



**Удивительный многогранник  
– пирамида!**



# Цель

**Обобщить, расширить и углубить сведения о пирамиде.**



# Задачи:

- Изучить дополнительные источники и собрать исторический и занимательный материал о пирамиде.
- Рассмотреть теоретический материал по пирамиде, выходящий за рамки школьной программы.
- Научиться применять теоремы при решении задач на пирамиду.
- Изготовить развертки и модели разных пирамид.

# Исторические сведения

## Пирамида

«пирамис»

«пирамидос»

«пирамус»

«пирос»

(ребра правильной пирамиды)

«пир»  
(огонь)

(рожь)

# Пирамиды Фараона Хеопса XXVII в до н.э.



Крупнейшая из египетских пирамид, единственная из «Семи чудес света», сохранившееся до наших дней.

# Церковь преображения в Кижях

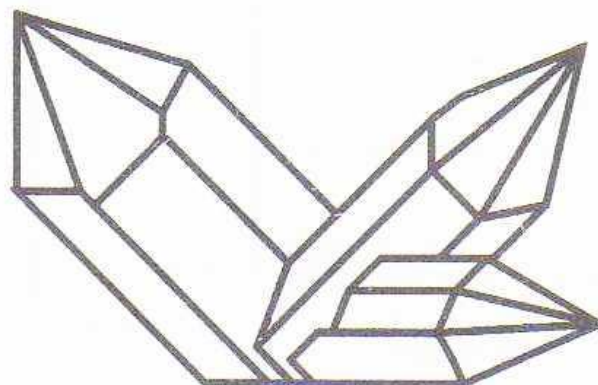
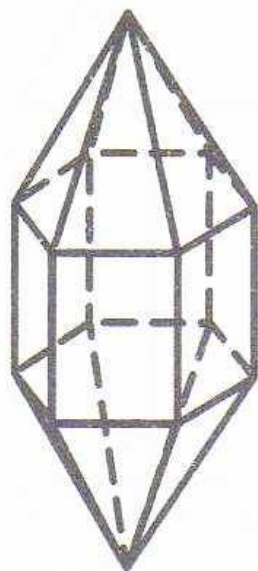


# Церковь в Каменском





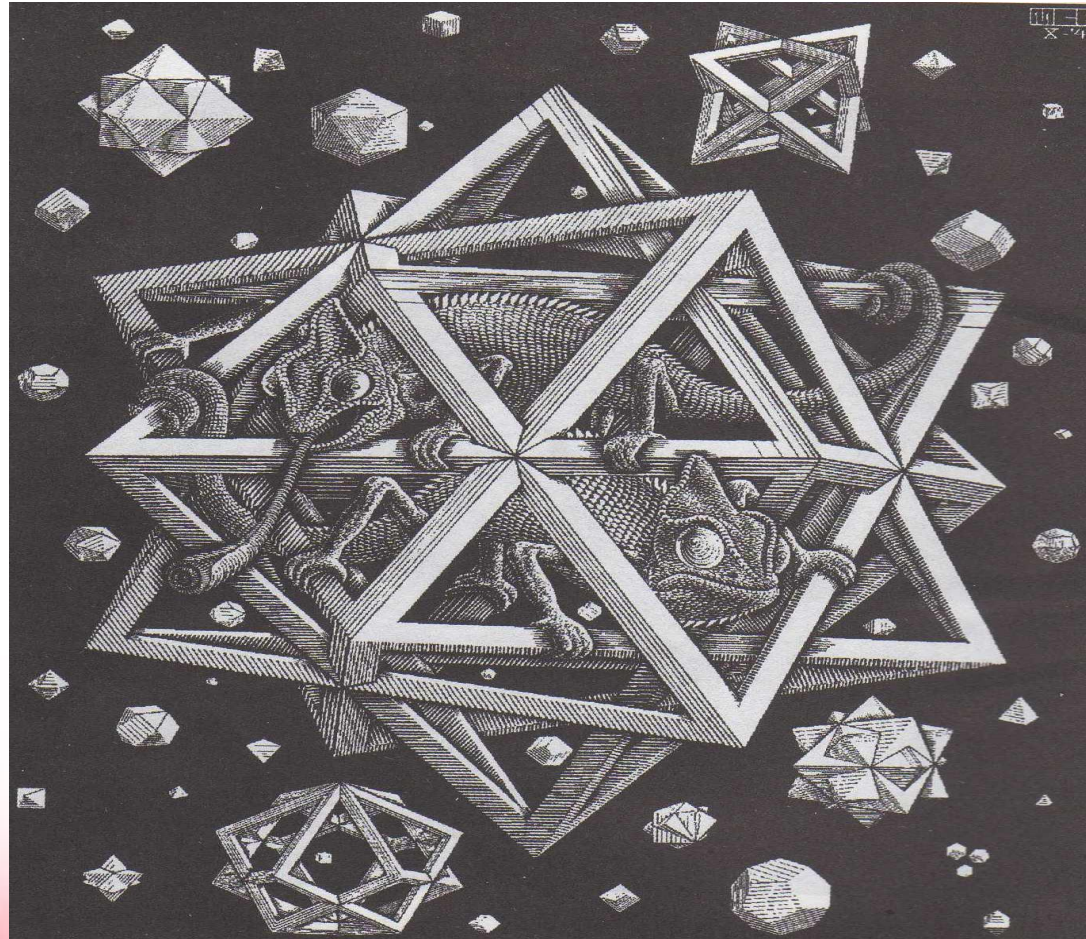
# Пирамида в природе



Кристаллы льда и горного хрусталя  
(кварца)



