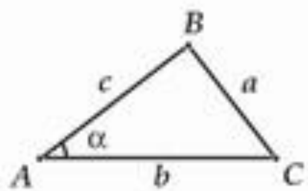


Пример: Дан треугольник ABC:

$a=BC=5$ *см*, $c=AB=3$ *см*, $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Найти: $\sin C$

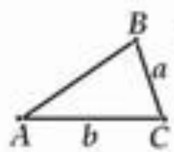
Решение: $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$; $\frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3}{\sin C}\Rightarrow \sin C=\frac{3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{5}=\frac{3\sqrt{2}}{10}$



Теорема косинусов:

Квадрат стороны произвольного треугольника равен сумме квадратов длин двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$



Пример: Дан треугольник ABC:

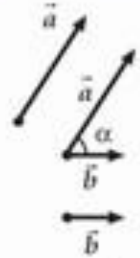
$a=BC=4$ *см*, $b=AC=5$ *см*, $\cos C=\frac{1}{2}$

Найти: AB

Решение: $AB^2=a^2+b^2-2ab\cos C=16+25-2\cdot4\cdot5\cdot\frac{1}{2}=21$

$AB=\sqrt{21}$

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ



$\alpha = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - это произведение длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$,

$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$; $\vec{a}^2$ - скалярный квадрат вектора $\vec{a}$.

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}^2 \geq 0$, $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$
2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
3) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$
4) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

Теорема: Если $\vec{a} = \{x_1; y_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2\}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Примеры:

1) $\vec{a} = \{2; 1\}$, $\vec{b} = \{1; -1\}$. Вычислить $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 2 - 1 = 1$

2) $\vec{a} = \{1; 1\}$, $\vec{b} = \{0; 2\}$. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$|\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 45^\circ$$

ГЕОМЕТРИЯ 9 класс

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Многоугольник называется выпуклым, если он целиком лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.

Выпуклый многоугольник называется правильным, если все его стороны равны и все углы равны.

Сумма углов правильного n-угольника равна $180^\circ(n-2)$.

Углы правильного n-угольника равны $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$.

O – центр вписанной и описанной окружности – называется центром многоугольника.

Формула площади правильного n-угольника:

$S = \frac{1}{2} Pr$ (P - периметр многоугольника, r - радиус вписанной окружности)

Формула стороны правильного n-угольника:

$a_n = 2R \sin \frac{\pi}{n}$ (a_n - сторона, R - радиус описанной окружности)

Формула радиуса вписанной окружности:

$r = R \cos \frac{\pi}{n}$

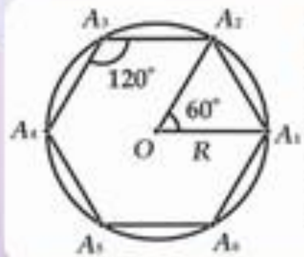
Например, площадь правильного шестиугольника

со стороной a равна:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot R \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$$

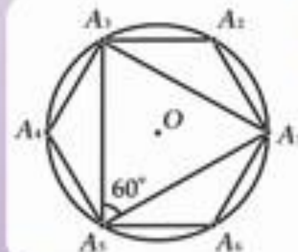
спектр

ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ



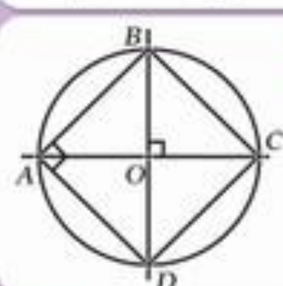
Построение правильного вписанного шестиугольника:

Выбираем точку A_1 на окружности, далее из точки A_1 как из центра радиусом R делаем засечку и получаем вершину – A_2, аналогично получаем остальные вершины.



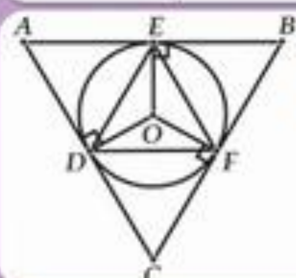
Построение правильного вписанного треугольника:

Соединяем через одну вершины правильного шестиугольника.



Построение правильного вписанного четырехугольника, то есть квадрата:

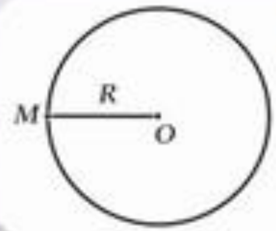
Через центр окружности проводим две перпендикулярные прямые. Точки их пересечения с окружностью - вершины квадрата.



