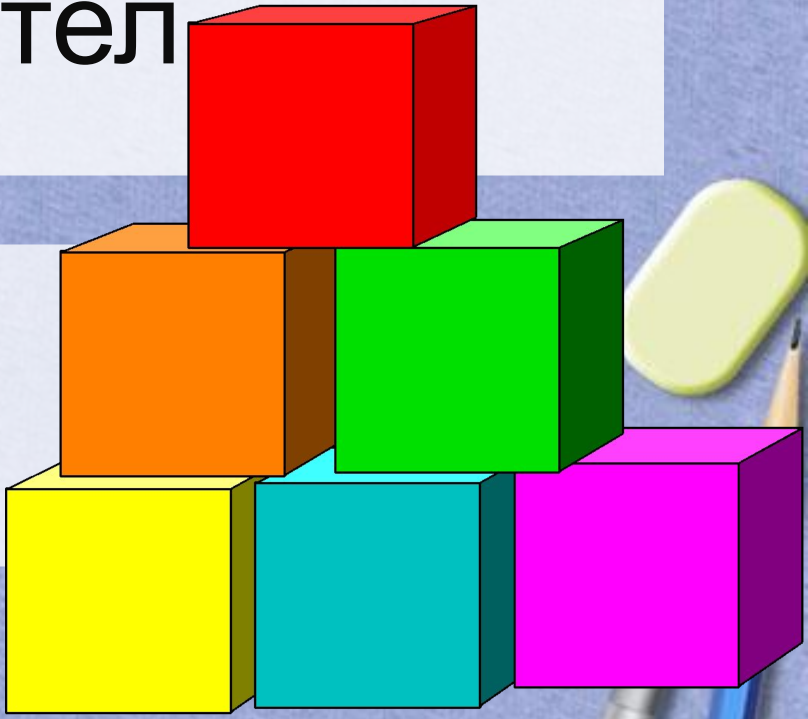
Объемы тел

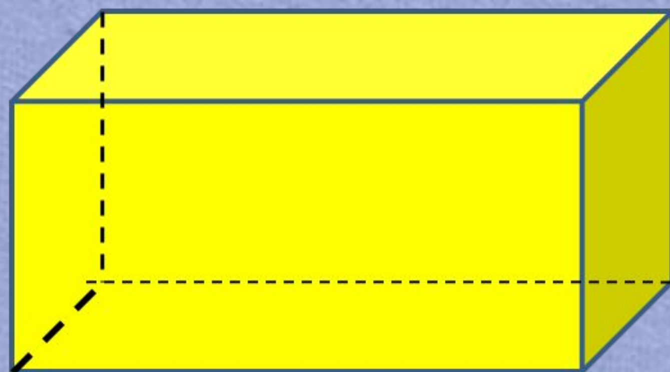


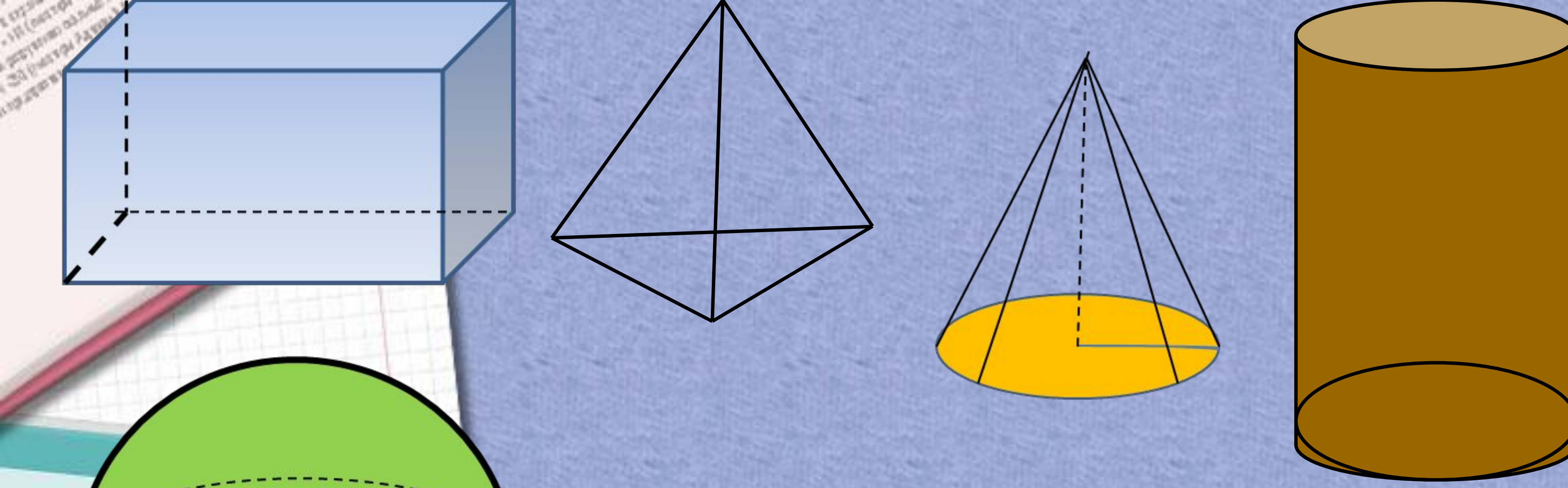
Тема урока:

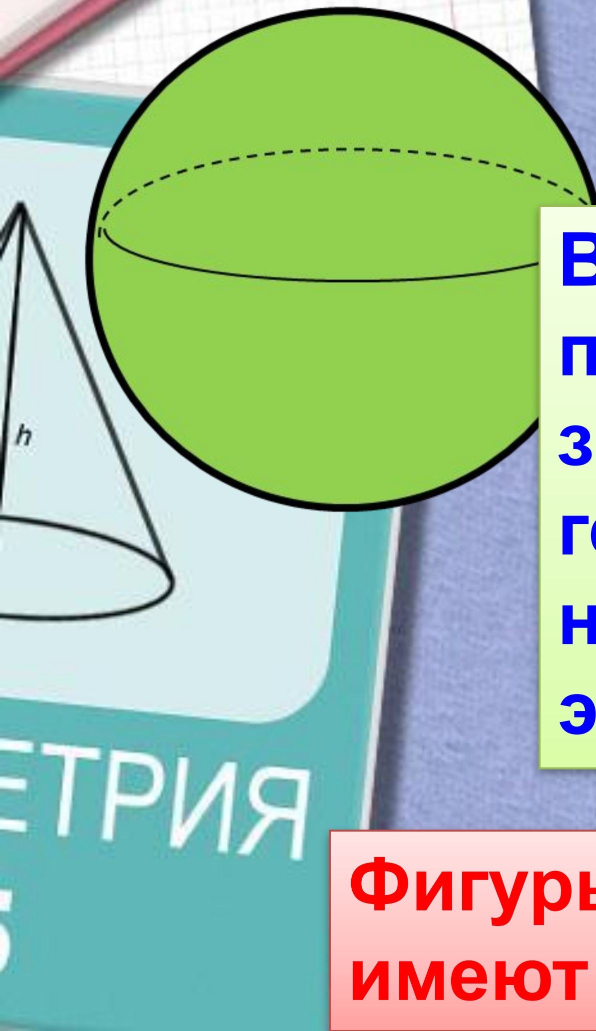
Объем прямоугольного параллелепипеда

Цель:

