

Муниципальное образовательное учреждение  
«Средняя общеобразовательная школа №12»

## *Презентация*

Тема: «**КРИВЫЕ ВТОРОГО  
ПОРЯДКА**»

Тимофеева Галина Александровна  
МОУ «СОШ № 12»  
г. Щекино Тульской области

Щёкино 2011 год

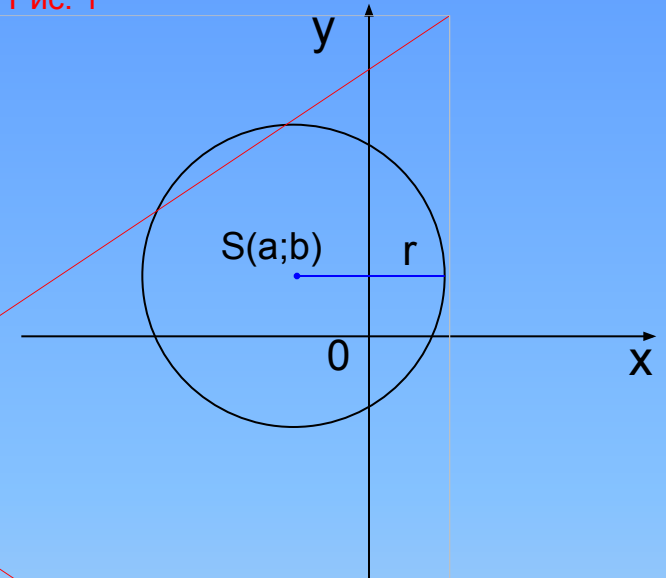
Рис. 1

## ОКРУЖНОСТЬ

Уравнение окружности с центром в точке  $S(a; b)$  и радиусом  $r$  имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (1)$$

Это каноническое уравнение окружности (рис. 1).



Уравнение второй степени относительно текущих координат  $x$  и  $y$  является уравнением окружности тогда и только тогда, когда в этом уравнении коэффициенты при квадратах координат равны, а член с произведением координат отсутствует. Таким образом, это уравнение имеет вид

$$Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + F = 0 \quad (2)$$

В этом случае говорят, что окружность задана общим уравнением.

Для определения координат центра и радиуса окружности, заданной общим уравнением, надо с помощью тождественных преобразований уравнение (2) привести к виду (1).

**Задание 1.** Составить уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку  $M(2; 1)$ .

**Решение.** Так как окружность касается осей координат, то она полностью лежит в одной из координатных четвертей, а именно в I четверти, поскольку одна из ее точек  $M(2; 1)$  находится в этой четверти. По той же причине центр искомой окружности  $S(a; b)$  равноотстоит от осей координат. Следовательно, он имеет равные положительные координаты ( $a = b > 0$ ), а радиус  $r$  этой окружности равен  $a$ . Таким образом, каноническое уравнение искомой окружности принимает вид

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$$

Для нахождения  $a$  воспользуемся тем, что точка  $M(2; 1)$  лежит на окружности:

$$(2 - a)^2 + (1 - a)^2 = a^2 \quad \text{или} \quad a^2 - 6a + 5 = 0.$$

$$\text{Отсюда} \quad a_1 = 1 \quad \text{и} \quad a_2 = 5$$

Это означает, что условию задачи удовлетворяют две окружности:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \quad \text{и} \quad (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

**Задание 2.** Определить координаты центра  $S$  и радиус  $r$  окружности, заданной общим уравнением

$$9x^2 + 9y^2 + 36x - 18y + 20 = 0.$$

**Решение.** Приведем данное уравнение к виду (1). Для этого разделим все его члены на 9, а затем сгруппируем отдельно члены, содержащие  $x$  и  $y$ :

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 2y) + \frac{20}{9} = 0$$

Дополним выражения, стоящие в каждой из скобок, до полного квадрата:

$$x^2 + 4x = (x^2 + 2x \cdot 2 + 2^2) - 4 = (x + 2)^2 - 4;$$

$$y^2 - 2y = (y^2 - 2y \cdot 1 + 1^2) - 1 = (y - 1)^2 - 1.$$

Теперь данное уравнение принимает вид

$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 + \frac{20}{9} = 0, \quad \text{или} \quad (x + 2)^2 + (y - 1)^2 - \frac{25}{9} = 0,$$

откуда 
$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1), получим  $a = -2$ ,  $b = 1$  и  $r = 5/3$ .

