Муниципальное образовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа №12»

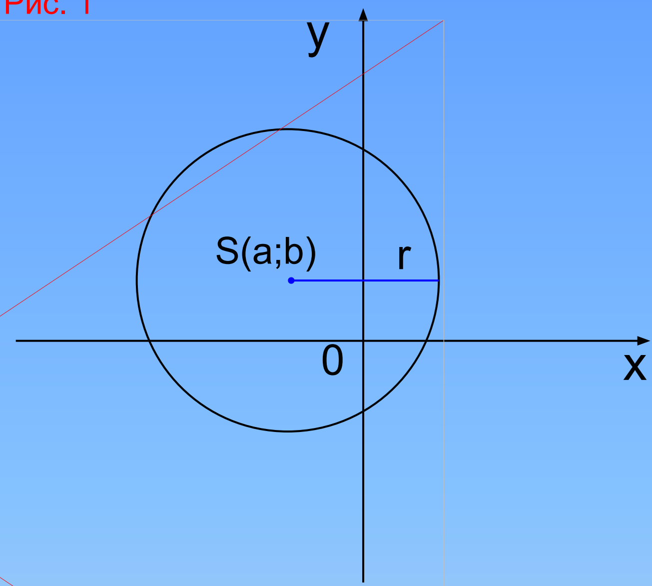
Презентация

Т**ема**: «***КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА***»

Тимофеева Галина Александровна
МОУ «СОШ № 12»
г. Щекино Тульской области

Щёкино 2011 год

Рис. 1



ОКРУЖНОСТЬ

Уравнение окружности с центром в точке S (a; b) и радиусом r имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Это каноническое уравнение окружности (рис. 1).

Уравнение второй степени относительно текущих координат x и y является уравнением окружности тогда и только тогда, когда в этом уравнении коэффициенты при квадратах координат равны, а член с произведением координат отсутствует. Таким образом, это уравнение имеет вид

$$Ax^2+Ay^2+Cx+Dy+F=0 \qquad \textbf{(2)}$$

В этом случае говорят, что окружность задана общим уравнением.

Для определения координат центра и радиуса окружности, заданной общим уравнением, надо с помощью тождественных преобразований уравнение (2) привести к виду (1).

Задание 1. Составить уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку M (2; 1).

Решение. Так как окружность касается осей координат, то она полностью лежит в одной из координатных четвертей, а именно в I четверти, поскольку одна из ее точек M (2; 1) находится в этой четверти. По той же причине центр искомой окружности S (a; b) равноотстоит от осей координат. Следовательно, он имеет равные положительные координаты (a = b > 0), а радиус r этой окружности равен a. Таким образом, каноническое уравнение искомой окружности принимает вид

$$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$$

Для нахождения a воспользуемся тем, что точка M (2; 1) лежит на окружности:

$$(2-a)^2+(1-a)^2=a^2 \quad \text{или} \quad a^2-6a+5=0.$$

Отсюда $a_1=1$ и $a_2=5$

Это означает, что условию задачи удовлетворяют две окружности:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1 \quad \text{и} \quad (x-5)^2+(y-5)^2=25$$

Задание 2. Определить координаты центра S и радиус r окружности, заданной общим уравнением

$$9x^2+9y^2+36x-18y+20=0.$$

Решение. Приведем данное уравнение к виду (1). Для этого разделим все его члены на 9, а затем сгруппируем отдельно члены, содержащие x и y:

$$(x^2+4x)+(y^2-2y)+\frac{20}{9}=0$$

Дополним выражения, стоящие в каждой из скобок, до полного квадрата:

$$x^2+4x=(x^2+2x\cdot 2+2^2)-4=(x+2)^2-4;$$

$$y^2-2y=(y^2-2y\cdot 1+1^2)-1=(y-1)^2-1.$$

Теперь данное уравнение принимает вид

$$(x+2)^2-4+(y-1)^2+\frac{20}{9}=0,$$ или $$(x+2)^2+(y-1)^2-\frac{25}{9}=0,$$

откуда $$(x+2)^2+(y-1)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1), получим a = – 2, b = 1 и r = 5/3.

Таким образом, данная окружность имеет центр в точке S (–2; 1) и радиус r = 5/3.