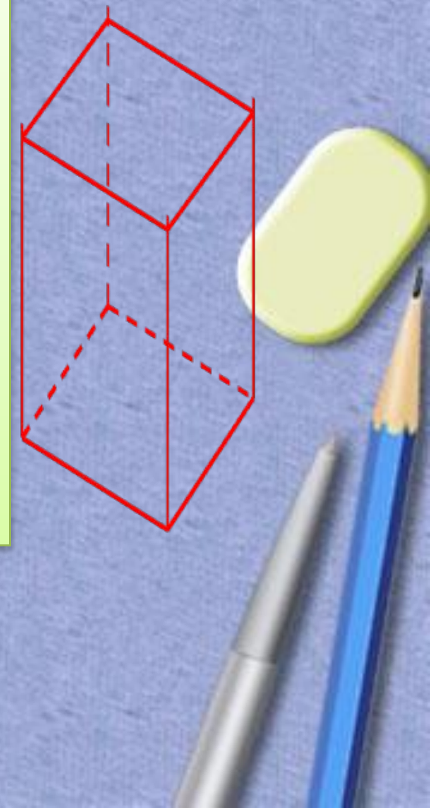
Ввести понятие объема;
Единицы измерения объема;
Свойства объемов
Объем прямоугольного параллелепипеда
Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник







Величина части пространства, занимаемого геометрическим телом , называется объемом этого тела

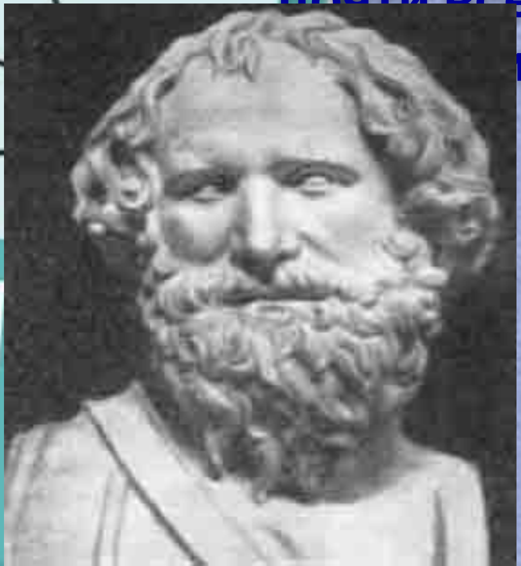


Фигуры в пространстве имеют объем

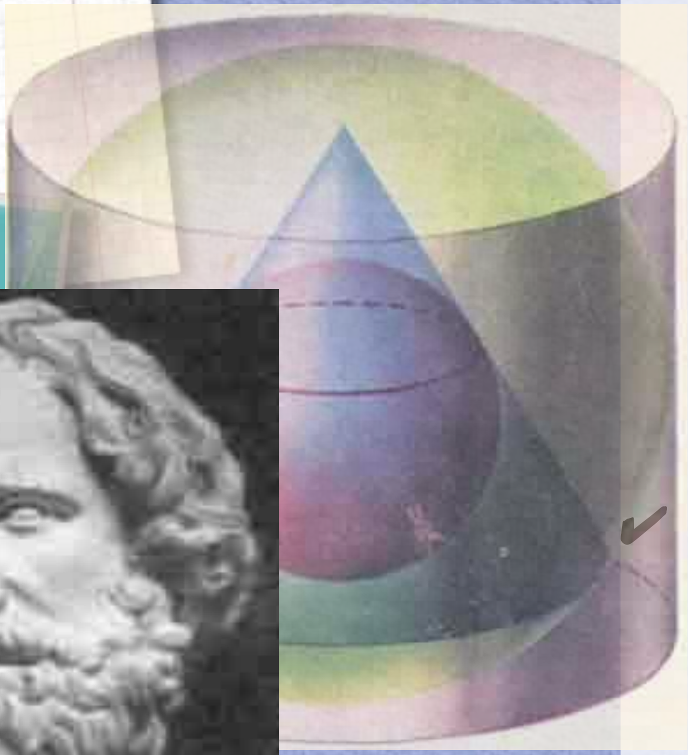
– Поиск формул, позволяющих вычислять объемы различных тел, был долог.

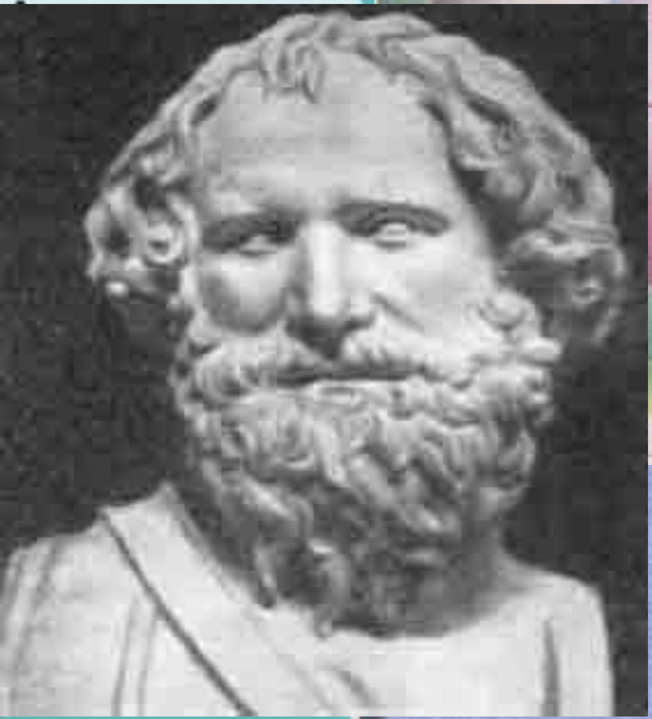
В древнеегипетских папирусах, в вавилонских клинописных табличках встречаются правила для нахождения объема усеченной пирамиды, но не сообщаются правила для вычисления объема полной пирамиды.

Определять объемы призмы, пирамиды, цилиндра и конуса умели древние греки еще задолго до Архимеда. Но только он имел общий метод, позволяющий определить любую площадь или объем. Идеи Архимеда легли в основу интегрального исчисления. Сам ученый определил с помощью своего метода площади объемы почти всех тел, которые рассматривались в античной [illegible]ике.



АРХИМЕД (ок. 287-212 гг. до н.э.)