Таким образом, данная окружность имеет центр в точке  $S(-2; 1)$  и радиус  $r = 5/3$ .

# ЭЛЛИПС

Эллипс есть множество точек, сумма расстояний которых от двух фиксированных точек, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная ( $2a$ ), большая, чем расстояние между фокусами ( $2c$ ).

Простейшее уравнение эллипса получается, если расположить координатную систему следующим образом: за ось  $Ox$  принять прямую, проходящую через фокусы

$F_1$  и  $F_2$  (рис. 2).

Тогда уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

где  $b^2 = a^2 - c^2$ .

Точки  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$  пересечения эллипса с его осями симметрии (координатными осями) называются вершинами эллипса. Отрезки  $[A_1A_2]$  и  $[B_1B_2]$

длины которых соответственно равны  $2a$  и  $2b$ , называются осями эллипса, причем  $[A_1A_2]$  – большой осью, а

$[B_1B_2]$  – малой осью, так как  $a > b$ . Таким образом, параметры  $a$  и  $b$ , входящие в уравнение эллипса, равны его полуосям.

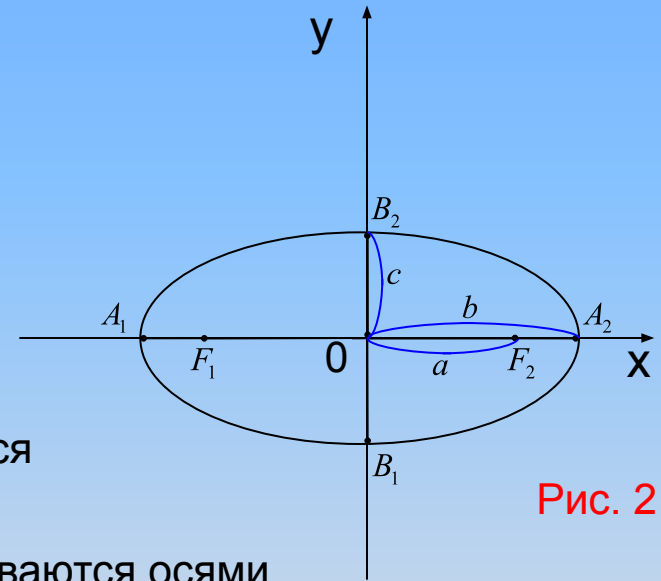


Рис. 2

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к его большой оси, т.е.

$$e = c/a. \quad (2)$$

Очевидно, что  $e < 1$ .

Если эллипс, определяемый уравнением вида (1), расположен так, что его фокусы лежат на оси  $Oy$  (рис. 3)

то тогда  $b > a$  и большой осью служит отрезок  $[B_1B_2]$  длиной  $2b$ , а малой осью – отрезок  $[A_1A_2]$  длиной  $2a$ .

Эксцентриситет такого эллипса вычисляется по формуле

$$e = c/b, \quad (2')$$

где  $c = \sqrt{b^2 - a^2}$

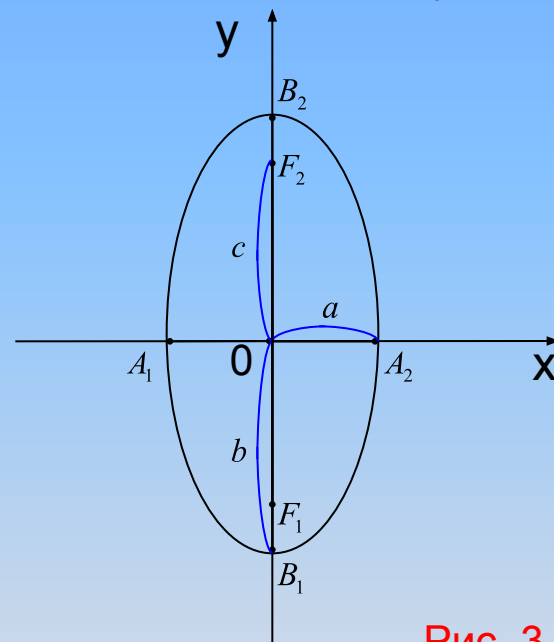


Рис. 3

**Задание 1.** Найти оси, вершины, фокусы и эксцентриситет эллипса

$$9x^2 + 25y^2 - 255 = 0.$$

**Решение.** Приведем данное уравнение к простейшему виду (1), для чего свободный член перенесем вправо и разделим на него все члены уравнения. В результате получим

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (1), имеем  $a = 5$ ,  $b = 3$ .