# Картина М.Эшера, посвященная многогранникам



# Принцип Кавальери

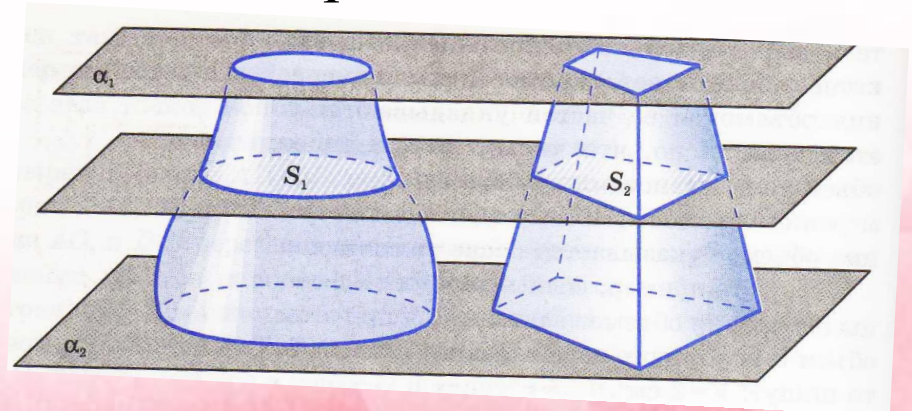


Принцип:

если при пересечении двух тел плоскостями параллельными одной и той же плоскости, в сечении всегда получаются равновеликие между собой фигуры, то объемы этих тел равны.

$$S_1 = RS_2$$

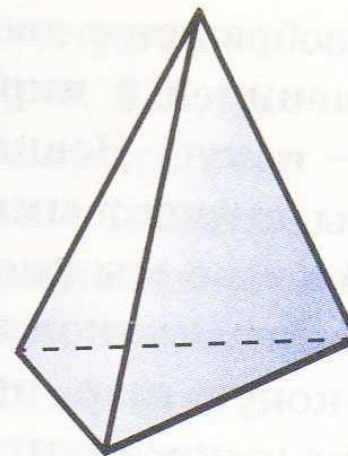
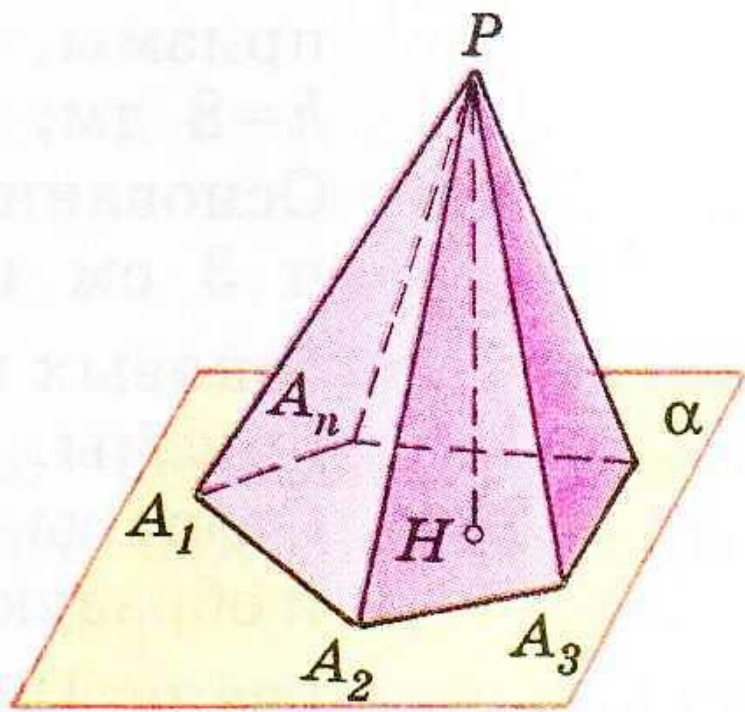
$$V_1 = RV_2$$





# Произвольная пирамида

Пирамида – это многогранник, составленный из  $n$ -угольника  $A_1, A_2, \dots, A_n$  и  $n$  треугольников.



$$S_{\text{пол.}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

# Заполним следующую таблицу

Название многогранника	В	Р	Г
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырехугольная пирамида	5	8	5
n – угольная пирамида	n+1	2n	n+1