ЭЛЛИПС

Эллипс есть множество точек, сумма расстояний которых от двух фиксированных точек, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная (2a), большая, чем расстояние между фокусами (2c).

Простейшее уравнение эллипса получается, если расположить координатную систему следующим образом: за ось Ox принять прямую, проходящую через фокусы F_1 и F_2 (рис. 2).

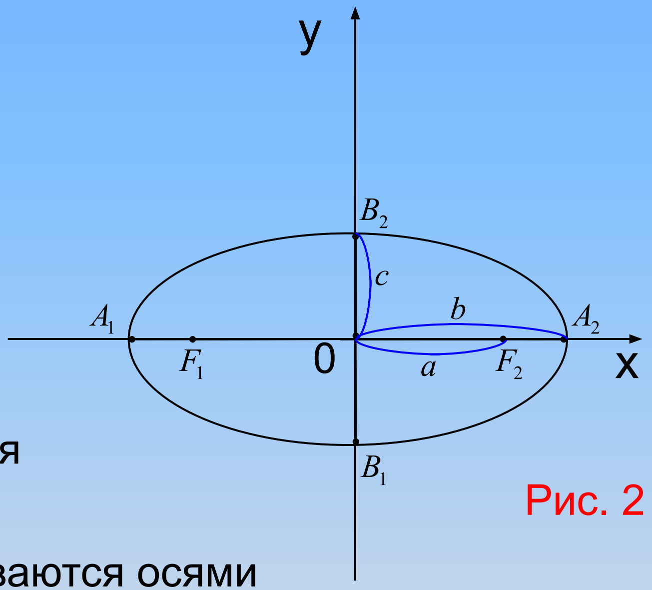


Рис. 2

Тогда уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (1)$$

где $b^2=a^2-c^2$.

Точки A_1 и A_2, B_1 и B_2 пересечения эллипса с его осями симметрии (координатными осями) называются вершинами эллипса. Отрезки $[A_1A_2]$ и $[B_1B_2]$ длины которых соответственно равны 2a и 2b, называются осями эллипса, причем $[A_1A_2]$ – большой осью, а $[B_1B_2]$ – малой осью, так как a > b. Таким образом, параметры a и b, входящие в уравнение эллипса, равны его полуосям.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к его большой оси, т.е.

$e = c/a.$ (2)

Очевидно, что $e < 1$.

Если эллипс, определяемый уравнением вида (1), расположен так, что его фокусы лежат на оси Oy (рис. 3)

то тогда $b > a$ и большой осью служит отрезок

$[B_1B_2]$ длиной $2b$, а малой осью – отрезок

$[A_1A_2]$ длиной $2a$.

Эксцентриситет такого эллипса вычисляется по формуле

$$e = c/b, \qquad (2')$$

где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$

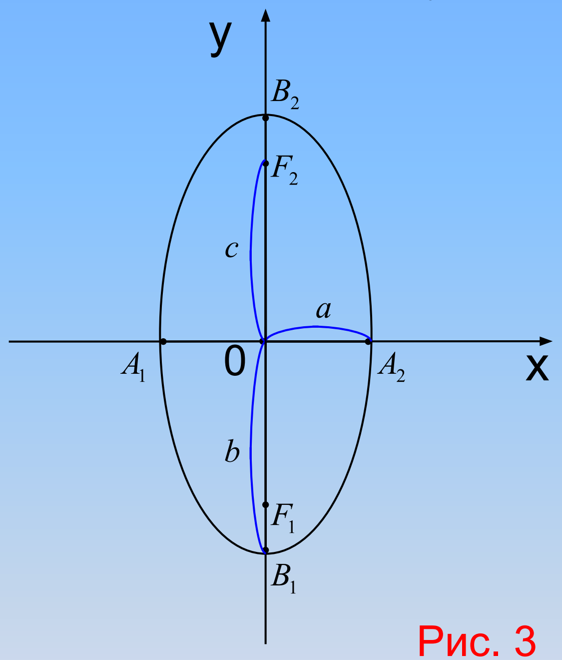


Рис. 3

Задание 1. Найти оси, вершины, фокусы и эксцентриситет эллипса

$$9x^2 + 25y^2 - 255 = 0.$$

Решение. Приведем данное уравнение к простейшему виду (1), для чего свободный член перенесем вправо и разделим на него все члены уравнения. В результате получим

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (1), имеем a = 5, b = 3.
Отсюда находим оси эллипса 2a = 10, 2b = 6 и координаты вершин $A_1(-5;0)$, $A_2(5;0)$, $B_1(0;-3)$, $B_2(0;3)$.

