Компланарные векторы

Урок 5

Цели урока

- **Ввести определение компланарных векторов.**
- **Рассмотреть признак компланарности трех векторов и правило параллелепипеда, сложение трех некомпланарных векторов.**

Новый материал

Определение.

Векторы называются **компланарными**, если при откладывании от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

Иначе: векторы называются **компланарными**, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

Любые два вектора компланарны.

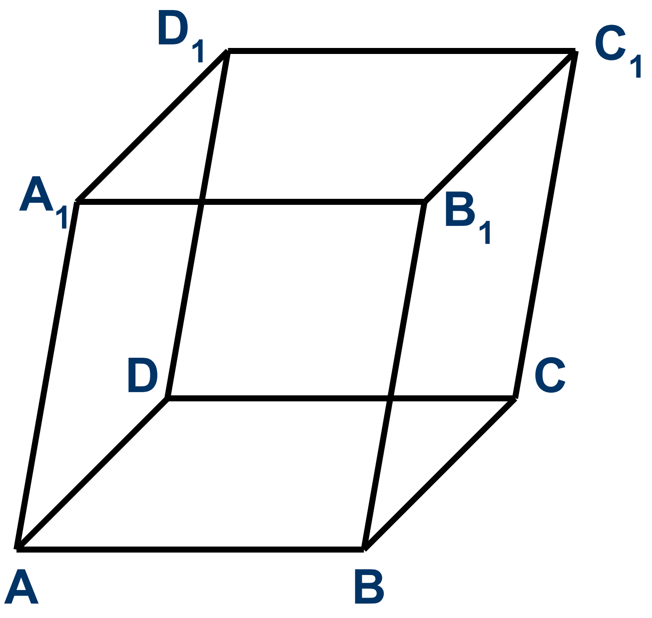
Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны.

Почему?

Три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и некомпланарными.

Новый материал

Устно: 355

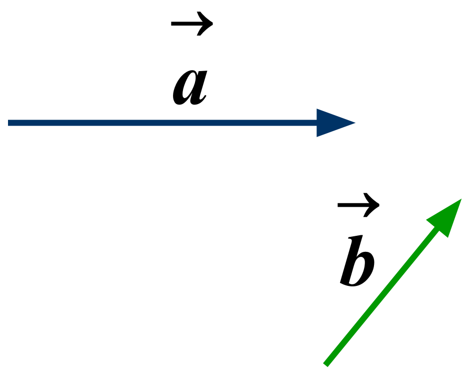


Новый материал

Признак компланарности трех векторов:

Если вектор $\vec{c}$ *можно представить в виде* $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$,

где x *и* y – *некоторые числа, то векторы* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *компланарны.*



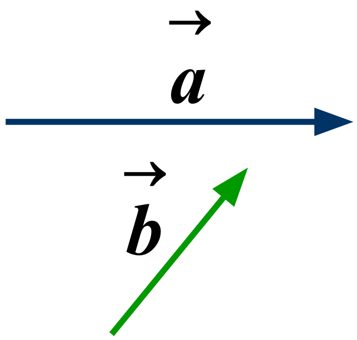
Дано: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Доказать: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – *компланарны*

Новый материал

Признак компланарности трех векторов:

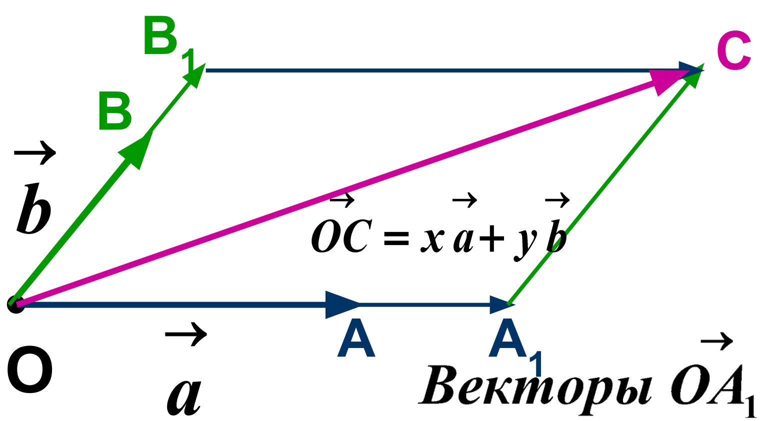


Доказательство.

Пусть $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *неколлинеарны.*

Отложим от некоторой точки пространства O векторы $\vec{OA} = \vec{a}$ *и* $\vec{OB} = \vec{b}$.