$$V-R+G=2$$

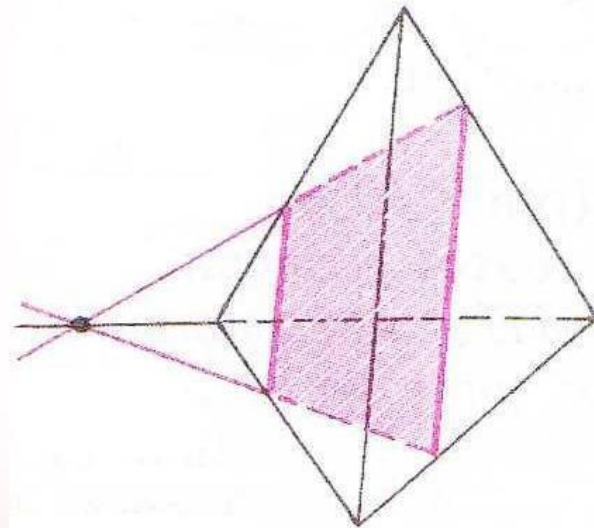
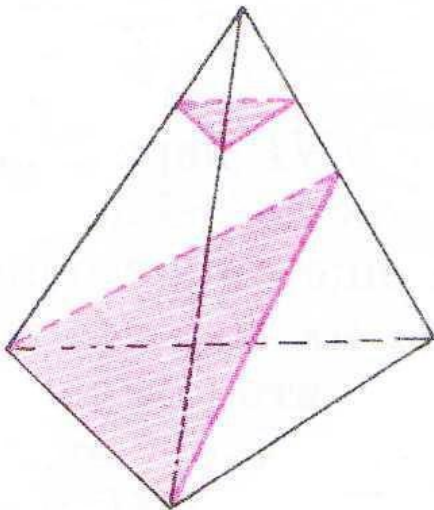
# Леонард Эйлер



1752 год – теорема Эйлера

# Сечение пирамиды

Сечением пирамиды называется многоугольник, который образуется при пересечении пирамиды с секущей плоскостью.






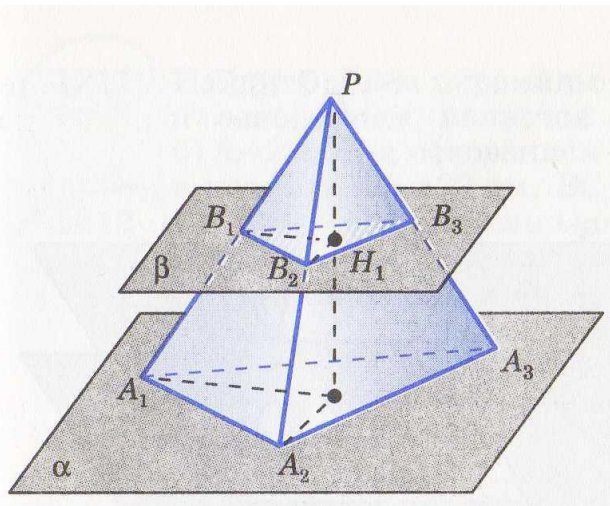
# Утверждение



**Если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то:**

- **Сечение – многоугольник, подобный основанию;**
  - **Площадь сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины.**
- 

# Утверждение для треугольной пирамиды



Дано:  $PA_1A_2A_3$  – пирамида,  
 $\beta \parallel A_1A_2A_3$

$B_1B_2B_3$ -сечение

$S$  - площадь основания

$PH$ - высота,  $H_1 \in PH$

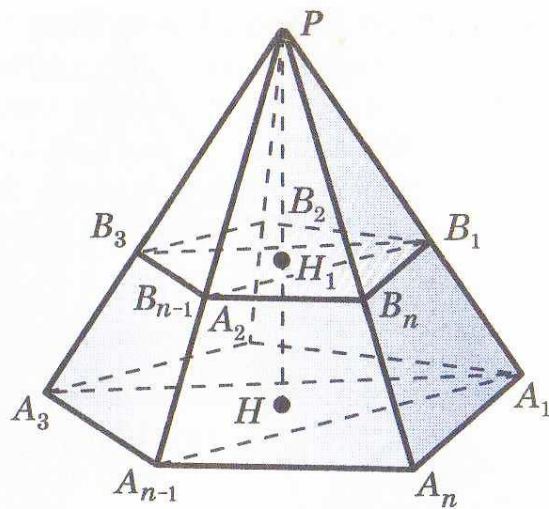
Доказать:  $B_1B_2B_3 \sim \Delta A_1A_2A_3$

-коэффициент подобия

$$S_{B_1B_2B_3} = \left( \frac{PH}{PH_1} \right)^2 \times S$$

Доказательство:

# Утверждение для произвольной пирамиды



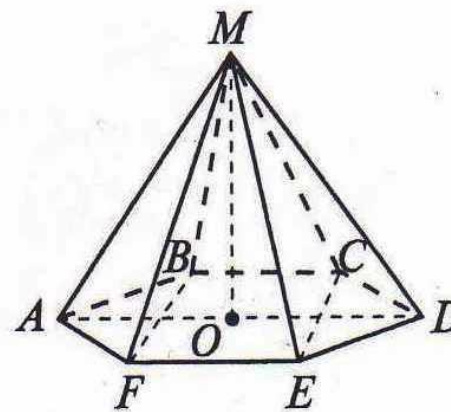
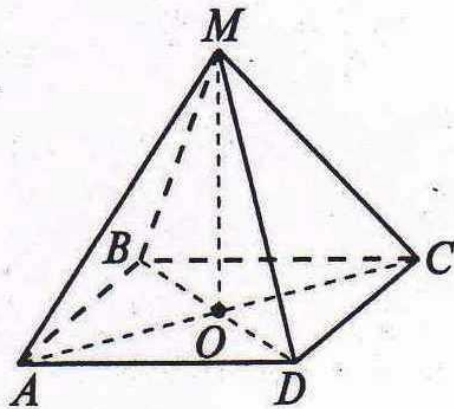
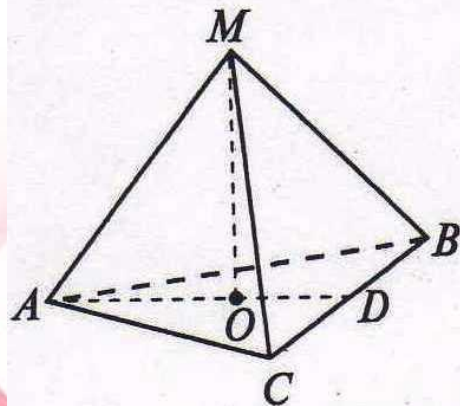
б)

