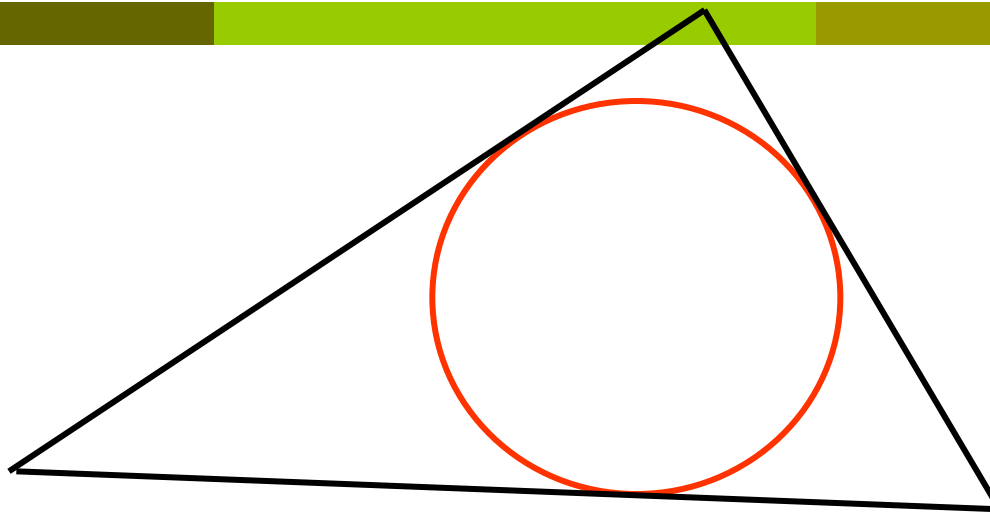
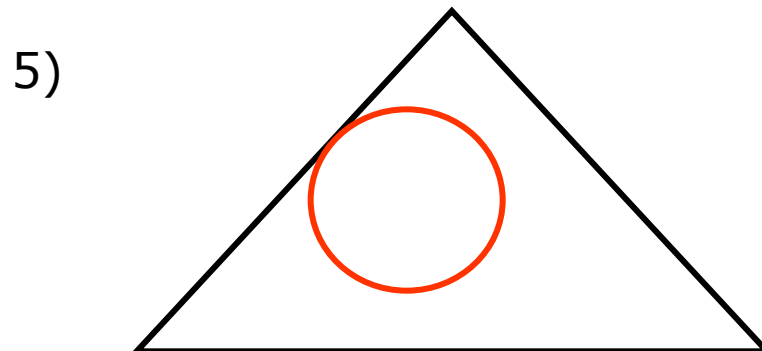
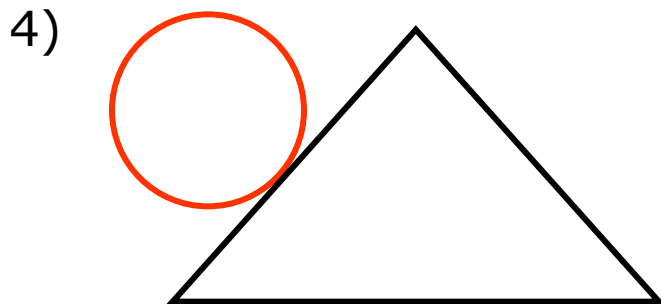
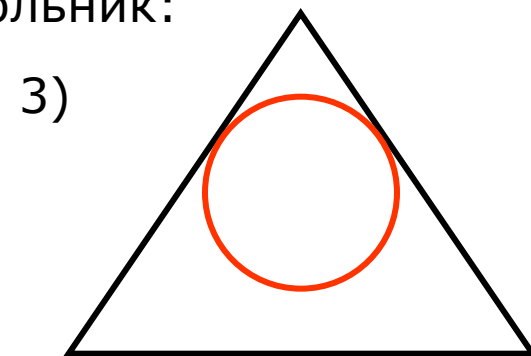
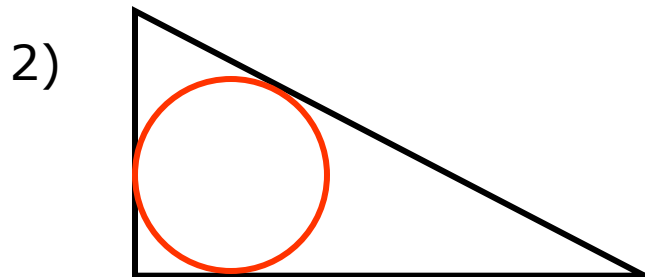
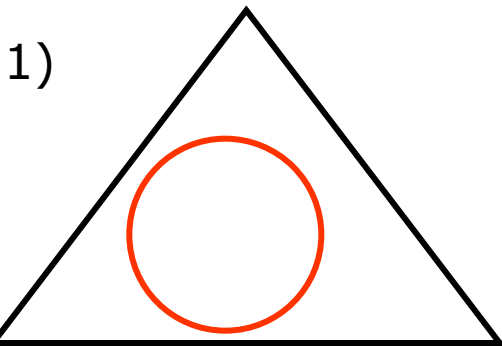