Отсюда находим оси эллипса  $2a = 10$ ,  $2b = 6$  и координаты вершин  $A_1(-5;0)$ ,  $A_2(5;0)$ ,  $B_1(0;-3)$ ,  $B_2(0;3)$ .

Далее находим  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ .

Следовательно, фокусами эллипса служат точки  $F_1(-4;0)$  и  $F_2(4;0)$ .

Эксцентриситет эллипса вычисляем по формуле (2):  $e = c/a = 4/5$ .

**Задание 2.** Показать, что уравнение  $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$

Представляет собой уравнение эллипса. Найти центр, оси, вершины, фокусы и эксцентриситет этого эллипса.

**Решение.** Приведем данное уравнение к простейшему виду. Для этого сгруппируем отдельно члены, содержащие переменные  $x$  и  $y$ :

$$(5x^2 - 30x) + (9y^2 + 18y) + 9 = 0.$$

В каждой из скобок вынесем коэффициент при квадрате переменной, а затем выделим полный квадрат:

$$5x^2 - 30x = 5[(x^2 - 2 \cdot 3x + 9) - 9] = 5(x - 3)^2 - 45;$$

$$9y^2 + 18y = 9[(y^2 + 2y + 1) - 1] = 9(y + 1)^2 - 9.$$

Данное уравнение преобразуем теперь к виду

$$5(x - 3)^2 + 9(y + 1)^2 - 45 - 9 + 9 = 0, \text{ или } 5(x - 3)^2 + 9(y + 1)^2 = 45,$$

откуда 
$$\frac{(x - 3)^2}{9} + \frac{(y + 1)^2}{5} = 1.$$

Введем обозначения  $x' = x - 3$ ,  $y' = y + 1$ .

Произведенную замену переменных будем рассматривать как преобразование декартовых координат  $x, y$  в координаты  $x', y'$ , при параллельном сдвиге координатных осей, причем новое начало координат находится в точке  $O'(3; -1)$ . В этой системе координат уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{5} = 1.$$



Таким образом, заданное уравнение определяет эллипс с центром в точке  $O' (3; -1)$ .

И полуосями  $a = 3$  и  $b = \sqrt{5}$  (рис. 4)

Кроме того,  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 5} = 2$ ;

Отсюда находим эксцентриситет  $e = c/a = 2/3$ .

Остается найти координаты вершин и фокусов эллипса.

В новой системе координаты вершин таковы:

$A_1(-3;0)$ ,  $A_2(3;0)$ ,  $B_1(0;-\sqrt{5})$ ,  $B_2(0;\sqrt{5})$ .

координаты фокусов:

$F_1(-2;0)$  и  $F_2(2;0)$ .

Так как старые координаты выражаются через новые по формулам  $x = x' + 3$ ,  $y = y' - 1$ ,

то, возвращаясь к первоначальной системе координат, окончательно получим:

$A_1(0;-1)$ ,  $A_2(6;-1)$ ,

$B_1(3;-\sqrt{5} - 1)$ ,  $B_2(3;\sqrt{5} - 1)$ ,

$F_1(1;-1)$ ,  $F_2(5;-1)$ .

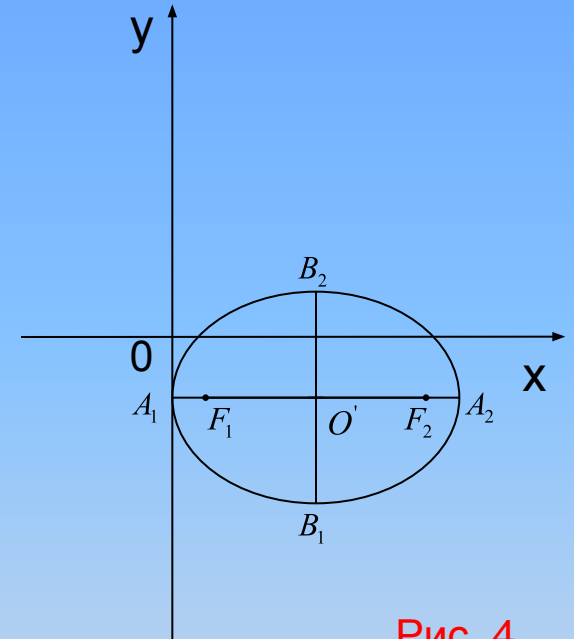


Рис. 4

## ГИПЕРБОЛА

Гиперболой называется множество точек, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная ( $2a$ ), меньшая, чем расстояние между фокусами ( $2c$ ).

