Касательная к графику функции

Подготовила:
ученица 11 класса «Д»
Красовская Виктория
Руководители: Крагель Т.П., Гремяченская Т.В

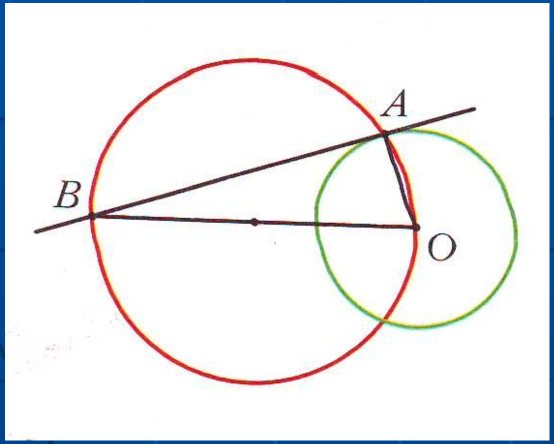
г. Старый Оскол

2006

Содержание:

Появление понятия касательной

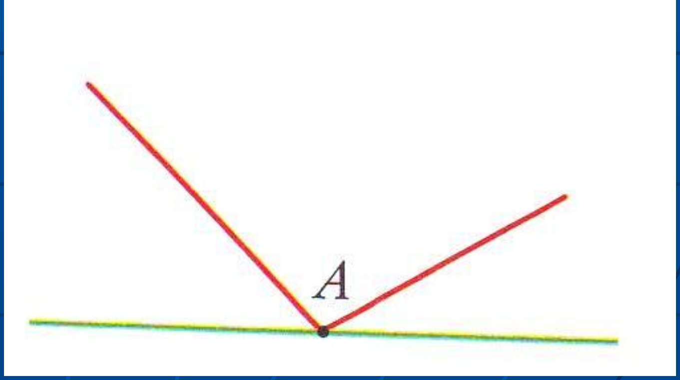
Понятие касательной – одно из древнейших в математике. В геометрии касательную к окружности определяют как прямую, имеющую ровно одну точку пересечения с этой окружностью. Древние с помощью циркуля и линейки умели проводить касательные к окружности, а в последствии – к коническим сечениям: эллипсам, гиперболам и параболам.



√ вернуться к содержанию

История появления касательной

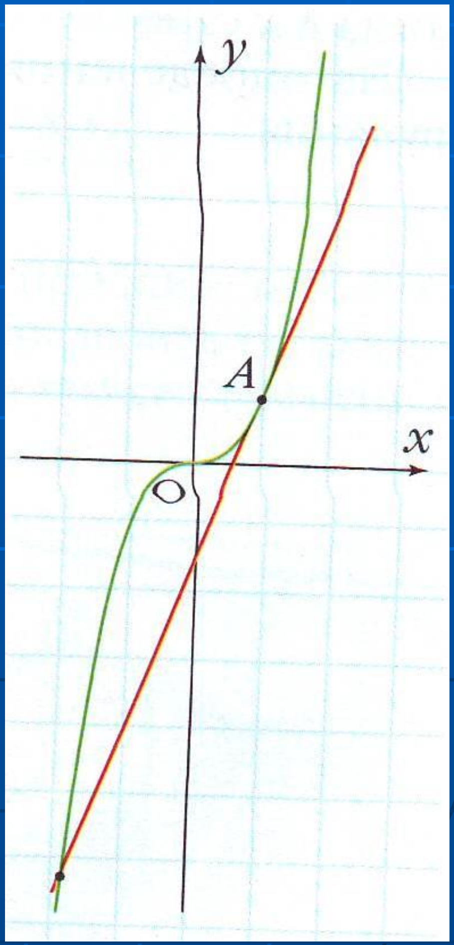
Интерес к касательным возродился в Новое время. Тогда были открыты кривые, которых не знали учёные древности. Например, Галилей ввёл циклоиду, а Декарт и Ферма построили к ней касательную. В первой трети XVII в. Начали понимать, что касательная – прямая, «наиболее тесно примыкающая» к кривой в малой окрестности заданной точки. Легко представить себе такую ситуацию, когда нельзя построить касательную к кривой в данной точке (рисунок).



√ вернуться к содержанию

Построение касательной

Построение касательных – одна из тех задач, которые привели к рождению дифференциального исчисления. Первый опубликованный труд, относящийся к дифференциальному исчислению и принадлежащий перу Лейбница, имел название «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления».