Вписанная окружность



Определение: **окружность называется вписанной в треугольник, если все стороны треугольника касаются окружности.**

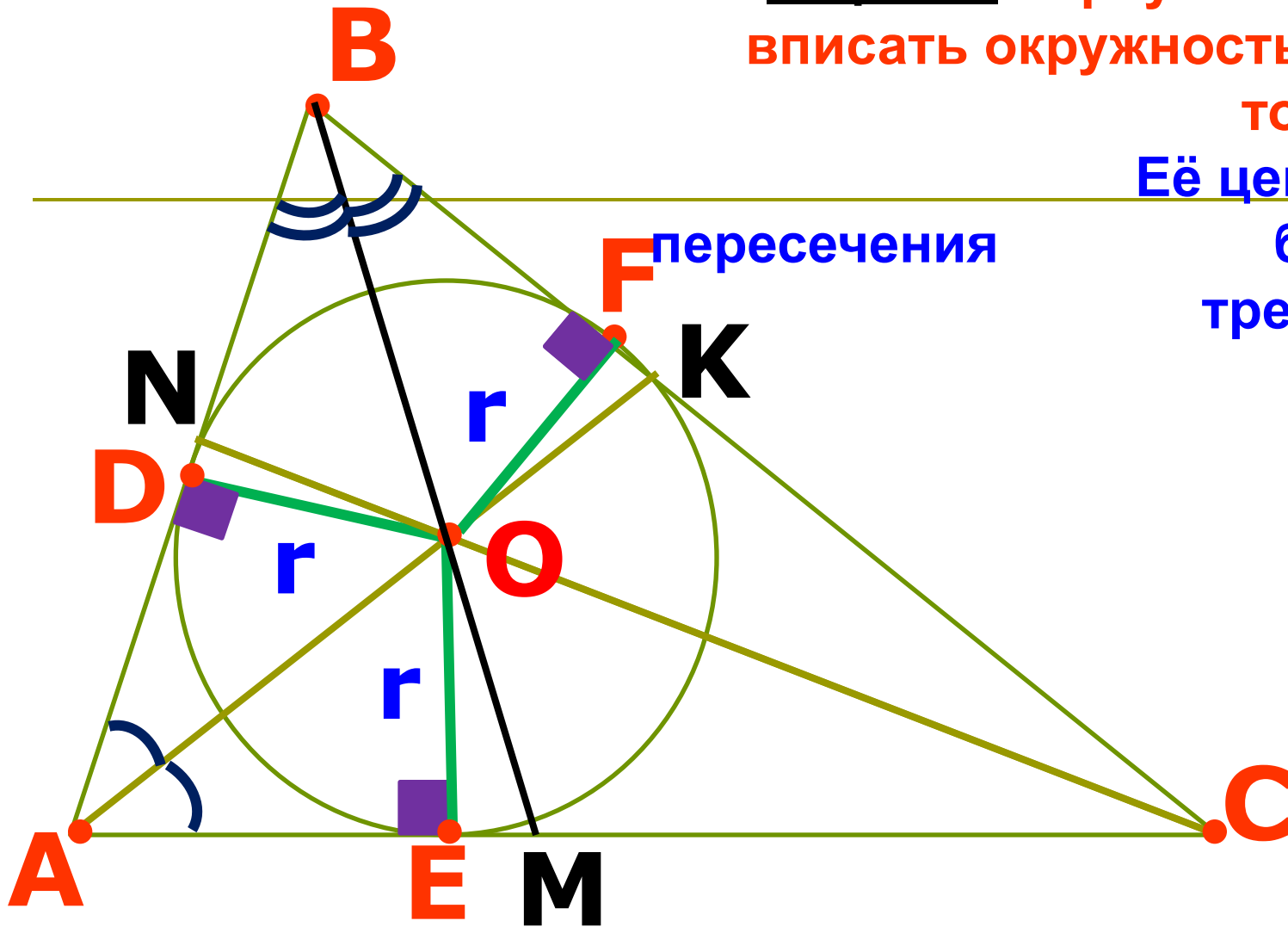
На каком рисунке окружность вписана в треугольник:



Если окружность вписана в треугольник, то треугольник описан около окружности.

Теорема. В треугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

Её центр – точка биссектрис треугольника.



Проведём биссектрисы треугольника: AK , BM , CN . Построим перпендикуляры OD , OE , OF , которые равны между собой, т.к. равны соответствующие треугольники. Получаем $OD = OE = OF = r$.

Алгоритм построения вписанной окружности в треугольник

- 1. Строим две биссектрисы треугольника. Точка пересечения-центр вписанной окружности.
- 2. Строим перпендикуляр на основание из точки пересечения.
- 3. Этот перпендикуляр является радиусом вписанной окружности.
- Строим вписанную окружность.

Задача №1

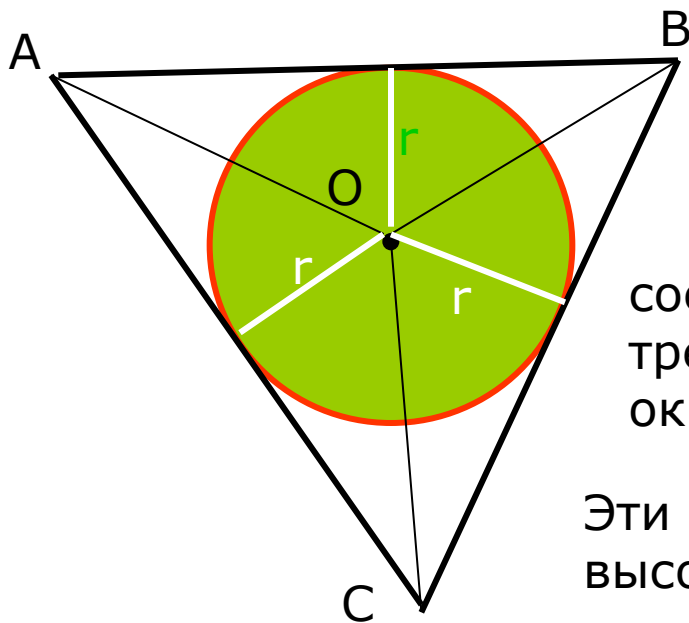
- Построить вписанную окружность в:
- 1. остроугольный треугольник;

- 2. тупоугольный треугольник;
- 3. прямоугольный треугольник.

□ **Самостоятельная работа**

- Построить вписанную окружность в:
- 1. остроугольный равнобедренный треугольник;
- 2. тупоугольный равнобедренный треугольник;
- 3. прямоугольный равнобедренный треугольник.

Важная формула



Дано: Окр.(O;r) вписана в $\triangle ABC$,
 $p = \frac{1}{2} (AB + BC + AC)$ – полупериметр.