Простейшее уравнение гиперболы получается, если расположить координатную систему следующим образом: за ось  $Ox$  принять прямую, проходящую через фокусы  $F_1$  и  $F_2$

а за ось  $Oy$  перпендикуляр в середине отрезка  $[F_1F_2]$  (рис. 5)

Тогда уравнение гиперболы примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

где  $b^2 = c^2 - a^2$

Гипербола имеет две оси симметрии (координатные оси), с одной из которых (осью абсцисс) она пересекается в двух точках  $A_1$  и  $A_2$

называемых вершинами гиперболы. Отрезок  $[A_1A_2]$

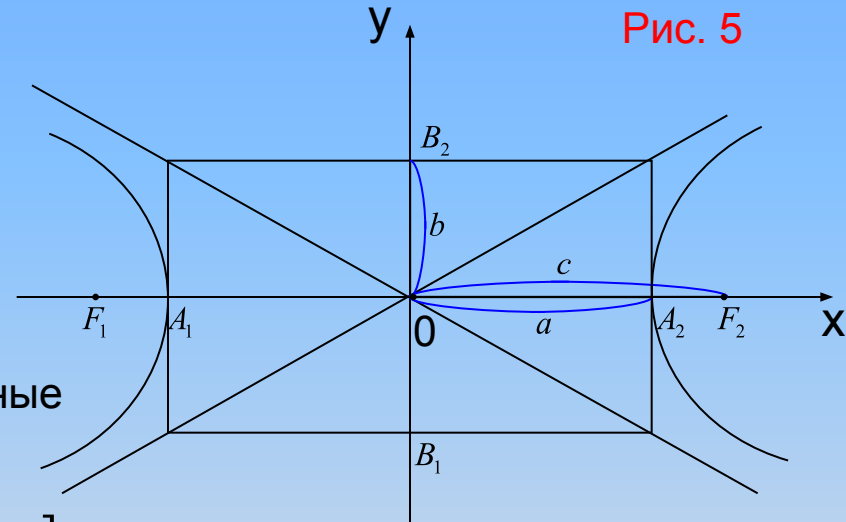
длиной  $2a$  называется действительной осью гиперболы, а отрезок  $[B_1B_2]$

длиной  $2b$  – мнимой осью гиперболы. Таким образом, параметры  $a$  и  $b$ , входящие в уравнение гиперболы, равны ее полуосям.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к ее действительной оси:

$$e = c/a \quad (2)$$

Очевидно, что  $e > 1$ .



Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x \quad (3)$$

Если мнимая ось гиперболы направлена по оси  $Ox$  и имеет длину  $2a$ , а действительная ось длиной  $2b$  направлена по оси  $Oy$  (рис. 6)

то уравнение гиперболы имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4)$$

Эксцентриситет такой гиперболы вычисляется по формуле:

$$e = c/b \quad (2')$$

Ее асимптоты те же, что и у гиперболы (1).

Гиперболы (1) и (4) называются сопряженными.

Гипербола называется равносторонней, если ее действительная и мнимая оси равны, т.

е.  $a = b$ . Простейшее уравнение равносторонней гиперболы имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (5)$$