Разобьем пирамиду на треугольные пирамиды с общей высотой PH. Поэтому площадь сечения равна.

$$S_{B_1B_2B_3} + \dots + S_{B_1B_{n-1}B_n} = \left( \frac{PH}{PH} \right)^2 \times \\ \times (S_{A_1A_2A_3} + \dots + S_{A_1A_{n-1}A_n}) = \left( \frac{PH}{PH} \right)^2 \times S$$

# Правильная пирамида

Пирамида называется правильной, если в основании – правильный многоугольник, а отрезок соединяющий вершину с центром основания является высотой.



# Свойства правильной пирамиды



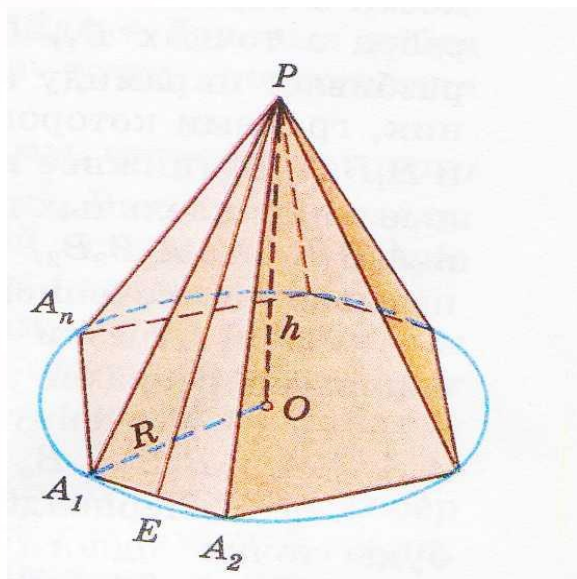
**У правильной пирамиды:**

- боковые ребра равны;
- боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками;
- апофемы равны;
- площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.





# Свойства правильной пирамиды



Дано:  $PA_1A_2\dots A_n$  –  
правильная пирамида  
 $a$  – сторона основания;  
 $h$  – апофема

Доказать:

1.  $PA_1=PA_2=\dots=PA_n$
2.  $PA_1A_2=PA_2A_3=\dots=PA_nA_1$   
– равнобедренные  
треугольники
3.  $PE_1=PE_2=\dots=PE_n$
4.  $S_{бок.} = P_{осн} \cdot h$

Доказательство:

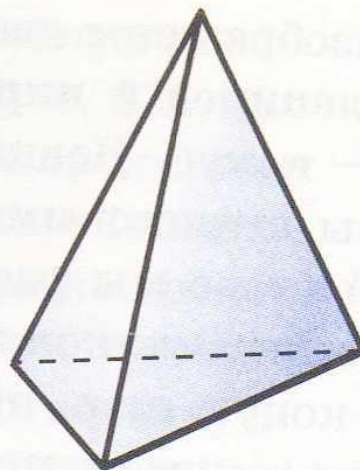




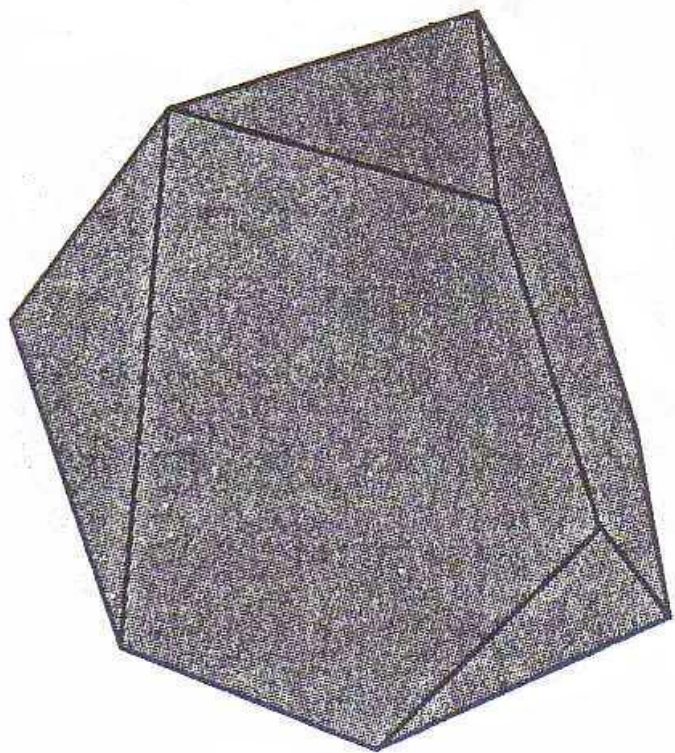
# Правильный тетраэдр



**Тетраэдр, гранями которого являются правильные треугольники, называется правильным.**



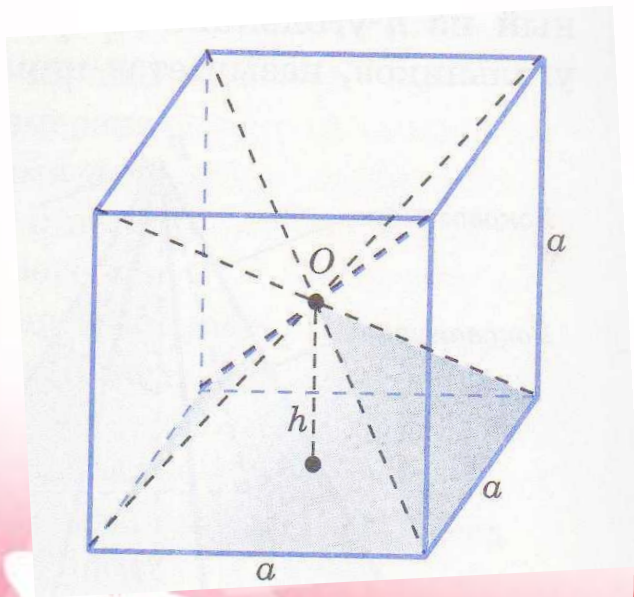
# Усеченный тетраэдр



Если срезать углы тетраэдра плоскостями, каждая из которых отсекает третью часть его рёбер, выходящих из одной вершины, то получим усеченный тетраэдр, имеющий восемь граней.

# Объем пирамиды

Теорема: Объем правильной четырехугольной пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.



Дано: правильная  
четырехугольная пирамида,  
h – высота,  
S – площадь основания

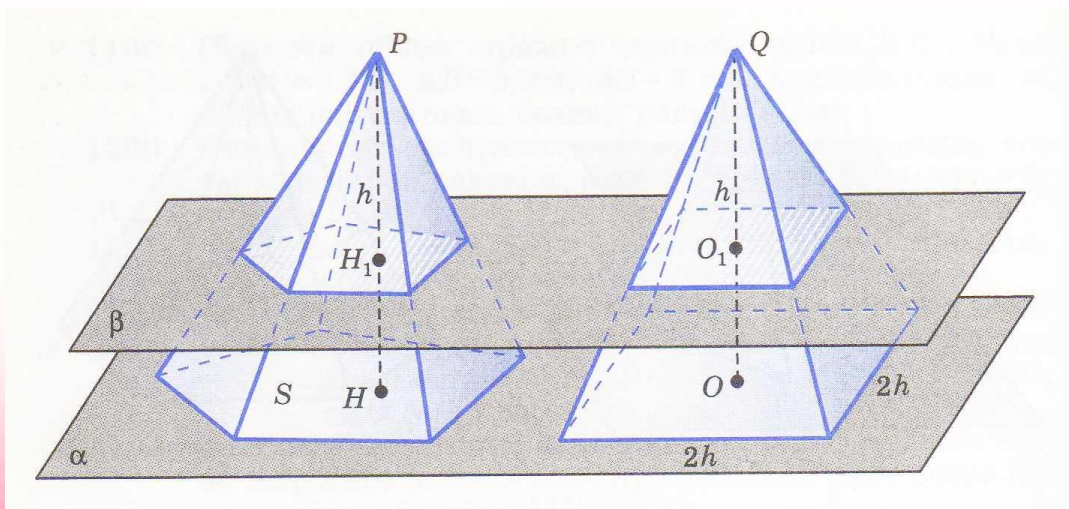
Доказать:

$$V = \frac{1}{3} \times S h$$

Доказательство:

# Объем пирамиды

Теорема: Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту



Дано:  
пирамида,  
 $S$  – площадь,  
 $h$  – высота.

Доказать:

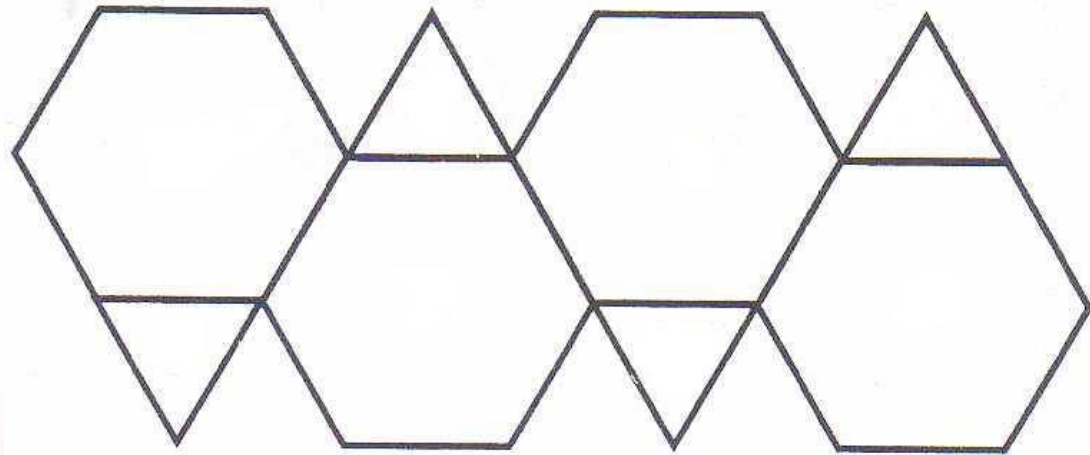
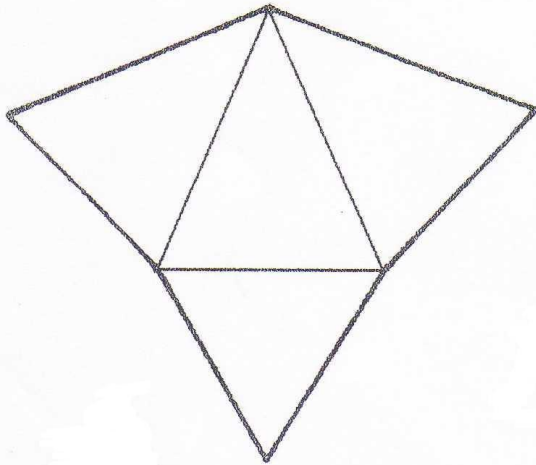
$$V = \frac{1}{3} \times S h$$