Доказать: $S_{ABC} = p \cdot r$

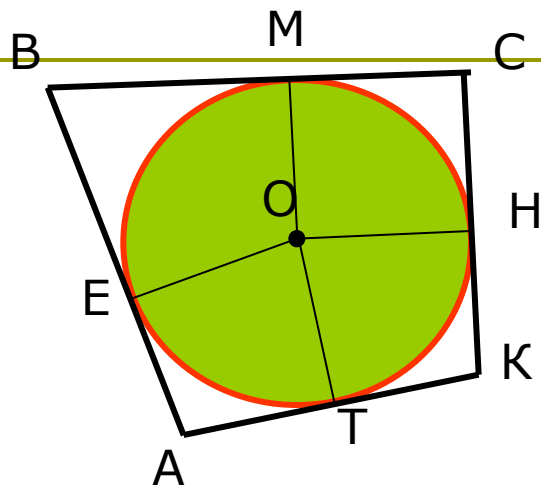
Доказательство:

соединим центр окружности с вершинами треугольника и проведём радиусы окружности в точки касания.

Эти радиусы являются высотами треугольников AOB, BOC, COA.

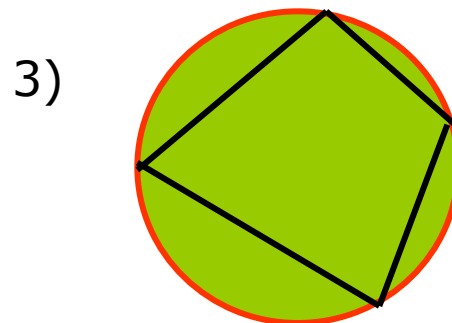
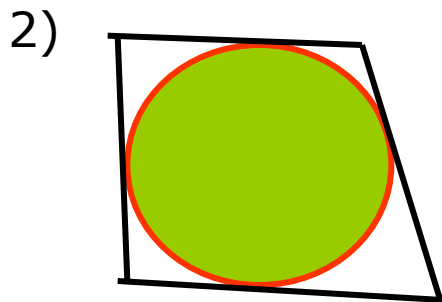
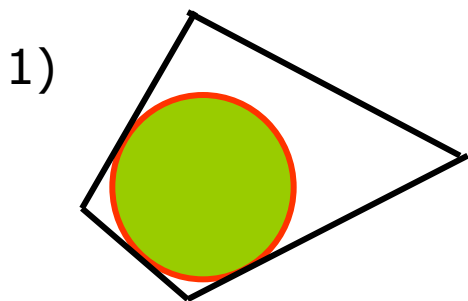
$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} AC \cdot r = \\ &= \frac{1}{2} (AB + BC + AC) \cdot r = p \cdot r. \end{aligned}$$

Окружность, вписанная в четырёхугольник

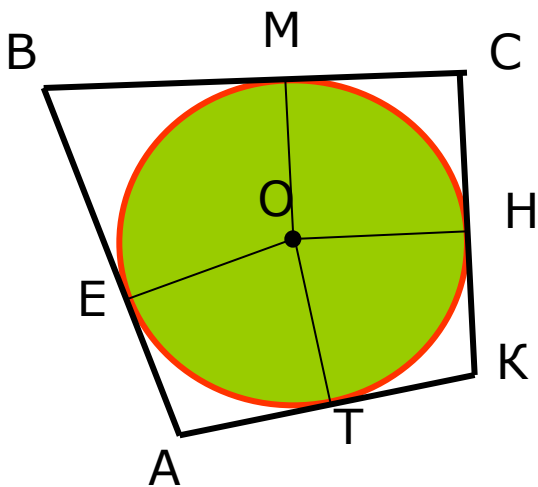


Определение: **окружность называется вписанной в четырёхугольник, если все стороны четырёхугольника касаются её.**

На каком рисунке окружность вписана в четырёхугольник:



Теорема: **если в четырёхугольник вписана окружность, то суммы противоположных сторон четырёхугольника равны** (в любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны).