или

$$-x^2 + y^2 = a^2. \quad (5')$$

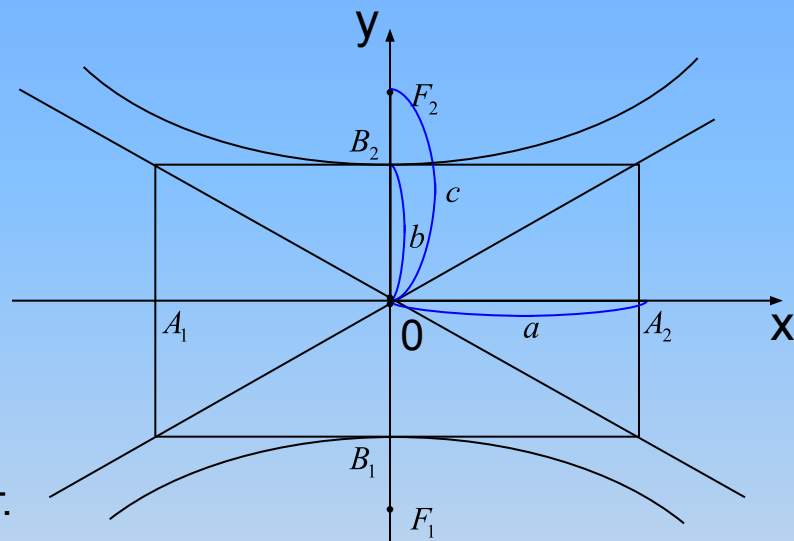


Рис. 6

**Задание 1.** Найти оси, вершины, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы  $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$ .

**Решение.** Перенесем свободный член вправо и разделим на него все члены данного уравнения. В результате получим простейшее уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (1), имеем  $a = 3$ ,  $b = 4$ . Таким образом, действительная ось гиперболы  $2a = 6$ , а мнимая ось  $2b = 8$ ; координаты вершин

$$A_1(-3;0) \text{ и } A_2(3;0).$$

Далее,  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$ ;

следовательно, фокусами гиперболы служат точки

$$F_1(-5;0) \text{ и } F_2(5;0).$$

Эксцентриситет гиперболы вычисляем по формуле (2):  $e = c/a = 5/3$ . Наконец, подставляя значения  $a = 3$ ,  $b = 4$  в формулы (3), получаем уравнения асимптот гиперболы:  $y = 4x/3$  и  $y = -4x/3$ .

**Задание 2.** Показать, что уравнение  $5x^2 - 4y^2 + 30x + 8y + 21 = 0$

Представляет собой уравнение гиперболы. Найти центр, оси, вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты этой гиперболы.

**Решение.** Приведем данное уравнение к простейшему виду

$$5(x^2 + 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) - 45 + 4 + 21 = 0;$$

$$5(x+3)^2 - 4(y-1)^2 = 20; \quad \frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1.$$

Обозначим  $x' = x + 3$ , и  $y' = y - 1$ .

Таким образом, мы производим преобразование параллельного переноса осей координат в точку  $O(-3;1)$ . В новой системе координат данное уравнение принимает вид  $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{5} = 1$ , т.е. определяет гиперболу с центром в точке  $O'(-3;1)$

и полуосями  $a = 2$  и  $b = \sqrt{5}$  (рис. 7)

Так как  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 5} = 3$ , то  $e = c/a = 3/2$ .

Нетрудно найти координаты вершин и фокусов в новой координатной системе:

$$A_1(-2;0), \quad A_2(2;0), \quad F_1(-3;0), \quad F_2(3;0).$$

Так как  $x = x' - 3$ ,  $y = y' + 1$ , то, возвращаясь к старой системе координат, получим  $A_1(-5;1)$ ,  $A_2(-1;1)$ ,  $F_1(-6;1)$ ,  $F_2(0;1)$ .

Остается найти асимптоты гиперболы. В новой системе координат уравнения асимптот имеют вид  $y' = \pm bx' / a$ , т.е.  $y' = \pm \sqrt{5}x' / 2$ .

Заменяя теперь  $x'$  на  $x + 3$ , а  $y'$  на  $y - 1$ , получим уравнения асимптот в первоначальной системе координат:

$$y - 1 = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}(x + 3).$$

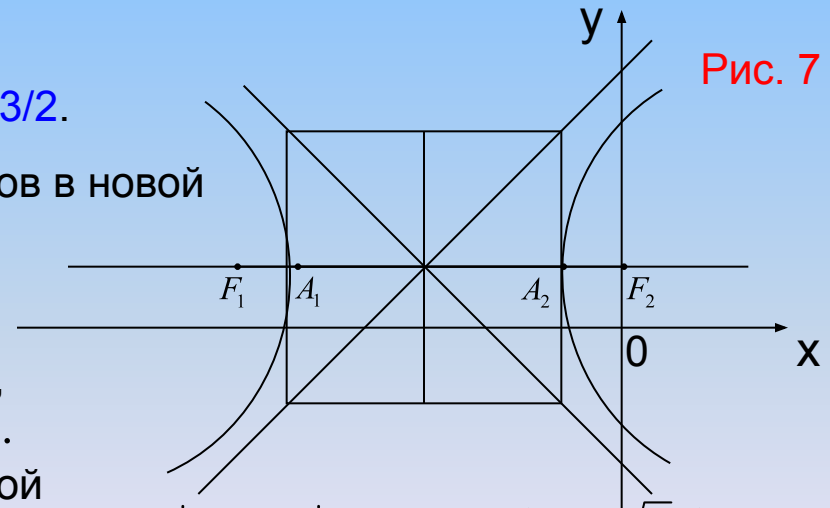


Рис. 7

## ПАРАБОЛА

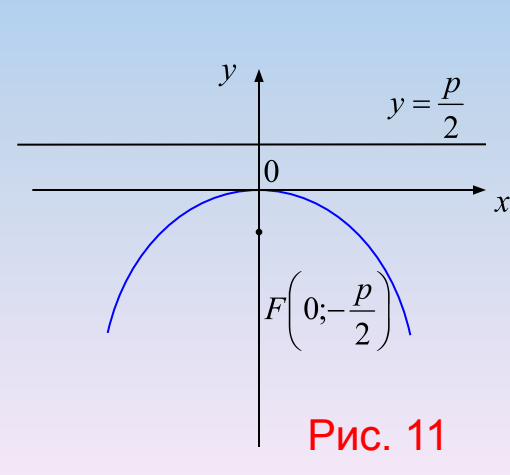
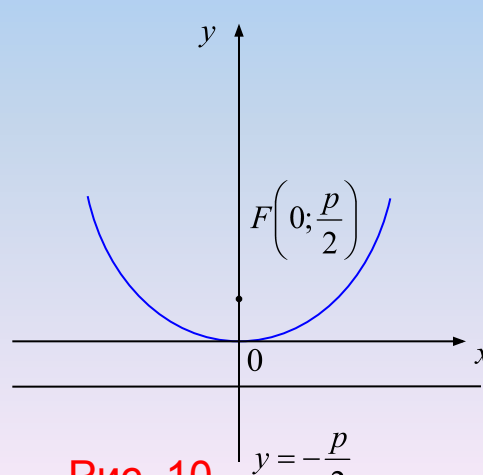
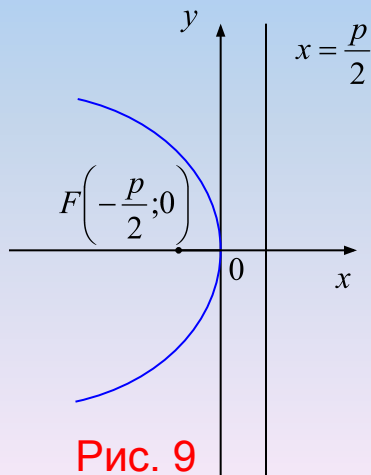
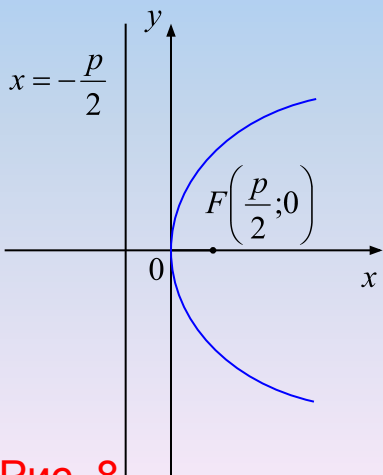
Параболой называется множество точек, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой параболы.

Величина  $p$ , равная расстоянию от фокуса до директрисы, называется параметром параболы; прямая, проходящая через фокус параболы перпендикулярно ее директрисе, называется осью, а точка пересечения параболы с ее осью – вершиной параболы.

Простейшее уравнение параболы получается, если координатная система расположена следующим образом: за одну из координатных осей берется ось параболы, а за другую – прямая, перпендикулярная оси параболы и проведенная посередине между фокусом и директрисой.

Тогда уравнение параболы примет вид:

$$y^2 = 2px \text{ (рис. 8) (1)} \quad y^2 = -2px \text{ (рис. 9) (2)} \quad x^2 = 2py \text{ (рис. 10) (3)} \quad x^2 = -2py \text{ (рис. 11) (4)}$$



Уравнение  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) (5)

определяет параболу, ось которой перпендикулярна оси абсцисс.

Аналогично, уравнение

$$x = my^2 + ny + p \quad (m \neq 0) \quad (6)$$

определяет параболу, ось которой перпендикулярна оси ординат.