Векторы $\vec{OA}$ *и* $\vec{OB}$ *лежат в плоскости OAB.*



Построим векторы $x\vec{a}$ *и* $y\vec{b}$.

Для определенности будем считать что $x > 0$, $y > 0$. $\vec{OA_1} = x\vec{a}$ *и* $\vec{OB_1} = y\vec{b}$.

Векторы $\vec{OA_1}$ *и* $\vec{OB_1}$ *также лежат в плоскости OAB.*

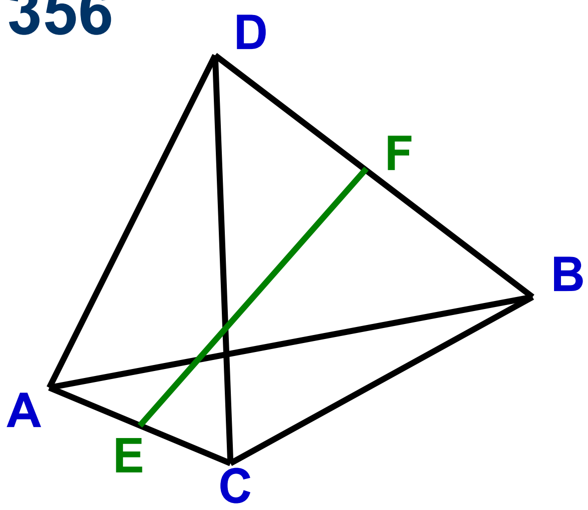
Их сумма – вектор $\vec{OC} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB}$, *равный вектору* $\vec{c}$, *лежит в плоскости OAB.*

Новый материал

Итак, векторы $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ *лежат в одной плоскости,*

т. е. векторы $\vec{a}, \vec{b},$ *и* $\vec{c}$ *– компланарны.*

356



Дано: ABCD – тетраэдр

E – середина AC,

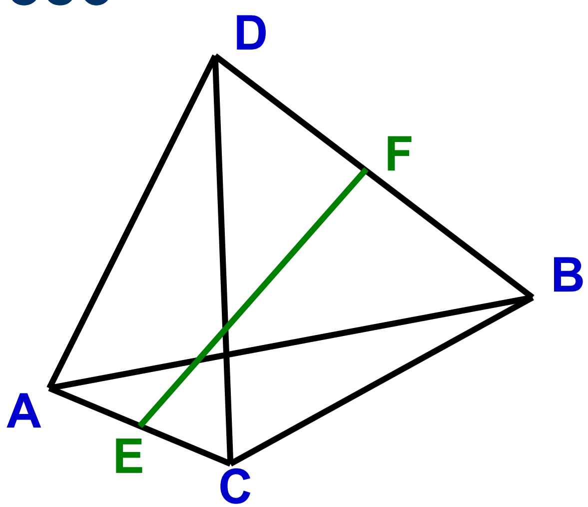
F – середина BD.

Доказать: $2\vec{FE} = \vec{BA} + \vec{DC}$.

Компланарны ли векторы $\vec{FE}, \vec{BA}$ *и* $\vec{DC}$?

Новый материал

356



$$\vec{FE} = \vec{DE} - \vec{DF} = \frac{1}{2}\left(\vec{DA} + \vec{DC}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\vec{DD} + \vec{DB}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{DA} + \vec{DC} - \vec{DB}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{DA} - \vec{DB} + \vec{DC}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{BA} + \vec{DC}\right).$$

Следовательно, $2\vec{FE} = \vec{BA} + \vec{DC}$*, ч.т.д.*

По признаку векторы $\vec{FE}$, $\vec{BA}$ *и* $\vec{DC}$ *– компланарны.*

Ответ : компланарны.

Новый материал

Определение.

Разложить вектор $\vec{p}$ *по векторам* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, *это значит,*

представить его в виде $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Утверждение, обратное признаку компланарности векторов:

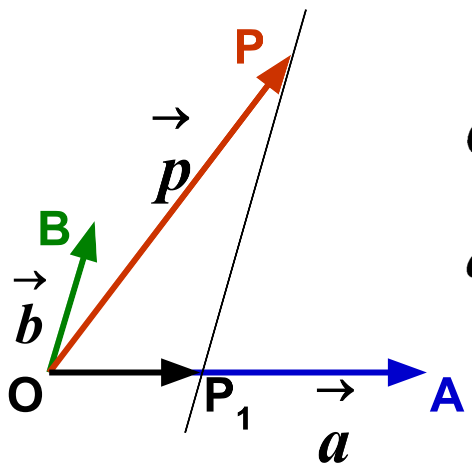
Если векторы $\vec{p}, \vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *– компланарны, то вектор* $\vec{p}$ *можно*

представить в виде $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, *где* x *и* y *– некоторые числа.*

Докажем это.

