

# Алгебра и начала математического анализа 11 класс

«Исследование функций и построение  
их графиков»

Автор презентации:

учитель математики МБОУ  
«Малошильнинская СОШ»  
Тукаевского района  
Республики Татарстан

Киямова Фируза Мухамматовна



# Алгоритм исследования функции

Для исследования функции необходимо  
пройти следующие этапы:

1. Находим область определения функции:

$$D(f)=?$$

Областью определения функции  $y=f(x)$ , заданной аналитически, называют множество всех действительных значений независимой переменной  $x$ , для каждого из которых функция принимает действительные значения.

Находим область изменения функции:

**$E(f)$ -?**

Областью изменения функции  $f(x)$  называют множество всех чисел  $f(x)$ , соответствующих каждому  $x$  из области определения функции.

## 2. Выясняем четность функции.

- Если  $f(-x)=f(x)$ , то функция  $f(x)$  называется четной. График четной функции симметричен относительно оси ординат (оси  $Oy$ ).
- Если  $f(-x)=-f(x)$ , то функция  $f(x)$  называется нечетной. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

### 3. Выясняем периодичность функции

Если  $f(x+T)=f(x)$  при некотором  $T>0$ , то функция  $y=f(x)$  называется периодической. График периодической функции имеет одну и ту же форму на каждом из отрезков  $\dots, [-2T; -T], [-T; 0], [0; T], [T; 2T], \dots$ .

Поэтому достаточно построить график на каком-нибудь одном таком отрезке и затем воспроизвести полученную кривую на остальных отрезках.

## 4. Находим точки максимума и минимума функции и интервалы возрастания и убывания (интервалы монотонности).

Для этого:

- вычисляем производную  $f'(x)$  и находим критические точки функции, т.е. точки, в которых  $f'(x)=0$  или не существует;
- определяя знак производной, находим интервалы возрастания и убывания функции: если  $f'(x)>0$ , то функция возрастает, если  $f'(x)<0$ , то функция убывает;
- если производная меняет знак при переходе через критическую точку  $x_0 \in D$ , то  $x_0$  – точка экстремума: если производная меняет знак с «минуса» на «плюс» – то  $x_0$  – точка минимума, если же с «плюса» на «минус» – то точка максимума. Если производная сохраняет знак при переходе через критическую точку, то в этой точке экстремума нет.



## 5. Находим точки перегиба функции и интервалы выпуклости вверх/вниз.

- Для этого:
- вычисляем вторую производную  $f''(x)$  и находим точки, принадлежащие области определения функции, в которых  $f'(x)=0$  или не существует;
- определяя знак второй производной, находим интервалы выпуклости и вогнутости:
- если  $f''(x) < 0$ , то график функции имеет выпуклость вверх,
- если  $f''(x) > 0$ , то график функции имеет выпуклость вниз;
- если вторая производная меняет знак при переходе через точку
- $x_0 \in D$ , в которой  $f'(x)=0$  или не существует, то  $x_0$  – точка перегиба.

# 6. Находим асимптоты функции.

- Вертикальные:

находим односторонние пределы в граничных точках

$$\lim_{\substack{n \rightarrow a \\ n > a}} f(x) = +\infty \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{n \rightarrow a \\ n > a}} f(x) = -\infty.$$

Если такие пределы существуют, то прямая  $x=a$  является вертикальной асимптотой графика функции  $y=f(x)$

- Наклонные асимптоты:

Если выполняется условие  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$ ,

то прямая  $y = kx + b$  является асимптотой функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Коэффициенты  $k$  и  $b$  можно найти следующим образом:

- $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$                        $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$

7. Есть ли у функции промежутки, где она возрастает (убывает)?

- $f'(x) > 0$ , функция возрастающая
- $f'(x) < 0$ , функция убывающая

## 8. Есть ли у нее промежутки знакопостоянства?

- $f'(x) = 0$  на промежутке,  $\Rightarrow$  функция  $f(x)$  постоянная на этом промежутке.
- Если в точке  $x_0$  производная меняет знак с «+» на «-», то  $x_0$  - *точка локального максимума*;
- Если в точке  $x_0$  производная меняет знак с «-» на «+», то  $x_0$  - *точка локального минимума*.

# Пример

$$y = x/x^2 - 1$$

- 1. Знаменатель выражения  $x/(x^2 - 1)$  обращается в нуль при  $x = -1$  и при  $x = 1$ , поэтому  $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ .
- 2.  $E(f) = \mathbf{R}$  (видно из дальнейшего исследования)
- 3.  $f(-x) = -f(x)$  - функция нечетная.
- 4. Функция неперриодическая.
- 5. Производная функции в области определения:  
 $f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$  и  $f'(x) < 0$  во всей области определения  $\Rightarrow$  функция непрерывна и возрастает во всей области определения, точек локального экстремума нет.
- 6.  $f''(x) = 2x(x^2 + 3)/(x^2 - 1)^3$   
обращается в нуль в точке  $x=0$

# Знак второй производной $f''(x)$

$x$		$(-1;0)$	$(0;1)$	
$f''(x)$	-	+	-	+

Вторая производная меняет знак только в одной точке  $x=0 \Rightarrow x_0=0$   
– точка перегиба.

На интервалах  $(-\infty;-1)$  и  $(0;1)$  график функции имеет выпуклость  
вверх, а на интервалах  $(-1;0)$  и  $(1; +\infty)$  - выпуклость вниз.

Вычислим координаты нескольких точек:

$x$	0	$1/2$	2	3
$f(x)$	0	$-2/3$	$2/3$	$3/8$

# График имеет вид