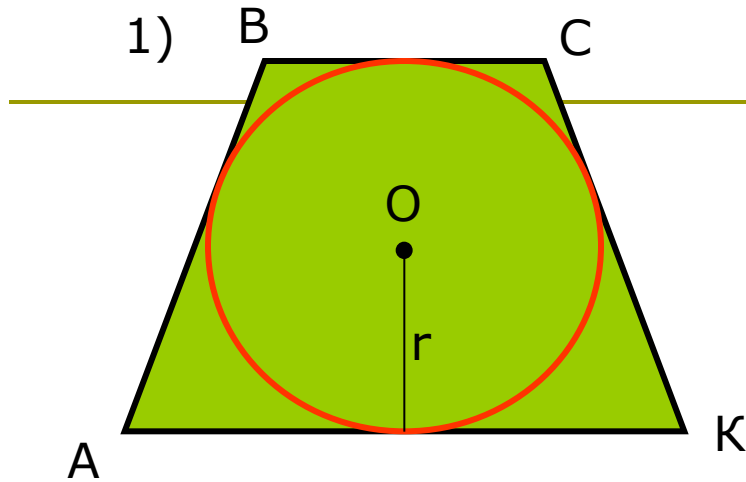


$$AB + CK = BC + AK.$$

Обратная теорема: **если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.**

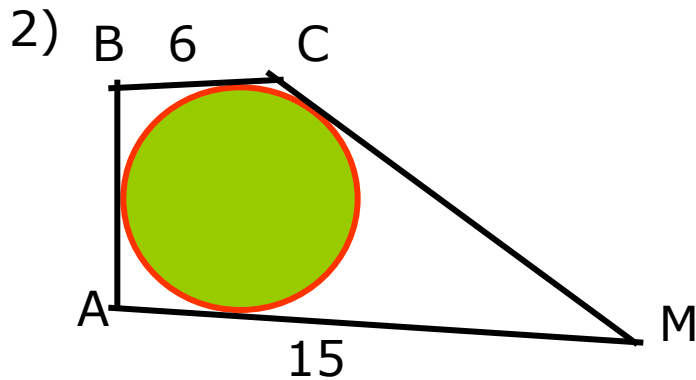
(доказательство – в учебнике № 724)

Реши задачи



Дано: Окр. $(O; r)$ вписана в $ABCK$,
 $P_{ABCK} = 10$

Найти: $BC + AK$



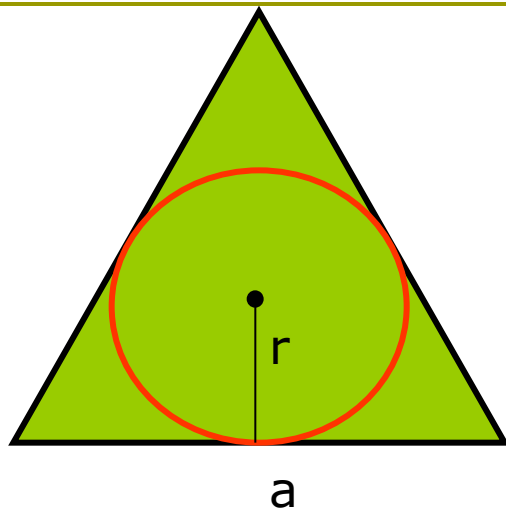
Дано: $ABCM$ описан около Окр. $(O; r)$
 $BC = 6$, $AM = 15$,

$$CM = 2 AB$$

Найти: AB , CM

Задача: в равносторонний треугольник со стороной 4 см вписана окружность. Найдите её радиус.

Решение:



$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad \text{и} \quad S = p \cdot r$$

$$S = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

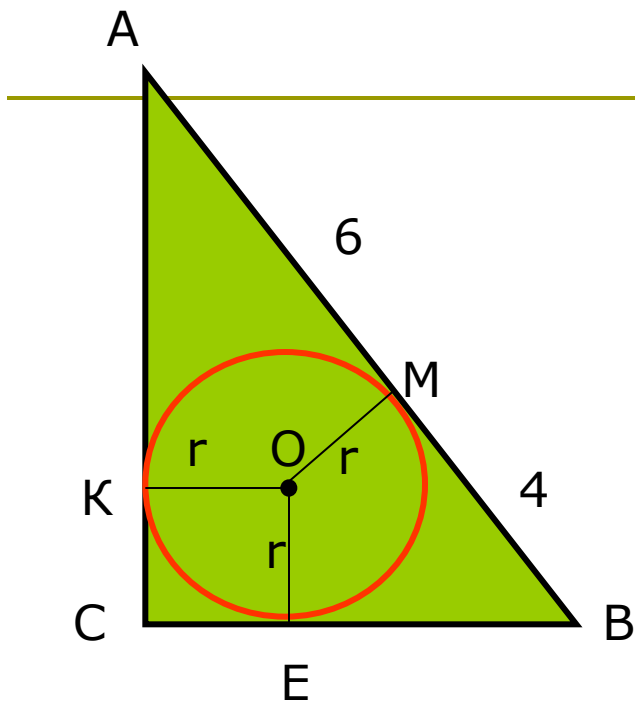
$$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6(\text{см}) - \text{полупериметр}$$