Новый материал

Доказательство.



Пусть $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *неколлинеарны.*

Отложим от некоторой точки пространства O векторы $\vec{p}, \vec{a}$ *и* $\vec{b}$.

Так как векторы компланарны, то они лежат в одной плоскости.

Проведем через точку P прямую, параллельную BO.

Тогда $\vec{OP} = \vec{OP_1} + \vec{P_1P}$, *но* $\vec{OP_1} = x\vec{a}$, *т.к.* $\vec{OP_1} \parallel \vec{a}$, $\vec{P_1P} = y\vec{b}$, *т.к.* $\vec{P_1P} \parallel \vec{b}$,

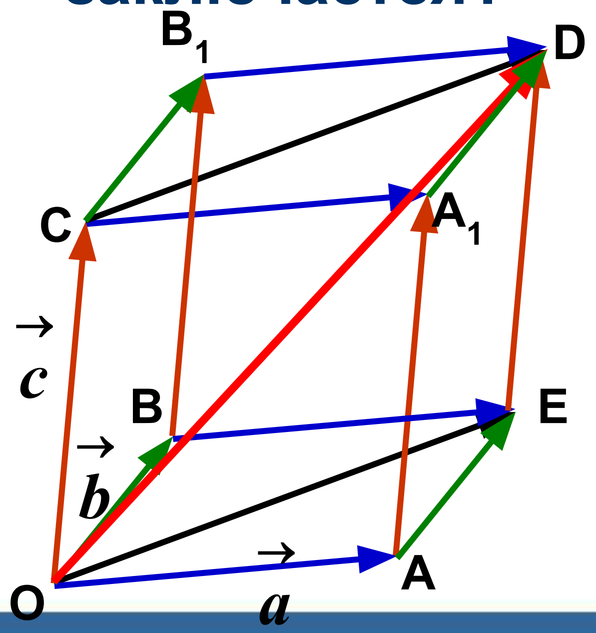
следовательно, $\vec{OP} = x\vec{a} + y\vec{b}$, *т.е,* $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, *ч.т.д.*

А если $\vec{p} \parallel \vec{b}$, *то* $\vec{p} = 0\vec{a} + y\vec{b}$.

Новый материал

Мы умеем на плоскости складывать векторы по правилу треугольника и параллелограмма. А если в пространстве?

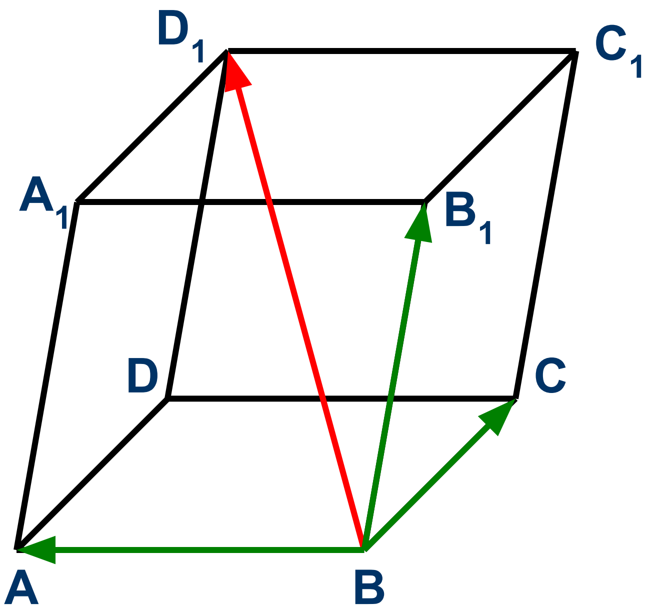
Для сложения трех некомпланарных векторов пользуются **правилом параллелепипеда**. В чем оно заключается?



$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$$

Решение упражнений

360(a)



$$\vec{BD_1} = \vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB_1}$$

Определение.

Разложить вектор $\vec{p}$ *по трем некомпланарным векторам* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$, *это значит, представить его в виде* $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Домашнее задание

п. 39, 40

вопросы 13-15 стр. 97

358, 360(б), 368(а, б)

Спасибо!