Уравнения (5) и (6) приводятся к простейшему виду (1) – (4) путем тождественных преобразований с последующим параллельным переносом координатной системы.

**Задание 1.** Определить координаты фокуса и составить уравнение директрисы параболы

$$y^2 = 4x$$

**Решение.** Сравнивая это уравнение с уравнением (1), находим, что

$2p = 4$ , откуда  $p/2 = 1$ . Таким образом, точка  $F(1; 0)$  – фокус параболы, а прямая  $x + 1 = 0$  – ее директриса.

**Задание 2.** Показать, что уравнение  $2x^2 - 12x + y + 13 = 0$

Представляет собой уравнение параболы. Найти вершину, фокус, ось и директрису этой параболы.

**Решение.** Приведем данное уравнение к простейшему виду. Для этого выразим  $y$  через  $x$  и в полученном выражении выделим полный квадрат:

$$y = -2x^2 + 12x - 13, \text{ или } y = -2\left(x^2 - 6x + \frac{12}{2}\right),$$

т.е.  $y = -2\left[(x^2 - 2 \cdot 3x + 9) - 9 + \frac{13}{2}\right],$

Откуда  $y = -2(x - 3)^2 + 5.$

Следовательно,  $y - 5 = -2(x - 3)^2,$  или  $-\frac{1}{2}(y - 5) = (x - 3)^2.$

Положим теперь  $y' = y - 5,$   $x' = x - 3.$

тем самым мы производим преобразование параллельного переноса координатных осей без изменения их направления в точку  $O(3;5).$

В новой системе координат уравнение параболы примет вид:

$$-\frac{1}{2}y' = x'^2$$



Отсюда  $2p = 1/2$ , т.е.  $p/2 = 1/8$ . таким образом, в новой системе координат данная парабола имеет фокус  $F(0; -1/8)$ , осью параболы является ось  $O'y'$  (ее уравнение  $x' = 0$ ), а уравнение директрисы  $y' = 1/8$  (рис. 12)

Возвращаясь к старой системе координат, получим:  
вершину параболы  $O'(3;5)$ ;

координаты фокуса:

$$xF = x'F + 3 = 0 + 3 = 3,$$

$$yF = y'F + 5 = -1/8 + 5 = 39/8,$$

т.е.  $F(3; 39/8)$ ;

уравнение оси параболы  $x - 3 = 0$

уравнение директрисы  $y - 5 = 1/8$ , или  $8y - 41 = 0$ .

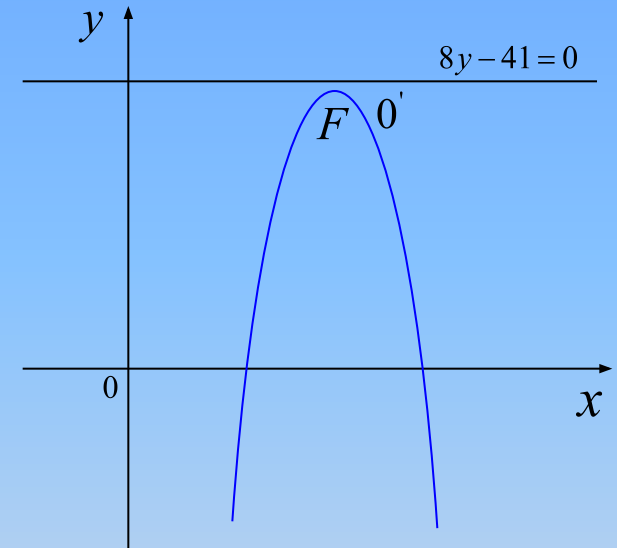


Рис. 12

## Литераура:

1. “Математика” Л. Р. Вейцман, 2000 г.
2. “Алгебра начала анализа 10-11” А.Н. Колмогоров, 1993 г.
3. “Справочник по высшей математике для инженеров и учащихся втузов”  
Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.. - М.: Наука , 1981 г.
4. “Алгебра, учебник для 10 класса средней школы”, С. А. Теляковский,  
Москва, Просвещение, 1993 г.
5. “Математика задачи и решения” Гуринович К.М. 1999 г.
6. “Математика для техникумов” И.И. Валуце, Г.Д. Дилигул 1990 г.
7. “Сборник задач по математике” В.А. Подольский, А.М. Суходский 1978 г.