√ вернуться к содержанию

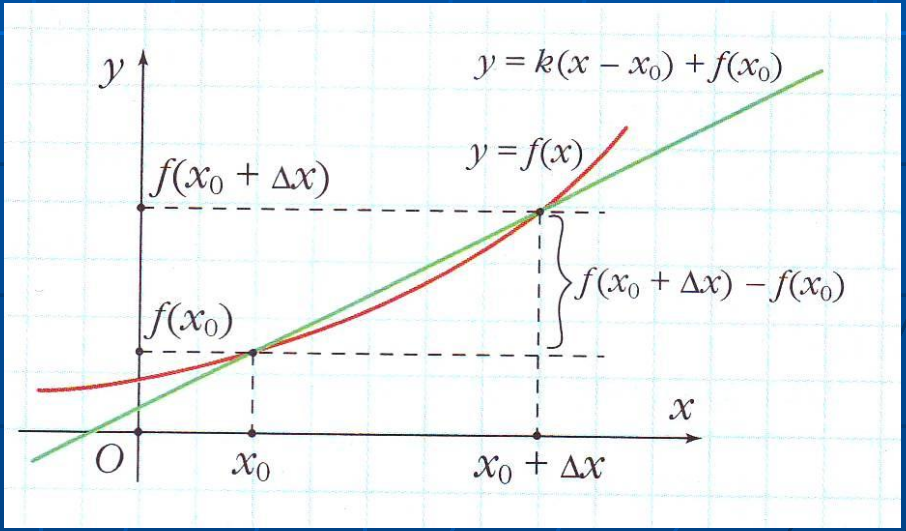
Пример построения касательной

Пусть кривая есть график функции $f(x)$ изображённый на рисунке, и требуется провести касательную к этой кривой в точке x. Поступим следующим образом. Возьмём точку $x = x_0 + \Delta x$, близкую к x_0, и проведём через точки $(x_0; f(x_0))$ и $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ прямую (секущую, как иногда говорят). Уравнение секущей, как нетрудно проверить имеет вид

$$y = k(x - x_0) + f(x_0),$$

где

$$\kappa = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



√ вернуться к содержанию

Если существует предел $\lim_{\Delta x \to 0} k = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

то прямую $\lim_{\Delta x \to 0} k = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

и называют ***касательной к графику функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0. Если сказать иначе, касательную можно определить как прямую, которая является предельным положением секущих, когда Δx стремится к 0.

Из определения величины k_0 видно, что функция

$$\alpha(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - k_0$$

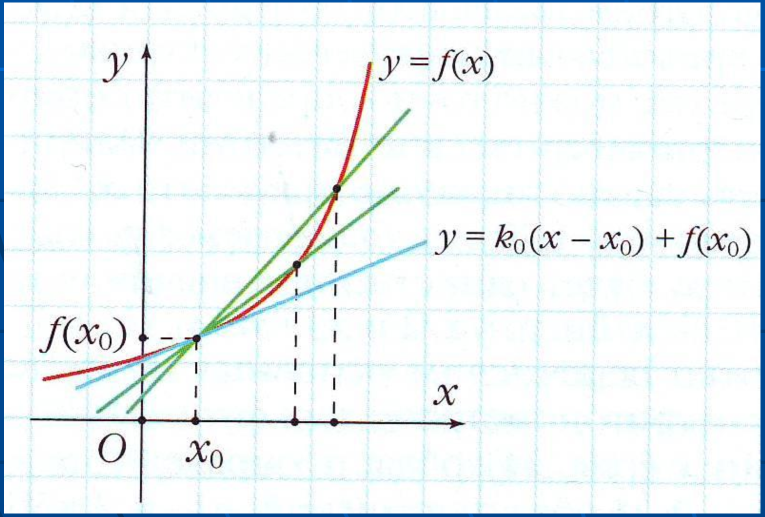
Стремится к 0, когда Δx стремится к 0. Последнее равенство означает, что

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + k_0 \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

√ вернуться к содержанию

т.е. $$f(x)-T(x)=\alpha(\Delta x)\Delta x$$

где $x = x_0 + \Delta x$. Другими словами, чем ближе x к x_0 (т.е. чем меньше Δx), тем сильнее секущая «прижимается» к графику функции в том смысле, что разность $f(x)$ - $T(x)$ стремится к нулю ещё быстрее, чем Δx. Среди всех прямых, проходящих через точку $(x_0; f(x_0))$, этим свойством обладает лишь касательная.



√ вернуться к содержанию