$$4\sqrt{3} = 6 \cdot r$$

$$r = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} (\text{см})$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\sqrt{3}}{3} (\text{см})$$

Задача: в прямоугольный треугольник вписана окружность, гипотенуза точкой касания делится на отрезки 6 см и 4 см. Найдите радиус вписанной окружности.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$

Окр.(O;r) вписана,

AM = 6 см, BM = 4 см

Найти: r.

Решение:

$$AB = AM + BM = 6 + 4 = 10(\text{см})$$

Т. к. Окр.(O;r) вписана в $\triangle ABC$, то AB, AC, BC – касательные и по свойству касательных, проведённых из одной точки: AM = AK = 6 см, BE = BM = 4 см, CK = CE

Т. к. $\angle C = 90^\circ$, то СКОЕ – квадрат, поэтому CK = CE = r,

$$AC = 6 + r, BC = 4 + r$$

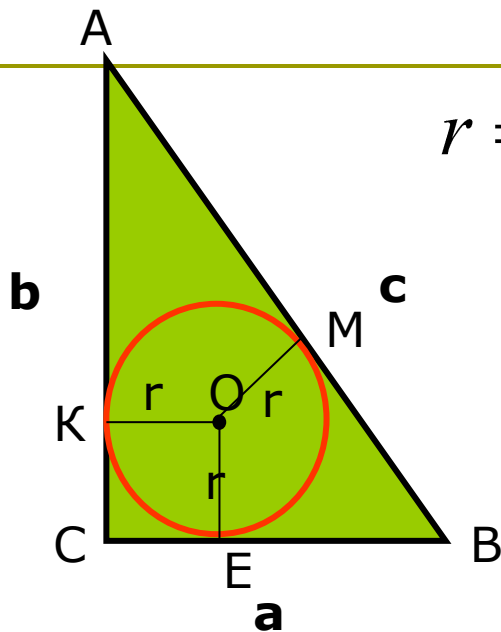
По теореме Пифагора: $AC^2 + BC^2 = AB^2$

$$(6 + r)^2 + (4 + r)^2 = 10^2$$

Решив квадратное уравнение, получим r = 2 см

Ответ: 2 см

Нужная формула для радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник



$$r = \frac{a + b - c}{2}; a, b - \text{катеты, } c - \text{гипотенуза}$$

Доказательство:

Т. к. Окр.(O;r) вписана в треугольник ABC, у которого угол C – прямой, то AC, BC, AB – касательные и