Далее находим $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-9} = 4.$

Следовательно, фокусами эллипса служат точки $F_1(-4;0)$ и $F_2(4;0)$.

Эксцентриситет эллипса вычисляем по формуле (2): e = c/a = 4/5.

Задание 2. Показать, что уравнение $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ Представляет собой уравнение эллипса. Найти центр, оси, вершины, фокусы и эксцентриситет этого эллипса.

Решение. Приведем данное уравнение к простейшему виду. Для этого сгруппируем отдельно члены, содержащие переменные x и y:

$$(5x^2 - 30x) + (9y^2 + 18y) + 9 = 0.$$

В каждой из скобок вынесем коэффициент при квадрате переменной, а затем выделим полный квадрат:

$$5x^2 - 30x = 5\left[(x^2 - 2\cdot 3x + 9) - 9\right] = 5(x-3)^2 - 45;$$

$$9y^2 + 18y = 9\left[(y^2 + 2y + 1) - 1\right] = 9(y+1)^2 - 9.$$

Данное уравнение преобразуем теперь к виду

$5(x-3)^2 + 9(y+1)^2 - 45 - 9 + 9 = 0,$ или $5(x-3)^2 + 9(y+1)^2 = 45,$

откуда $$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1.$$

Введем обозначения $x' = x - 3, \ \ y' = y + 1.$

Произведенную замену переменных будем рассматривать как преобразование декартовых координат x, y в координаты x’, y’, при параллельном сдвиге координатных осей, причем новое начало координат находится в точке O’ (3; –1). В этой системе координат уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{5} = 1.$$

Таким образом, заданное уравнение определяет эллипс с центром в точке O’ (3; –1).

И полуосями $a=3$ и $b=\sqrt{5}$ (рис. 4)

Кроме того, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-5}=2;$

Отсюда находим эксцентриситет e = c/a = 2/3.

Остается найти координаты вершин и фокусов эллипса.
В новой системе координаты вершин таковы:

$A_1(-3;0),\ A_2(3;0),\quad B_1(0;-\sqrt{5}),\ B_2(0;\sqrt{5}).$

координаты фокусов:

$F_1(-2;0)$ и $F_2(2;0).$

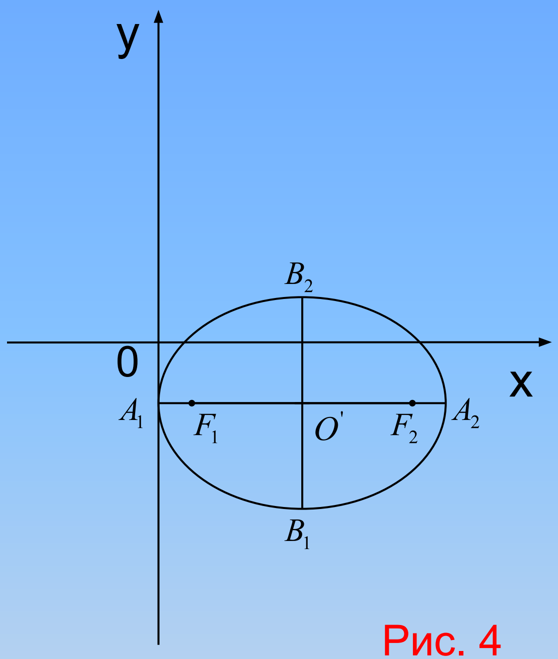


Рис. 4

Так как старые координаты выражаются через новые по формулам $x=x'+3,\ y=y'-1,$

то, возвращаясь к первоначальной системе координат, окончательно получим:

$A_1(0;-1),\quad A_2(6;-1),$

$B_1(3;-\sqrt{5}-1),\quad B_2(3;\sqrt{5}-1),$

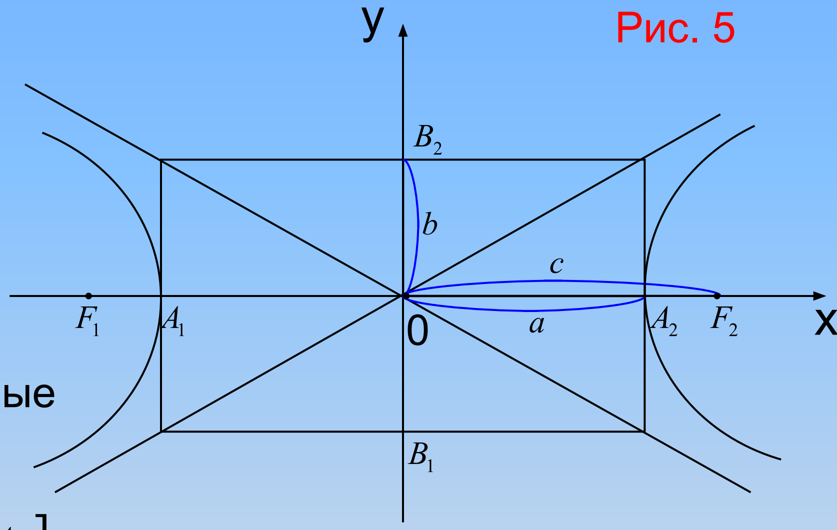
$F_1(1;-1),\quad F_2(5;-1).$

ГИПЕРБОЛА

Гиперболой называется множество точек, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (2a), меньшая, чем расстояние между фокусами (2c).

Простейшее уравнение гиперболы получается, если расположить координатную систему следующим образом: за ось Ox принять прямую, проходящую через фокусы F_1 и F_2

а за ось Oy перпендикуляр в середине отрезка $\left[F_1F_2\right]$ (рис. 5)



Тогда уравнение гиперболы примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (1)$$

где $b^2=c^2-a^2$

Гипербола имеет две оси симметрии (координатные оси), с одной из которых (осью абсцисс) она пересекается в двух точках A_1 и A_2 называемых вершинами гиперболы. Отрезок $\left[A_1A_2\right]$ длиной 2a называется действительной осью гиперболы, а отрезок $\left[B_1B_2\right]$ длиной 2b – мнимой осью гиперболы. Таким образом, параметры a и b, входящие в уравнение гиперболы, равны ее полуосям.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к ее действительной оси:

$$e = c/a \qquad (2)$$

Очевидно, что $e > 1$.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x \qquad (3)$$

Если мнимая ось гиперболы направлена по оси Ох и имеет длину 2а, а действительная ось длиной 2b направлена по оси Оу (рис. 6)

то уравнение гиперболы имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (4)$$

Эксцентриситет такой гиперболы вычисляется по формуле:

$$e = c/b \qquad (2')$$

Ее асимптоты те же, что и у гиперболы (1).

Гиперболы (1) и (4) называются сопряженными.

Гипербола называется равносторонней, если ее действительная и мнимая оси равны, т. е. a = b. Простейшее уравнение равносторонней гиперболы имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad (5)$$