- На могильной плите Архимеда, как завещал ученый, был изображен цилиндр с вписанным шаром, а эпитафия говорила о величайшем открытии Архимеда - о том, что объемы этих тел относятся как 3: 2.
- ***Когда Римский оратор и общественный деятель Цицерон, живший в 1 в. до н.э., был в Сицилии, он еще видел этот заросший кустами и терновником памятник с шаром и цилиндром.***

Объемы зерновых амбаров и других сооружений в виде кубов, призм и цилиндров египтяне и вавилоняне, китайцы индийцы вычисляли путем умножения площади основания на высоту. Однако древнему Востоку были известны только отдельные правила, найденные опытным путем. В более позднее время был найден общий подход к вычислению объемов многогра

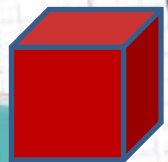
Демокрит

Евдокс

Герон

Среди замечательных греческих ученых 5-4 в до н. э., которые разрабатывали теорию объемов были Демокрит из Абдеры и Евдокс Книдский. Евклид не применяет термин «объем». Для него термин «куб» означает термин «объем» в 9 книге «Начал» изложены среди других теоремы об объемах.

За единицу измерения объема принимается куб, ребро которого равно единице измерения отрезков.



1 см

$1 см^3$

Кубический сантиметр – это куб с ребром 1 см.

$1 м^3$

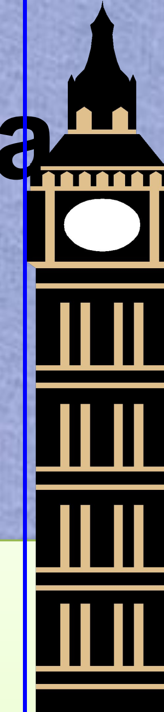
$1 дм^3$

1 м

Кубический метр – это куб с ребром 1 м.

Английские меры объема

- **Бушель** - 36,4 дм^3
- **Галлон** -4,5 дм^3
- **Баррель** (сухой)- 115,628 дм^3
- **Баррель** (нефтяной)- 158,988 дм^3
- **Английский баррель** для сыпучих веществ 163,65 дм^3



Русские меры объема

- Ведро - 12 дм^3
- Бочка - 490 дм^3
- Штоф - 1,23 дм^3 = 10 чарок
- Чарка -0,123 дм^3=0,1 штофа= = 2 шкалика
- Шкалик -0,06 дм ^{3} = 0,5 чарки

$$1м^3 = 10*10*10 = 1000дм^3$$

$$1м^3 = 100*100*100 = 1000000см^3$$

$$1дм^3 = 10*10*10 = 10000дм^3$$

$$1литр = 1дм^3$$

$$1гектолитр = 100литров$$

Свойства объемов

1. Объем тела есть неотрицательное число;

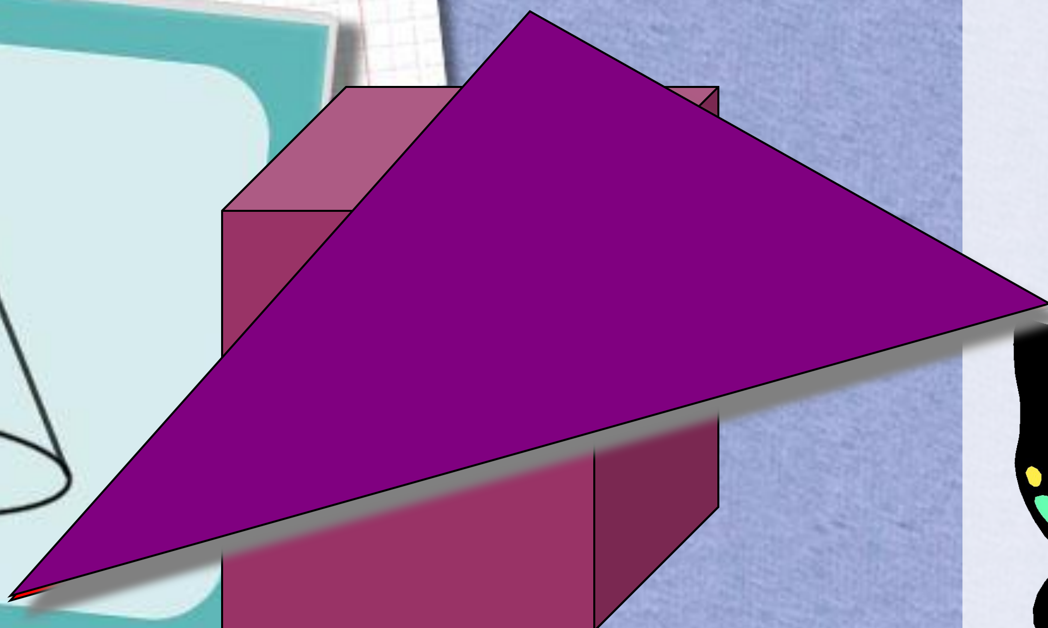
2. Равные тела имеют равные объемы

Какие тела называются равными?

3. Если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел

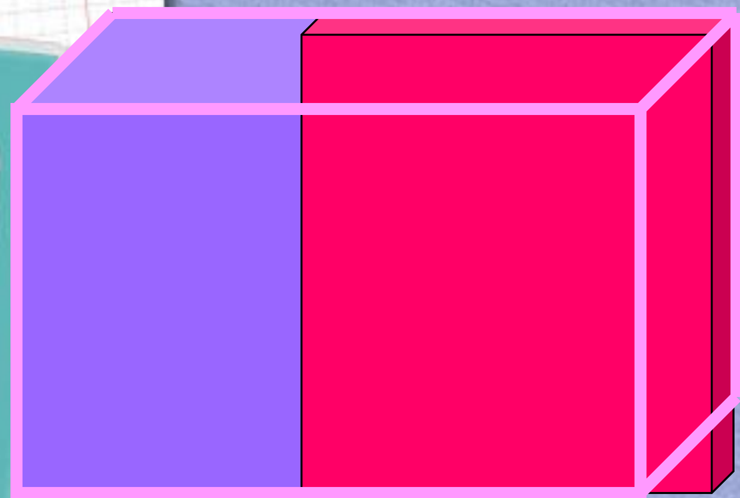
Если тело имеет объем V_1 и содержится в теле, имеющем объем V_2, то $V_1 < V_2$.

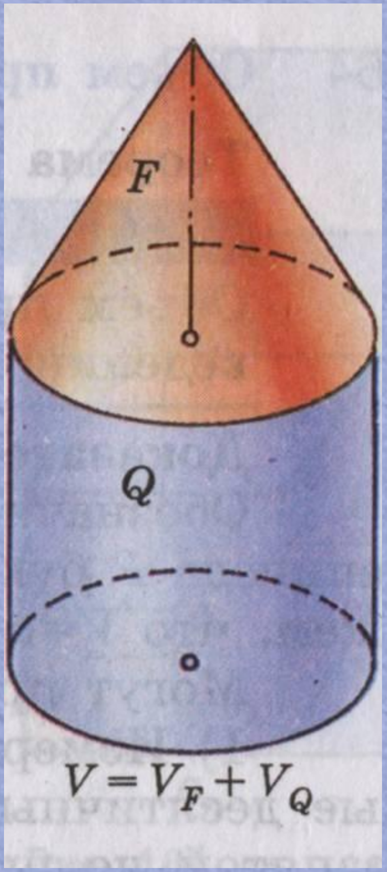
Равенство двух тел, в стереометрии определяется так же, как и в планиметрии:



- Два тела называют равными, если их можно совместить наложением.

