Алгебра и начала математического анализа 11 класс

«Исследование функций и построение их графиков»

Автор презентации:

учитель математики МБОУ «Малошильнинская СОШ» Тукаевского района Республики Татарстан

Киямова Фируза Мухamматовна

Алгоритм исследования функции

Для исследования функции необходимо пройти следующие этапы:

1. Находим область определения функции:

D(f)=?

Областью определения функции y=f(x), заданной аналитически, называют множество всех действительных значений независимой переменной x, для каждого из которых функция принимает действительные значения.

Находим область изменения функции: **E(f)-?**

Областью изменения функции f(x) называют множество всех чисел f(x), соответствующих каждому x из области определения функции.

2. Выясняем четность функции.

- Если **f(-x)=f(x)**, то функция **f(x)** называется ***четной***. График четной функции симметричен относительно оси ординат (оси Oy).
- Если **f(-x)=-f(x)**, то функция **f(x)** называется ***нечетной***. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

3.Выясняем периодичность функции

Если **f(x+T)=f(x)** при некотором **T>0**, то функция **y=f(x)** называется ***периодической***. График периодической функции имеет одну и ту же форму на каждом из отрезков

…, [-2T; -T], [-T; 0], [0; T], [T; 2T], … .

Поэтому достаточно построить график на каком-нибудь одном таком отрезке и затем воспроизвести полученную кривую на остальных отрезках.

4. Находим точки максимума и минимума функции и интервалы возрастания и убывания (интервалы монотонности).

Для этого:

- вычисляем производную **f'(x)** и находим критические точки функции, т.е. точки, в которых **f'(x)=0** или не существует;
- определяя знак производной, находим интервалы возрастания и убывания функции: если **f'(x)>0**, то функция возрастает, если **f'(x)<0**, то функция убывает;
- если производная меняет знак при переходе через критическую точку $x_0 \in D$, то x_0 – *точка экстремума*: если производная меняет знак с «минуса» на «плюс» – то x_0 – *точка минимума*, если же с «плюса» на «минус» – то *точка максимума*. Если производная сохраняет знак при переходе через критическую точку, то в этой точке экстремума нет.

5. Находим точки перегиба функции и интервалы выпуклости вверх/вниз.

- Для этого:
- <u>вычисляем вторую производную</u> **$f''(x)$** и находим точки, принадлежащие области определения функции, в которых **$f''(x)=0$** или не существует;
- определяя знак второй производной, *находим интервалы выпуклости и вогнутости*:
- если **$f''(x)<0$**, то *график функции имеет выпуклость вверх*,
- если **$f''(x)>0$**, то *график функции имеет выпуклость вниз;*
- если вторая производная меняет знак при переходе через точку
- **$x_0 \in D$**, в которой **$f''(x)=0$** или не существует, то **x_0** – *точка перегиба*.

6. Находим асимптоты функции.

- Вертикальные:

находим односторонние пределы в граничных точках

$\lim\limits_{\substack{n\to a\\ n>a}} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{\substack{n\to a\\ n>a}} f(x) = -\infty$.

Если такие пределы существуют, то прямая x=a является вертикальной асимптотой графика функции y=f(x)

- Наклонные асимптоты:

Если выполняется условие $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$,

то прямая $y = kx + b$ является асимптотой функции $y = f(x)$ при $x\to \pm\infty$.

Коэффициенты k и b можно найти следующим образом:

- $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\qquad$ $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx)$

7. Есть ли у функции промежутки, где она возрастает (убывает)?

- **$f'(x) > 0$**, функция возрастающая
- **$f'(x) < 0$**, функция убывающая

8. Есть ли у нее промежутки знакопостоянства?

- **f'(x) = 0** на промежутке, => функция **f(x)** постоянная на этом промежутке.
- Если в точке $\mathbf{x_0}$ производная меняет знак с «+» на «-», то $\mathbf{x_0}$ - *точка локального максимума*;
- Если в точке $\mathbf{x_0}$ производная меняет знак с «-» на «+», то $\mathbf{x_0}$ - *точка локального минимума*.

Пример

$y = x/x^2 - 1$

- 1. Знаменатель выражения $x/(x^2 - 1)$ обращается в нуль при $x = -1$ и при $x = 1$, поэтому **D(f)** = $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.
- 2. **E(f) = R** (видно из дальнейшего исследования)
- 3. **f(-x) = -f(x)** - функция нечетная.
- 4. Функция непериодическая.
- 5. Производная функции в области определения:

  $f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$ и $f'(x) < 0$ во всей области определения =>функция непрерывна и возрастает во всей области определения, точек локального экстремума нет.
- 6. $f''(x) = 2x(x^2 + 3)/(x^2 - 1)^3$

обращается в нуль в точке $x=0$

Знак второй производной **f''(x)**

x		(-1;0)	(0;1)	
f''(x)	-	+	-	+

Вторая производная меняет знак только в одной точке x=0 => xо=0 – точка перегиба.

На интервалах (-∞;-1) и(0;1) график функции имеет выпуклость вверх, а на интервалах (-1;0) и (1; +∞) - выпуклость вниз.

Вычислим координаты нескольких точек:

x	0	1/2	2	3
f (x)	0	-2/3	2/3	3/8

График имеет вид

•