или

$$-x^2 + y^2 = a^2. \qquad (5')$$

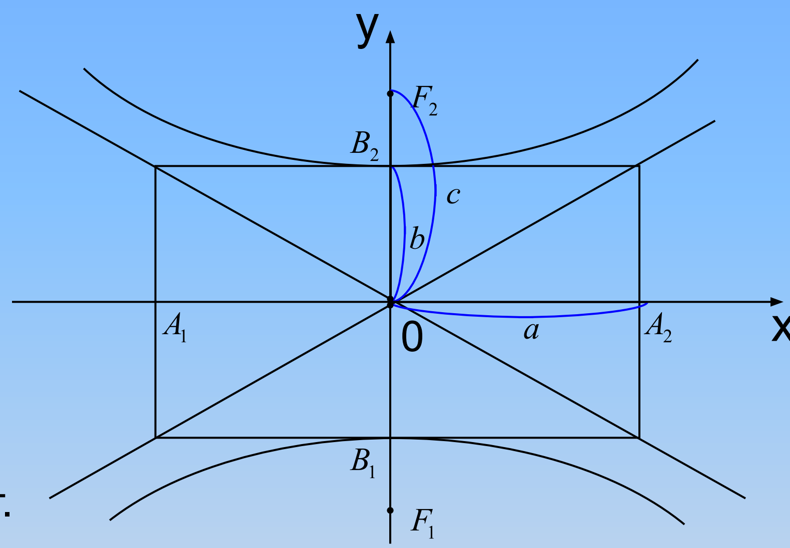


Рис. 6

Задание 1. Найти оси, вершины, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0.$

Решение. Перенесем свободный член вправо и разделим на него все члены данного уравнения. В результате получим простейшее уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1), имеем a = 3, b = 4. Таким образом, действительная ось гиперболы 2a = 6, а мнимая ось 2b = 8; координаты вершин

$$A_1(-3;0) \text{ и } A_2(3;0).$$

Далее, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16 = 5;}$

следовательно, фокусами гиперболы служат точки

$$F_1(-5;0) \text{ и } F_2(5;0).$$

Эксцентриситет гиперболы вычисляем по формуле (2): e = c/a = 5/3. Наконец, подставляя значения a = 3, b = 4 в формулы (3), получаем уравнения асимптот гиперболы: y = 4x/3 и y = –4x/3.

Задание 2. Показать, что уравнение $5x^2 - 4y + 30x + 8y + 21 = 0$
Представляет собой уравнение гиперболы. Найти центр, оси, вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты этой гиперболы.

Решение. Приведем данное уравнение к простейшему виду

$$5(x^2 + 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) - 45 + 4 + 21 = 0;$$

$$5(x+3)^2 - 4(y-1)^2 = 20; \quad \frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1.$$

Обозначим $x' = x + 3$, и $y' = y - 1.$

Таким образом, мы производим преобразование параллельного переноса осей координат в точку O (–3;1). В новой системе координат данное уравнение принимает вид $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{5} = 1,$ т.е. определяет гиперболу с центром в точке $O'(-3;1)$

и полуосями $a = 2$ и $b = \sqrt{5}$ (рис. 7)

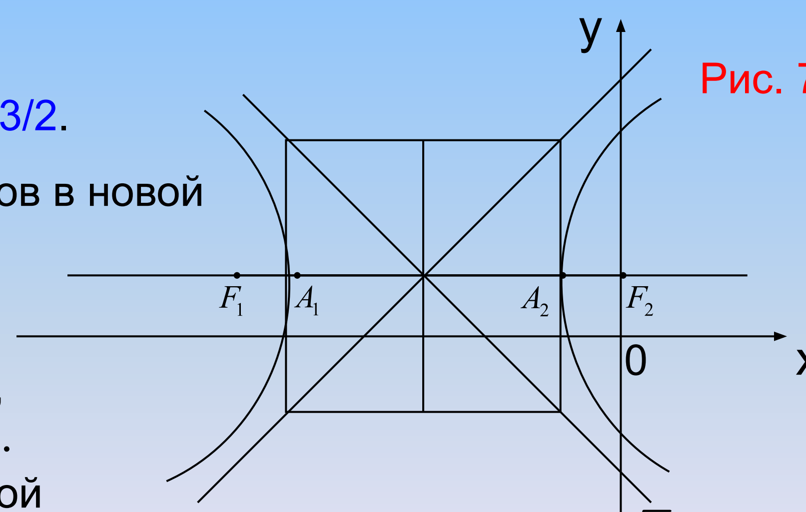


Рис. 7

Так как $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+5} = 3$, то e = c/a = 3/2.

Нетрудно найти координаты вершин и фокусов в новой координатной системе:

$A_1(-2;0), \quad A_2(2;0), \quad F_1(-3;0), \quad F_2(3;0).$

Так как $x = x' - 3, \quad y = y' + 1,$

то, возвращаясь к старой системе координат, получим $A_1(-5;1), \ A_2(-1;1), \ F_1(-6;1), \ F_2(0;1).$

Остается найти асимптоты гиперболы. В новой системе координат уравнения асимптот имеют вид $y' = \pm bx'/a$, т.е. $y' = \pm\sqrt{5}x'/2.$

Заменяя теперь x' на x + 3, а y' на y – 1, получим уравнения асимптот в первоначальной системе координат: $y - 1 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x+3).$

ПАРАБОЛА

Параболой называется множество точек, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой параболы.