Доказательство:

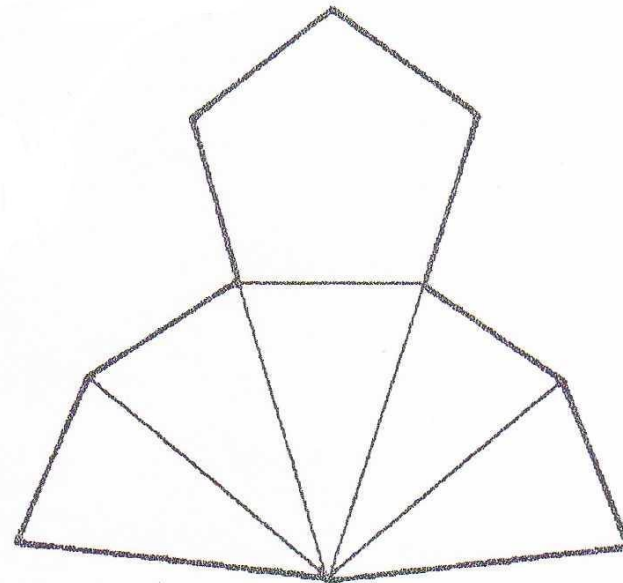
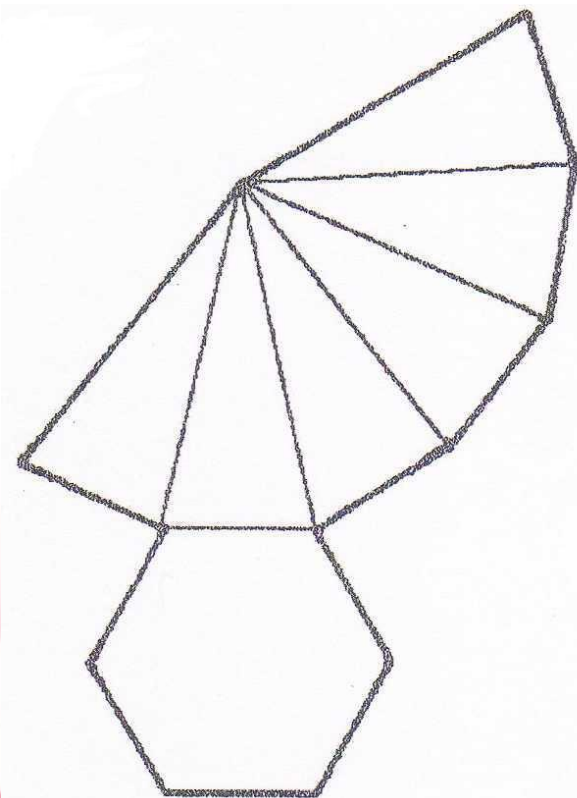


# Моделирование пирамид

Если поверхность пирамиды разрезать по некоторым ребрам и развернуть её на плоскости так, чтобы все многоугольники, входящие в эту поверхность, лежали в данной плоскости, то полученная фигура на плоскости называется разверткой пирамиды.



# Моделирование пирамид





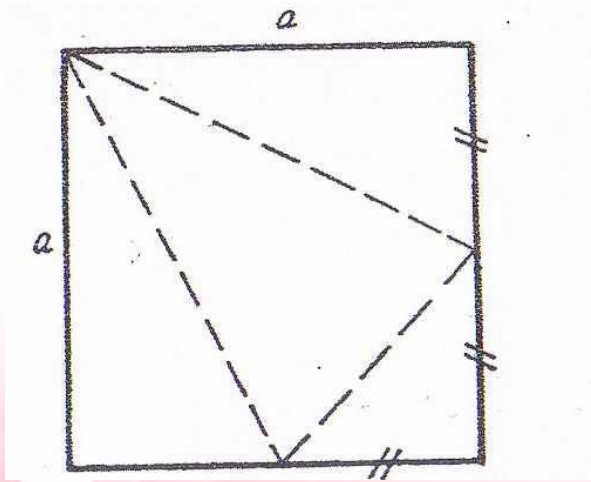
# Задача на развертку

Можно ли квадрат «свернуть» в пирамиду, не разрезая его? Если можно, то найдите объем пирамиды при условии, что сторона квадрата равна  $a$ .