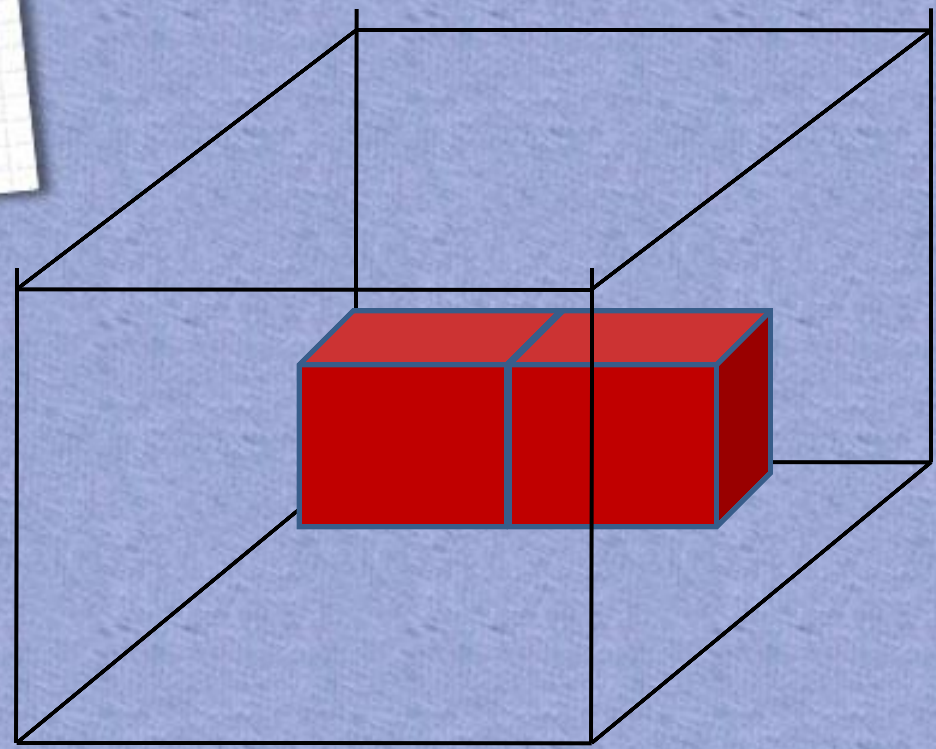
2^0. Если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел.





Следствие:

Объем куба с ребром $\frac{1}{n}$ равен $\frac{1}{n^3}$



№ 647

Дано: тело R состоит из те P и Q. V_1 и V_2

а) тела не имеют общих точек

б) тела имеют общую часть объем которой равен $\frac{1}{3}V_1$

$$V = V_1 + V_2$$

$$V = V_1 + V_2 - \frac{1}{3}V_1 = \frac{2}{3}V_1 + V_2$$

Объем прямоугольного параллелепипеда

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений

?

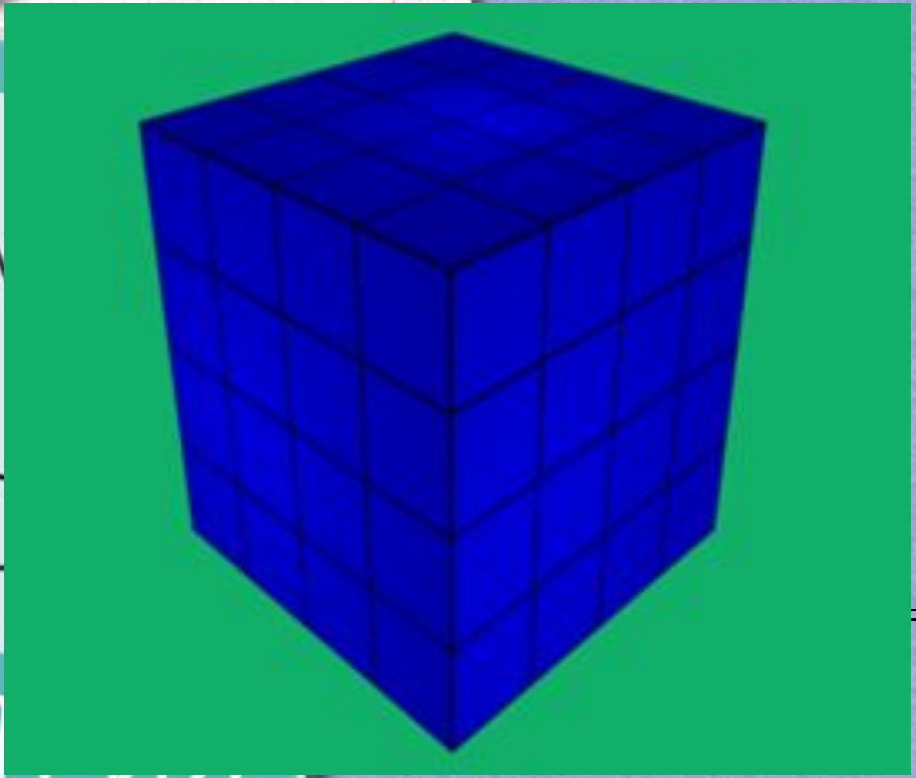
Что такое измерения параллелепипеда

?

$$V=abc$$

Объем прямоугольного параллелепипеда.

Теорема. ***Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.***



Дано: параллелепипед, a, b, c его измерения. V - объем

Доказать: V = abc.

✔ **Доказательство:**

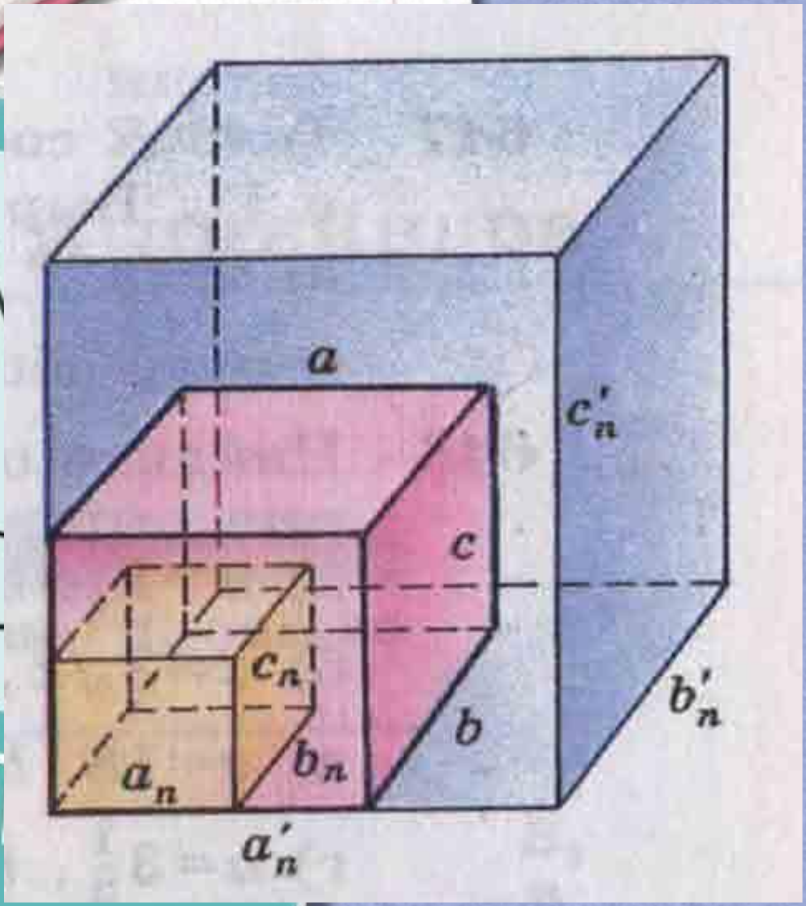
1 сл. Пусть a, b, c - конечные десятичные дроби ($n \geq 1$) . Числа $a \cdot 10^n$, $b \cdot 10^n$, $c \cdot 10^n$ - целые .