Величина p, равная расстоянию от фокуса до директрисы, называется параметром параболы; прямая, проходящая через фокус параболы перпендикулярно ее директрисе, называется осью, а точка пересечения параболы с ее осью – вершиной параболы.

Простейшее уравнение параболы получается, если координатная система расположена следующим образом: за одну из координатных осей берется ось параболы, а за другую – прямая, перпендикулярная оси параболы и проведенная посредине между фокусом и директрисой.

Тогда уравнение параболы примет вид:

$y^2 = 2px$ (рис. 8) (1) $y^2 = -2px$ (рис. 9) (2) $x^2 = 2py$ (рис. 10) (3) $x^2 = -2py$ (рис. 11) (4)

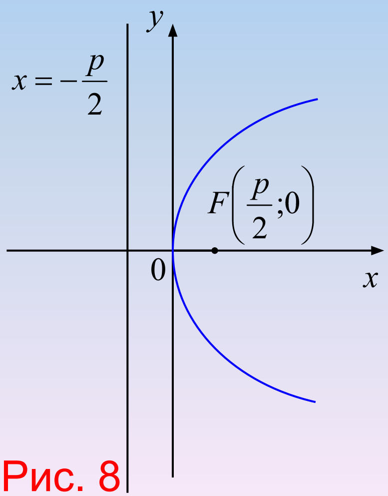


Рис. 8

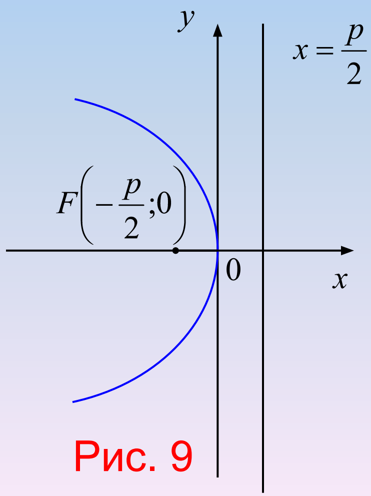


Рис. 9

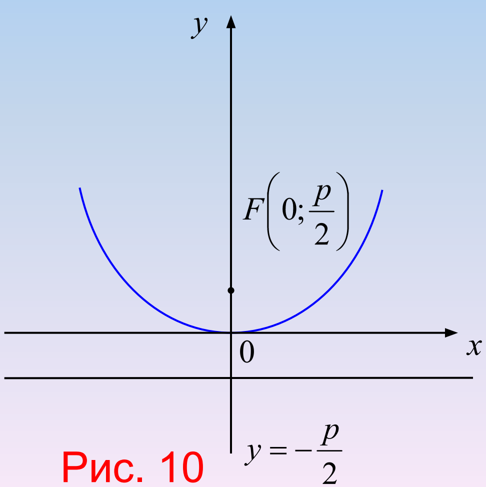


Рис. 10

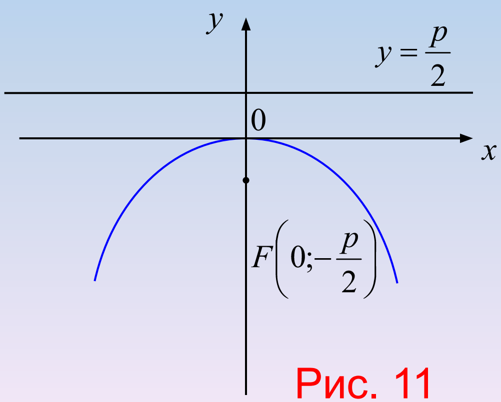


Рис. 11

Уравнение $y = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0) \qquad (5)$

определяет параболу, ось которой перпендикулярна оси абсцисс.
Аналогично, уравнение

$$x = my^2 + ny + p \qquad (m \neq 0) \qquad (6)$$

определяет параболу, ось которой перпендикулярна оси ординат.
Уравнения (5) и (6) приводятся к простейшему виду (1) – (4) путем тождественных преобразований с последующим параллельным переносом координатной системы.