# Задача на развертку

## Решение:

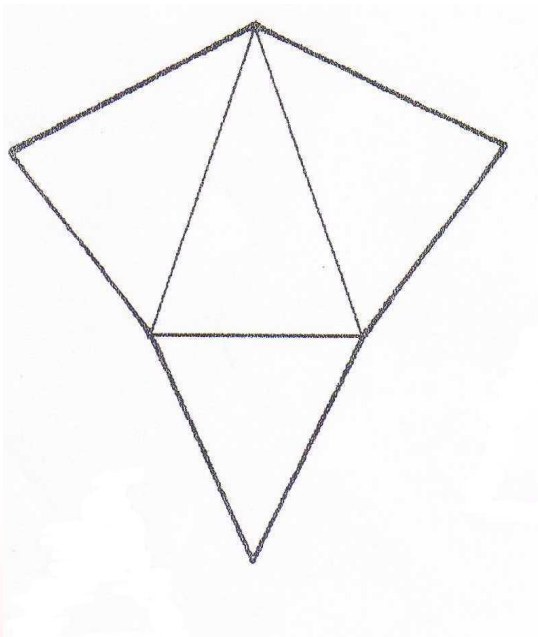
Объем пирамиды проще вычислить, если за основание принять равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами  $a/2$ . Высотой пирамиды будет боковое ребро, равное  $a$ . Объем составит  $a/24$  куб.ед.



$$V = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \right) \times a$$

$$V = \frac{a}{24}$$

**Задача:** Найти площадь развертки правильного тетраэдра с ребром 10 см.



**Решение:**

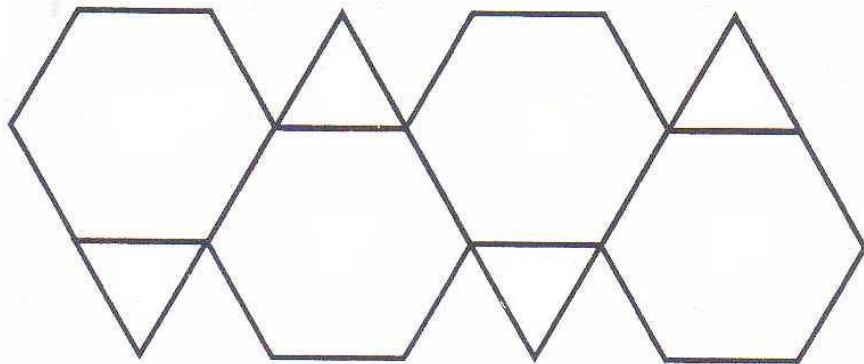
$$n = 3, a = 10$$

$$S_{\text{полн.}} = 4 \times \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \sqrt{3}$$

$$S_{\text{полн.}} = 10^2 \sqrt{3} = 100\sqrt{3}$$

**Задача:** Найти площадь развертки усеченного тетраэдра с ребром 3,5 см

**Решение:**



$$a = 3,5 \text{ см}$$

$$S_{\text{полн.}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \times 4 + \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2} \times 4$$


$$S_{\text{полн.}} = 3,5^2 \sqrt{3} + 6 \times 3,5^2 \sqrt{3}$$

$$S_{\text{полн.}} = 85,75 \sqrt{3} (\text{см}^2)$$

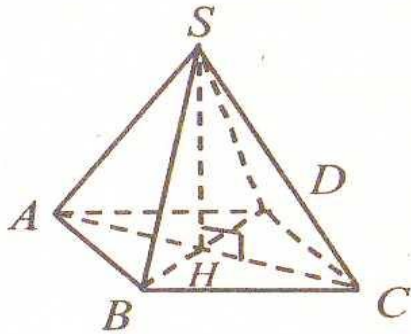
# Задачи



**Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 5 см, а одна из диагоналей равна 8 см. Найдите боковые ребра пирамиды, если её высота проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 7 см.**



# Задачи



Дано:  $SH=7$ ,  $AB=5$ ,  $DB=8$ .

Найти: боковые ребра.

Решение:

По теореме Пифагора:

$$AH = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{DB}{2}\right)^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 \text{ см};$$

$$SA = SC = \sqrt{AH^2 + SH^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58} \text{ см};$$

$$SB = SD = \sqrt{DH^2 + SH^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65} \text{ см}.$$




# Задачи



Найдите объем пирамиды с высотой  $h$ , если  $h = 2$  м, а основанием является квадрат со стороной 3 м

Решение:

Так как  $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \times h$ , а в основании лежит квадрат, то  $V = \frac{1}{3} \times 3^2 \times 2 = 6 \text{ м}^3$