Разобьем каждое ребро параллелепипеда на равные части длины $\frac{1}{10^n}$ и через точки разбиения проведем плоскости, перпендикулярные к этому ребру. Параллелепипед разобьется на $abc \cdot 10^{3n}$ равных кубов с ребром $\frac{1}{10^n}$. Т.к. объем каждого такого куба равен $\frac{1}{10^{3n}}$, то объем всего параллелепипеда равен $abc \cdot 10^{3n} \cdot \frac{1}{10^{3n}} = abc$

Итак, V = abc.

2 сл.Пусть a, b, c –бесконечные десятичные дроби.

Рассмотрим конечные десятичные дроби a_n, b_n, c_n



$a_n b_n c_n \le abc \le a_n' b_n' c_n'$, где

Объем V параллелепипеда P заключен между

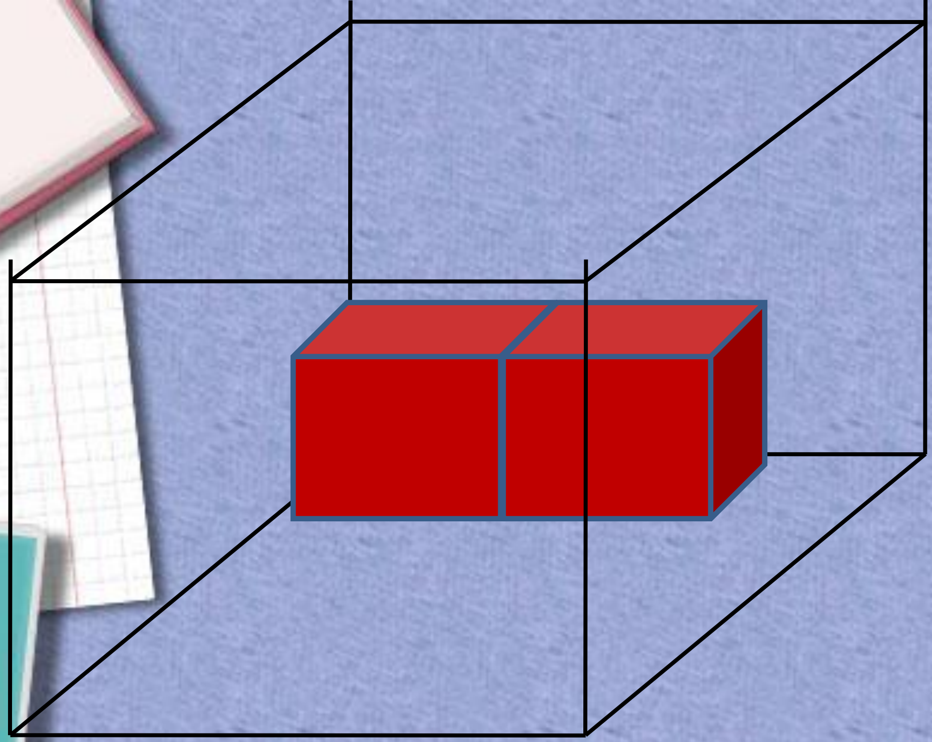
$V_n = a_n b_n c_n$ и $V'_n = a_n' b_n' c_n'$ т.е. $a_n b_n c_n \le V \le a_n' b_n' c_n'$

Неограниченно увеличим n.

Тогда число $a_n' b_n' c_n'$ будет мало отличаться от числа $a_n b_n c_n$.

V=abc.

Ч.т.д



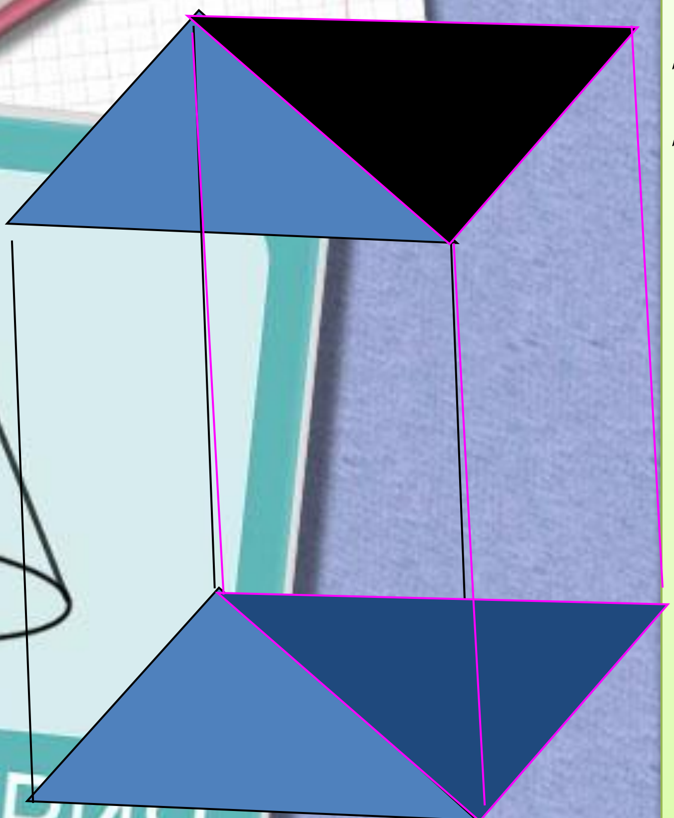
$$V = abc$$

Итак, **объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений: $V=abc$**

Следствия:

1. **Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту: $V=S_{осн}h$**
2. **Объем прямой призмы, основанием которой равен прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту (доказать самостоятельно)**

Следствие 2. **Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.**



Дано: **ABC - треугольная призма.**

Доказать: **V призмы= S $_{ABC}$·h**

Доказательство:

1. Достроим треугольную призму до прямоугольного параллелепипеда.

2. По сл.2 V= 2 S $_{ABC}$·h.