Задание 1. Определить координаты фокуса и составить уравнение директрисы параболы $y^2 = 4x$

Решение. Сравнивая это уравнение с уравнением (1), находим, что $2p = 4$, откуда $p/2 = 1$. Таким образом, точка $F(1; 0)$ – фокус параболы, а прямая $x + 1 = 0$ – ее директриса.

Задание 2. Показать, что уравнение $2x^2 - 12x + y + 13 = 0$

Представляет собой уравнение параболы. Найти вершину, фокус, ось и директрису этой параболы.

Решение. Приведем данное уравнение к простейшему виду. Для этого выразим y через x и в полученном выражении выделим полный квадрат:

$$y = -2x^2 + 12x - 13, \text{ или } y = -2\left(x^2 - 6x + \frac{12}{2}\right),$$

т.е. $y = -2\left[(x^2 - 2\cdot 3x + 9) - 9 + \dfrac{13}{2}\right],$

Откуда $y = -2(x-3)^2 + 5.$

Следовательно, $y - 5 = -2(x-3)^2$, или $-\dfrac{1}{2}(y-5) = (x-3)^2.$

Положим теперь $y' = y - 5, \quad x' = x - 3.$

тем самым мы производим преобразование параллельного переноса координатных осей без изменения их направления в точку $O'(3;5)$.

В новой системе координат уравнение параболы примет вид:

$$-\frac{1}{2}y' = x'^2$$

Отсюда 2p = 1/2, т.е. p/2 = 1/8. таким образом, в новой системе координат данная парабола имеет фокус F(0; –1/8), осью параболы является ось $O'y'$ (ее уравнение $x' = 0$), а уравнение директрисы $y' = 1/8$ (рис. 12)

Возвращаясь к старой системе координат, получим:
вершину параболы $O'(3;5)$;

координаты фокуса:

$$xF = x'F + 3 = 0 + 3 = 3,$$

$$yF = y'F + 5 = -1/8 + 5 = 39/8,$$

т.е. $F(3;39/8)$;
уравнение оси параболы x – 3 = 0
уравнение директрисы y – 5 = 1/8, или 8y – 41 = 0.

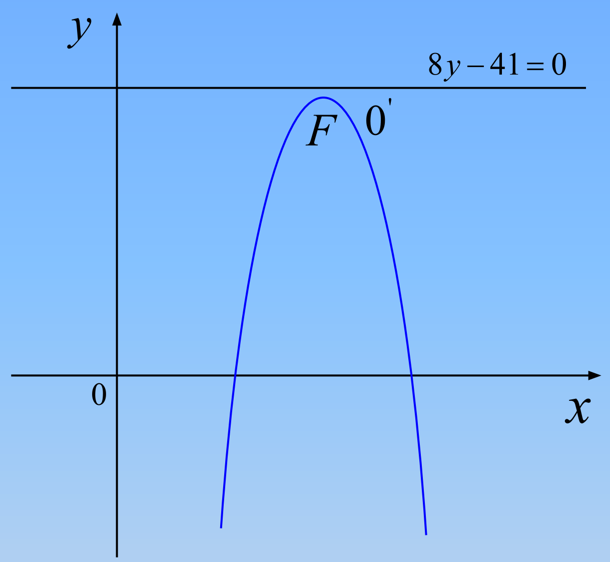


Рис. 12

Литераура:

1. “Математика” Л. Р. Вейцман, 2000 г.
2. “Алгебра начала анализа 10-11” А.Н. Колмогоров, 1993 г.
3. “Справочник по высшей математике для инженеров и учащихся втузов” Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.. - М.: Наука , 1981 г.
4. “Алгебра, учебник для 10 класса средней школы”, С. А. Теляковский, Москва, Просвещение, 1993 г.
5. “Математика задачи и решения” Гуринович К.М. 1999 г.
6. “Математика для техникумов” И.И. Валуце, Г.Д. Дилигул 1990 г.
7. “Сборник задач по математике” В.А. Подольский, А.М. Суходский 1978 г.