Построение правильного описанного многоугольника по правильному вписанному многоугольнику:

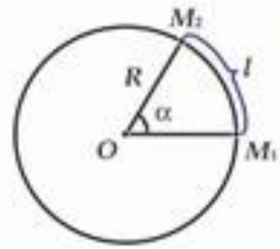
Необходимо провести касательные к окружности в вершинах правильного вписанного многоугольника.

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА



Формула длины окружности: $l = 2\pi R$,
где R – радиус окружности, а $\pi \approx 3{,}14$.

Например, длина окружности радиуса $R = 3$ *см* равна $l = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$ *(см)*



Формула длины дуги окружности с градусной мерой α:

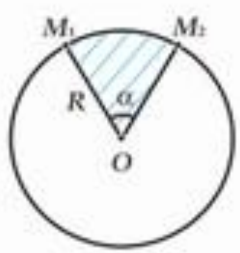
$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$$

Например, длина дуги окружности радиуса 2 *см* с градусной мерой 60° равна:

$$l = \frac{\pi \cdot 2}{180} \cdot 60 = \frac{2\pi}{3}\ (см)$$

Формула площади круга: $S = \pi R^2$

Например, площадь круга радиуса 10 *см* равна $S = \pi \cdot 10^2 = 100\pi\ (см^2)$



Площадь кругового сектора радиуса R, ограниченного дугой с градусной мерой α:

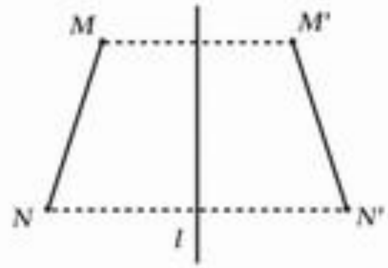
$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$$

Например, площадь кругового сектора радиуса 5 *см*, ограниченного дугой с градусной мерой 120°, равна:

$$S = \frac{\pi \cdot 25}{360} \cdot 120 = \frac{25\pi}{3}\ (см^2)$$

спектр

ПОНЯТИЕ ДВИЖЕНИЯ

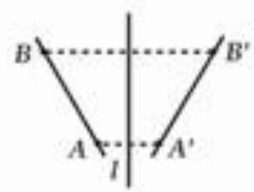


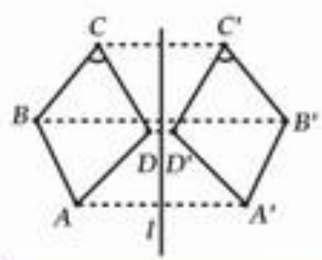
Осевая симметрия обладает тем свойством, что она сохраняет расстояния между точками:

$MN = M'N'$

Движение плоскости – это такое отображение плоскости на себя, которое сохраняет расстояния.

Свойства движения:





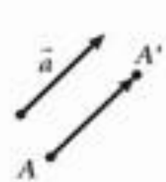
1) Точки прямой при движении переходят в точки прямой и при этом сохраняется порядок их взаимного расположения

2) Прямые при движении переходят в прямые, отрезки в отрезки

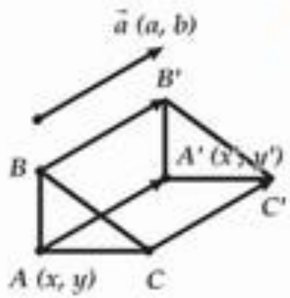
3) При движении сохраняются углы

4) При движении многоугольник переходит в равный ему многоугольник

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС И ПОВОРОТ



Параллельный перенос на вектор $\vec{a}$ – это такое отображение плоскости на себя, при котором каждая точка плоскости A отображается в такую точку A', что $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$.

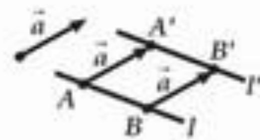


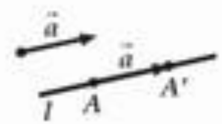
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + a \end{cases}$$

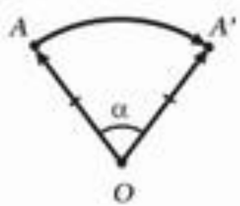
Свойство параллельного переноса:

1) Параллельный перенос – движение

2) При параллельном переносе прямая переходит либо в параллельную прямую, либо в себя.







Поворот плоскости вокруг точки O на угол α – это такое отображение плоскости на себя, при котором каждая точка плоскости A отображается в такую A', что $OA = OA'$ и $\angle AOA' = \alpha$.

Поворот плоскости – это движение.

спектр