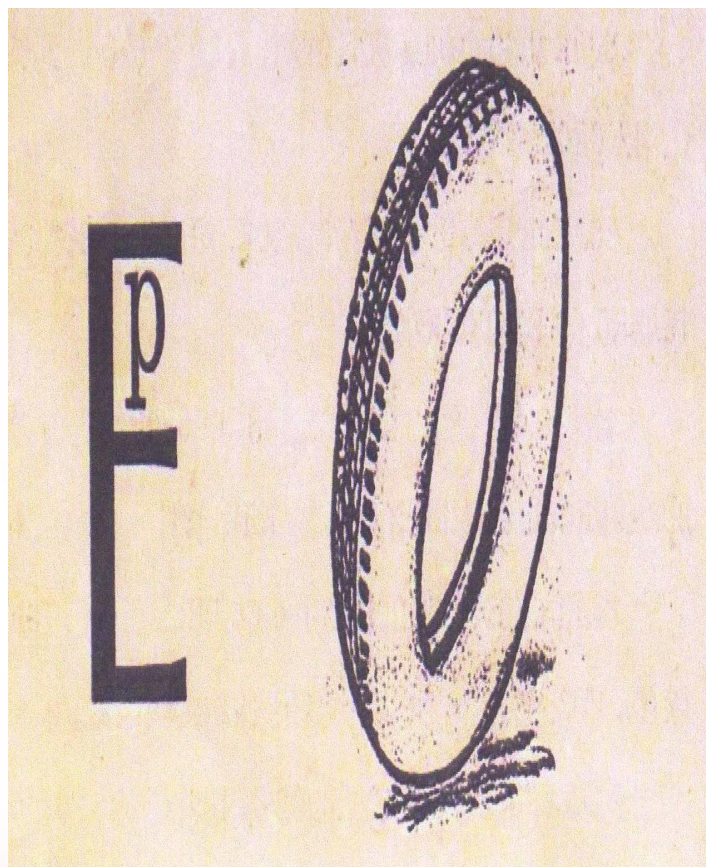


# Ребусы



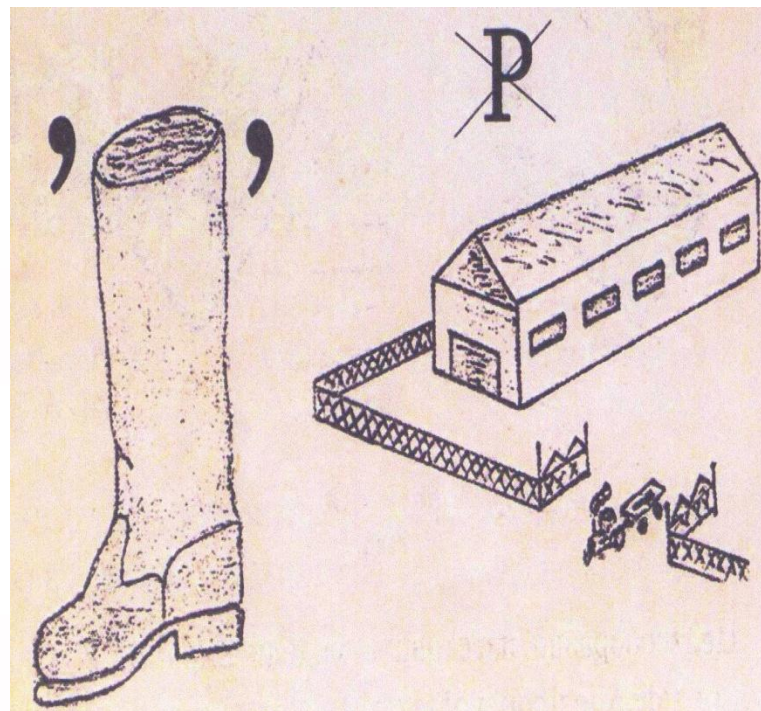
Пирамида

# Ребусы



Вершина

# Ребусы



Апофема




# СТИХ



## О пирамидах

**В Древнем Египте жил египтянин,  
Был фараон он, а может, крестьянин.  
Как-то собрал он свои неликвиды,  
Взял и построил из них пирамиды.**

**Как бы то ни было, но отчего-то  
Очень неплохо он с них заработал.  
Тот египтянин теперь знаменит:  
Гений финансовых он пирамид.**






# **Заключение**




**На изучение темы «Пирамида» в 9 классе отведен один урок. На уроке я получила начальные сведения о пирамиде. В данной работе я попыталась расширить свои знания. Мною был собран исторический материал о пирамиде и её объеме и занимательный материал: загадки, ребусы, кроссворды.**



# Заключение




Так же я рассматривала теоретические вопросы, выходящие за рамки школьного курса геометрии 9 класса. Я изготовила развертки и модели различных пирамид, что помогает развитию пространственного воображения. При решении задач по теме «Пирамида» я повторила и обобщила знания по планиметрии. Материал, собранный в данной работе, поможет мне в дальнейшем изучении стереометрии в 10-11 классах.




# Литература



- **Геометрия, 7-9: Учебник для общеобразовательного учреждений/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 14-е изд. – М: Просвещение 2004-384с.**
  - **Геометрия, 10-11: Учебник для общеобразовательного учреждений/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 13-е изд. – М: Просвещение 2004-206с.**
  - **Зив Б.Г. Задачи к урокам геометрии 7-11 класс. – С. – Петербург, 1998 НПО «Мир и семья – 95»- 624с.**
  - **Глейзер Г.И. История математики в школе: IX – X класс Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1983 – 351с.**
- 

# Литература



- Глейзер Г.И. История математики в школе: VII – VIII класс Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982 – 240с.
  - Игнатьев Е.И. В царстве смекалки / Под редакцией М. К. Потанова – 4-е изд. – М.: Наука 1984, 192с.
  - Энциклопедический словарь юного математика, - М.: Педагогика, 1985
  - Смирнова И.М. В мире многогранников – М.: Просвещение, 1995
  - Веннинджер М. Модели Многогранников – М.Мир, 1974
  - Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп
  - Штейнгауз Г. Сто задач. – М: Наука, 1982
- 

Спасибо за внимание!