3. (B_1BC) разбивает параллелепипед на две равные прямые призмы, одна из которых данная.

4. Следовательно V $_{иск.}$ равен половине объема параллелепипеда, т.е. V $_{призмы}$= S $_{ABC}$·h ч.т.д

№ 648№ 648, 649№ 648, 649, 650№ 648, 649, 650, 651,652, 657

Дома: №648, 657 – дорешать

№655

Знать: единицы измерения объемов, выражать единицы через другие, свойства объемов, формулы вычисления прямоугольного параллелепипеда, стр.150 – доказать 2 случай

№648 Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны a, b, высота – h, если a=11, b=12, h=15

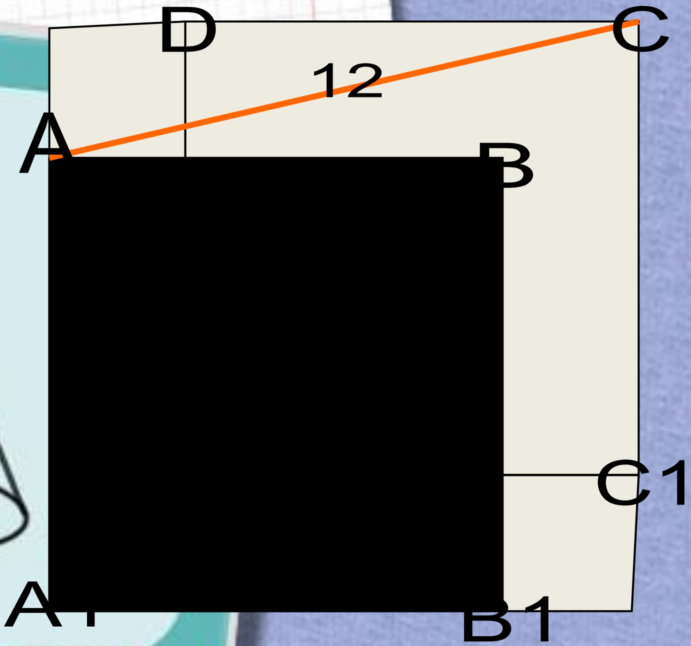
Дано: a=11, b=12, h=15
Найти: V

V=abc=abh=11*12815=1980

домой

№649

Найдите объём куба ABCDA1B1C1D1, если AC = 12см.



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$12^2 = a^2 + a^2$$

$$2a^2 = 144, a^2 = 72; a = 6\sqrt{2}$$

$$V = a^3 = \left(6\sqrt{2}\right)^3 = 216 \cdot 2\sqrt{2} = 432\sqrt{2}$$

домой

Кирпич имеет форму прямоугольного параллелепипеда с измерениями 25 см, 12 см и 6,5 см. Плотность кирпича равна 1,8 г/см^3. Найдите его массу.

$$m = \rho \cdot V$$

$$V = abc = 25 \cdot 12 \cdot 6{,}5 = 1950 cm^3$$

$$m = 1{,}8 \cdot 1950 = 3510 (г)$$

домой

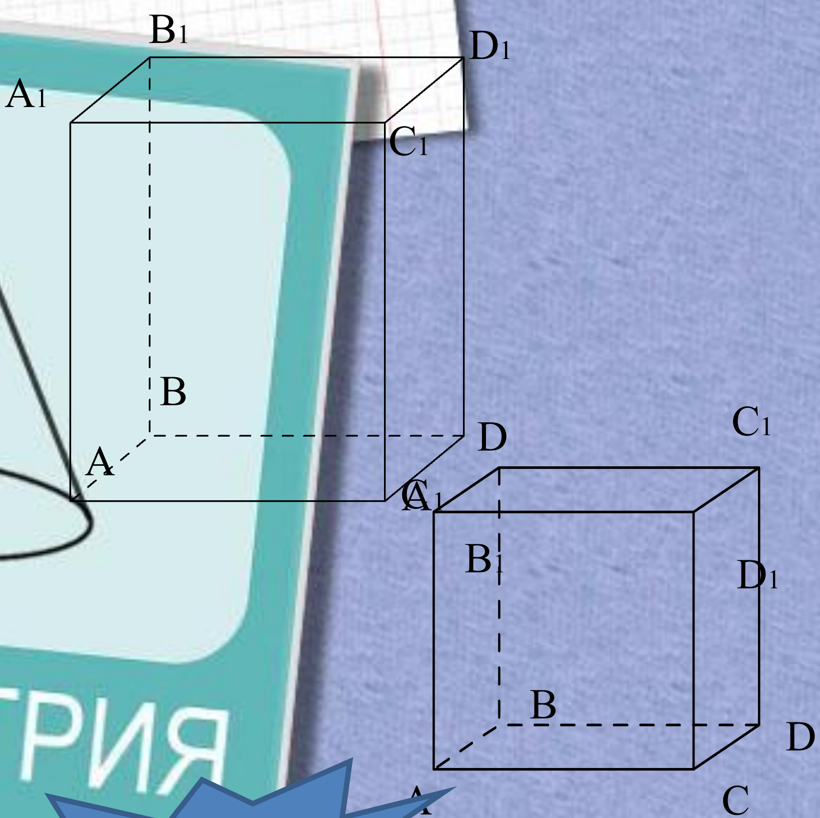
№ 650. **Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 8 см, 12 см и 18 см. найдите ребро куба, объем которого равен объему этого параллелепипеда**

Дано: **прямоугольный параллелепипед.**

$a = 8$см, $b = 12$см, $c = 8$см

$V_{пар} = V_{куба}$

***Найти*: d - ребро куба.**



✔ *Решение:*

$V_{пар} = abc = 8 \cdot 12 \cdot 18 = 1728$ см ^{3}.

$V_{пар}. = V_{куба} = 1728$ см$^3 = d^3$,

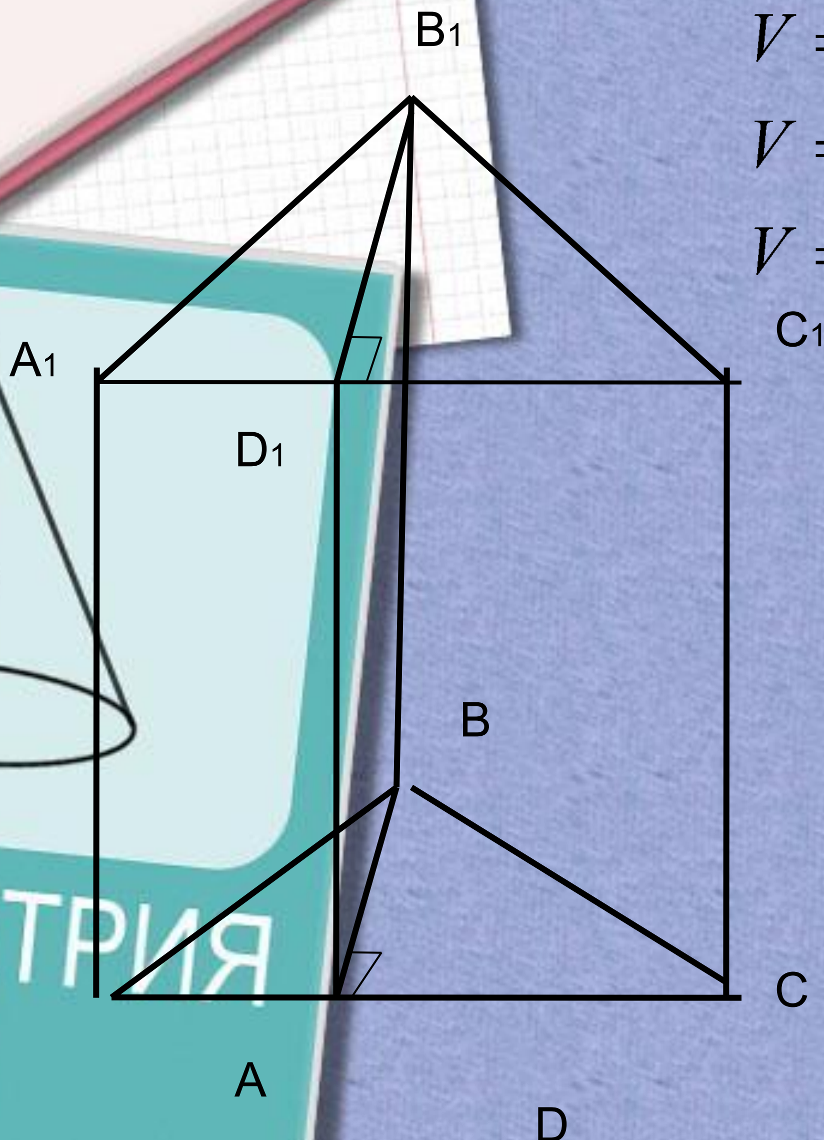
$d^3 = 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 2 = 2^6 \cdot 3^3$,

$d = 12$ см.

Ответ: 12 см.

домой

Объем прямой призмы равен произведению основания на высоту



$$V = V_1 + V_2$$

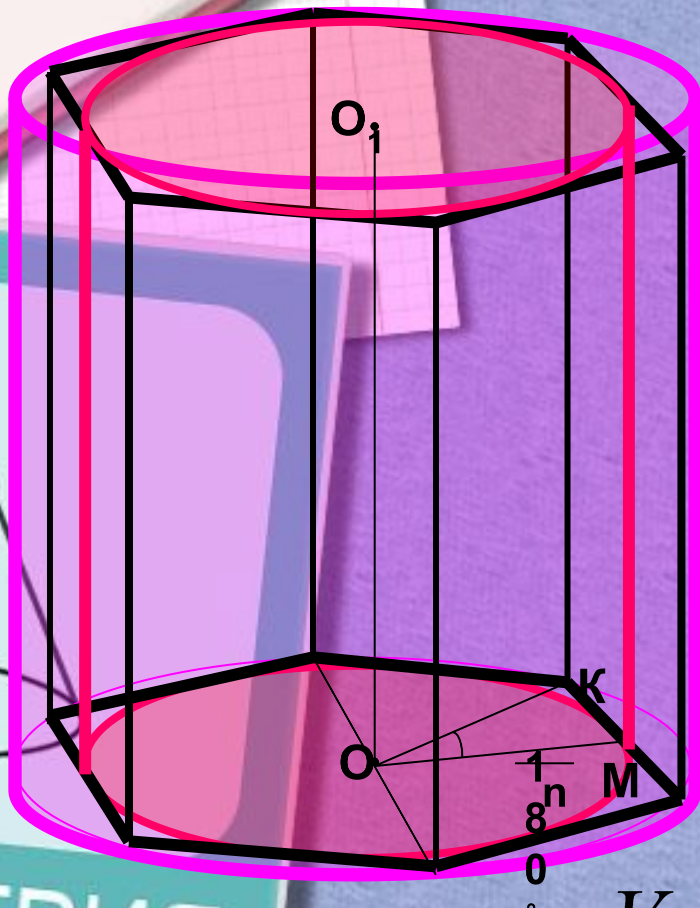
$$V = S_{ABD} \cdot h + S_{BDC} \cdot h = (S_{ABD} + S_{BDC}) \cdot h$$

$$V = S_{ABC} \cdot h$$

Аналогично доказывается, что объем произвольной прямой призмы равен произведению площади основания на высоту. Например, пятиугольную прямою призму можно разделить на три прямые треугольные призмы, выразить объем каждой из

Итак, объем прямой призмы равен произведению основания на высоту

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.



Впишем в данный цилиндр P радиуса r и высоты h правильную n-угольную призму F_n, а в эту призму впишем цилиндр P_n. Пусть объемы цилиндров P и P_n равны V и V_n, через r_n –радиус цилиндра P_n.

Чему равен объем призмы F_n?

$$V_{призмы} = S_n \cdot h$$

$$V_n < S_n \cdot h < V$$

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} S_n \cdot h$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \pi r^2$$

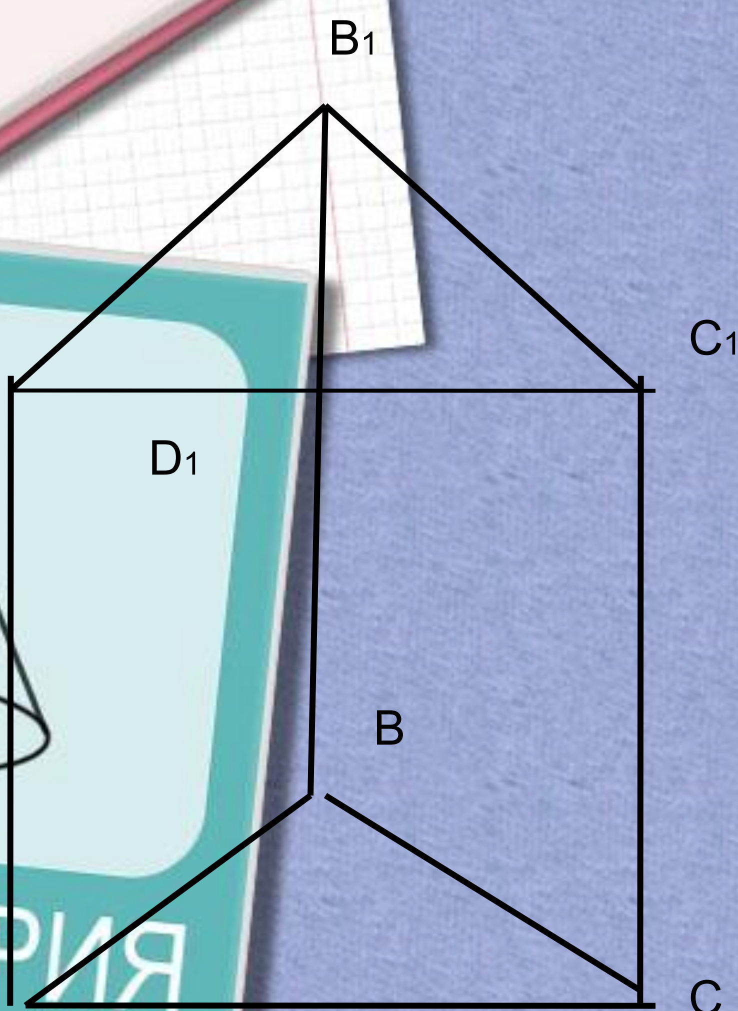
$$V = \pi r^2 \cdot h$$

$$V = S_{осн} \cdot h$$

№659 (а), №659 (а), №660, №659 (а), №660, 663 (а,в),
№659 (а), №660, 663 (а,в), 664№659 (а), №660, 663 (а,в),
664, 666(а), №659 (а), №660, 663 (а,в), 664, 666(а),
667№659 (а), №660, 663 (а,в), 664, 666(а), 667, 669, №659
(а), №660, 663 (а,в), 664, 666(а), 667, 669, 671(а)
Дома: 672, 670, 662(б), 666(б), 671(б)

$$BAC = 120^0, AB = 5m, AC = 3, S_{наибб ок} = 35см^2$$

659(a)



$$V = S_{oc} \cdot h$$

$$S_{oc} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin BAC$$

$$S_{oc} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \sin 120^0 = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120^0} =$$

$$\sqrt{5^2 + 3^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$$

$$S_{BB_1C_1C} = BC \cdot BB_1$$

$$7 \cdot h = 35, h = 5$$

$$V = \frac{15\sqrt{3}}{4} \cdot 5 = \frac{75\sqrt{3}}{4}$$

домой

№660

$ABCA_1B_1C_1$ – прямая_призма.

$AB = BC = m, \langle ABC = \varphi, BB_1 = BD,$

BD – высота_в_ΔABC

V ?

пусть

$$BC = a, AB = c, BB_1 = BD = h$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos ABC$$

$$b = \sqrt{m^2 + m^2 - 2m \cdot m \cdot \cos\varphi} = \sqrt{2m^2 - 2m^2 \cdot \cos\varphi}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ac \sin\varphi = \frac{1}{2} m \cdot m \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin\varphi$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2}\sqrt{2m^2 - 2m^2 \cos\varphi \cdot h}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2m^2 - 2m^2 \cos\varphi} = \frac{1}{2} m^2 \sin\varphi$$

$$h = \frac{m^2 \sin\varphi}{m\sqrt{2 - 2\cos\varphi}} = \frac{m \sin\varphi}{\sqrt{2 - 2\cos\varphi}}$$

$$V = Sh = \frac{1}{2} m^2 \sin\varphi \cdot \frac{m \sin\varphi}{\sqrt{2 - 2\cos\varphi}} = \frac{m^3 \sin\varphi}{\sqrt{8 - 8\cos\varphi}}$$

домой

№663

$Дано: треугольная\_правильная\_призма$

$ребро\_равно\_a$

$n = 3; n = 6$

$$V = S_{осн} \cdot h$$

$$S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}; V = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot a = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$$

$$S_6 = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}; V = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} \cdot a = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$$

домой

664

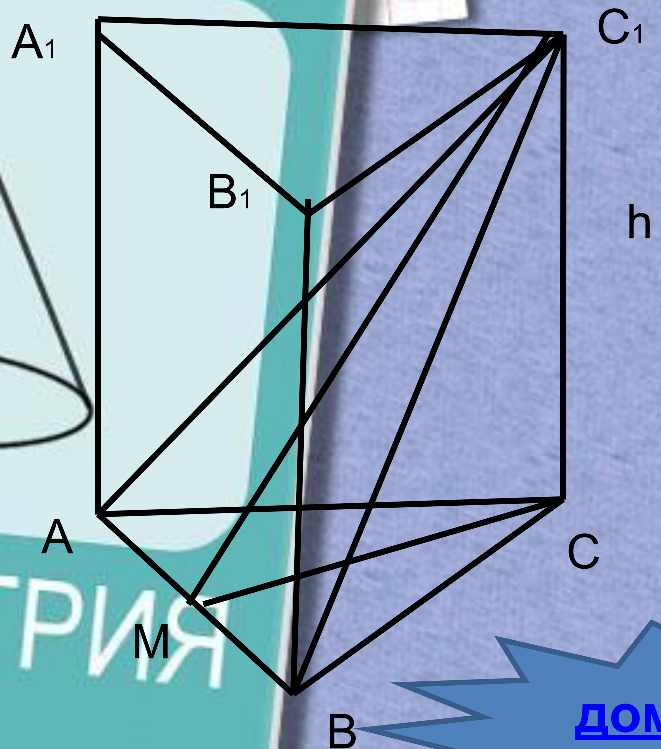
$$ABCA_1B_1C_1 - правильная\_призма$$

$$AB = BC = AC = a$$

$$C_1MC = 60^0$$

$$V\ ?$$

По теореме, обратной о трех перпендикулярах



$$CM \perp AB$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Delta MCC_1 - прямоугольный$$

$$h = CC_1 = MC \cdot tg\,60^0 = \frac{a\ \sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}a$$

$$V = Sh = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{2}a = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$$

домой

666(а)

$$r = 2\sqrt{2}, h = 3$$

$$V ?$$

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2 \cdot 3 = 24\pi$$

[домой]

667

Дано: алюминиевый провод диаметром 4 мм имеет массу 6,8 кг. Найти длину провода, если плотность алюминия равна 2,6 грамм на куб. см

$$r=\frac{D}{2}=2=0,2см$$

$$\rho=\frac{m}{V}, V=\frac{m}{\rho}=\frac{6800г}{2,6\frac{г}{см^3}}=2615,38см^3$$

$$V=\pi r^2 l, l=\frac{V}{\pi r^2}=\frac{2615,38}{0,04\pi}=\frac{2615,38}{0,126}=20756,98см$$

домой

669

Дано: площадь основания цилиндра равна Q, а площадь его осевого сечения равна S
Найти: V

$$r - радиус, h - высота$$

$$\pi r^2 = Q; r^2 = \frac{Q}{\pi}; r = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}$$

$$2rh = S; h = \frac{S}{2r} = \frac{S}{2\sqrt{\frac{Q}{\pi}}}$$

$$V = S_{осн}h = Qh = Q \cdot \frac{s}{2\sqrt{\frac{Q}{\pi}}} = \frac{QS}{2\sqrt{\frac{Q}{\pi}}}$$

[домой]

671

В цилиндр вписана призма. Найти отношение объемов призмы и цилиндра

$$\frac{V_{призмы}}{V_{цилиндра}} = \frac{S_{пр}h}{S_{цил}h} = \frac{S_{приз}}{S_{цил}}$$

$$a) S_{осн.пр} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, R = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{осн.цил} = \pi R^2 = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{3}$$

$$\frac{Vnn}{V_{цил}} = \frac{S_{пр}}{S_{цил}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{\pi a^2}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

домой


ЕТРИЯ