CKOE – квадрат, значит, CK = CE = r

По свойству касательных: BE = BM = a - r

AK = AM = b - r

AB = AM + BM

c = b - r + a - r

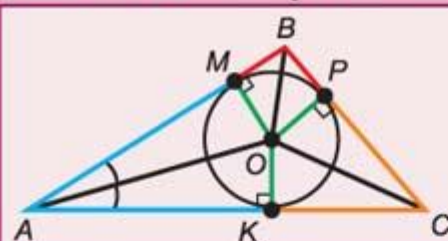
2r = a + b - c

$r = \frac{1}{2} (a + b - c)$

Ваш заказ принят интернет-магазином My-shop.ru. Его номер: 3859767

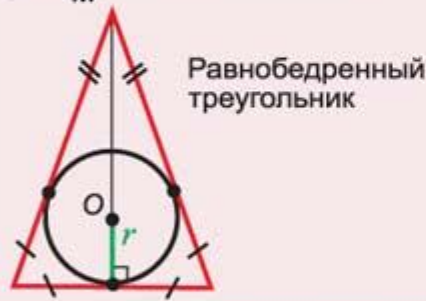
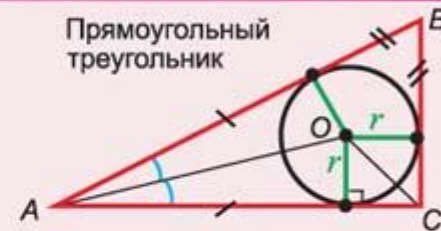
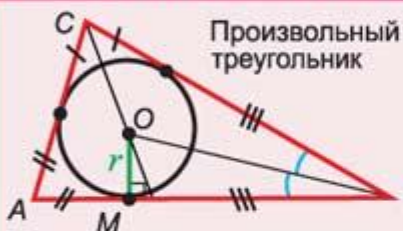
3

ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК

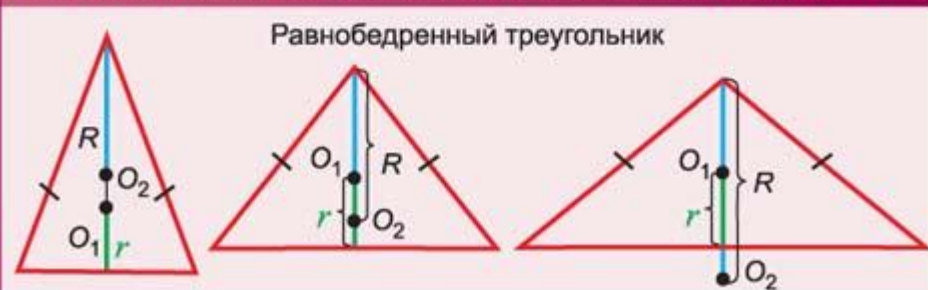


AB, BC, AC – касательные
 Отрезки касательных равны:
 $AM = AK, BM = BP, CP = CK$
 $OM = OK = OP = r$
 AO, BO, CO – биссектрисы углов

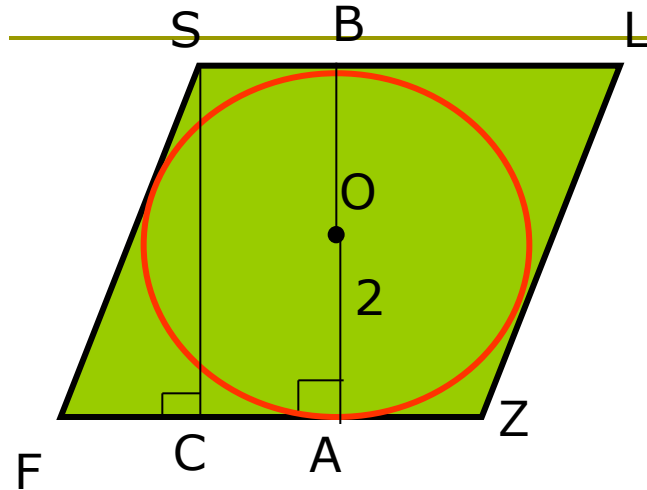
ПОЛОЖЕНИЕ ЦЕНТРА ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ



ЦЕНТРЫ И РАДИУСЫ ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТЕЙ



Задача: в ромб, острый угол которого 60° , вписана окружность, радиус которой равен 2 см. Найти периметр ромба.



Дано: Окр.(O; 2 см) вписана в ромб FSLZ, $\angle F = 60^\circ$.

Найти: P_{FSLZ}

Решение:

Т. к. окружность вписана в ромб, то стороны ромба касаются окружности, значит, $AB \perp FZ$, $AB = 2r = 4$ см – диаметр.

Проведём $SC \perp FZ$, $SC = AB$ (как перпендикуляры между параллельными прямыми), $SC = 4$ см

$$\triangle FSC - \text{прямоугольный, } \sin F = \frac{SC}{FS}; \sin 60^\circ = \frac{4}{FS}; \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{FS}; FS = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$P_{FSLZ} = 4FS = 4 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ (см).}$$

Ответ: $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ см