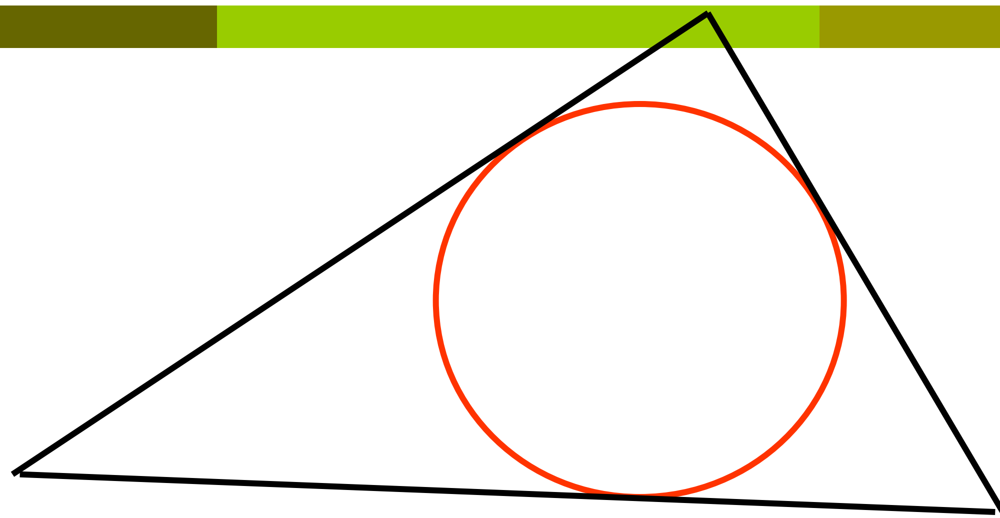
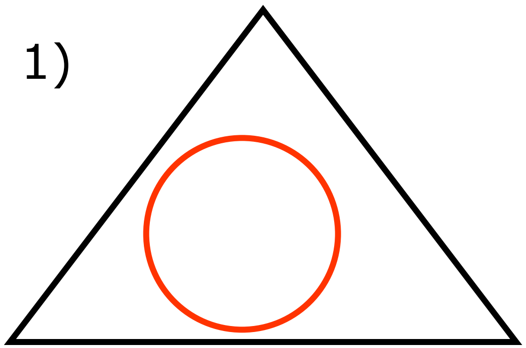
# Вписанная окружность



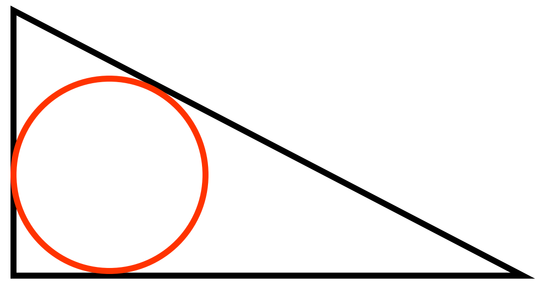
Определение: **окружность называется вписанной в треугольник, если все стороны треугольника касаются окружности.**

На каком рисунке окружность вписана в треугольник:

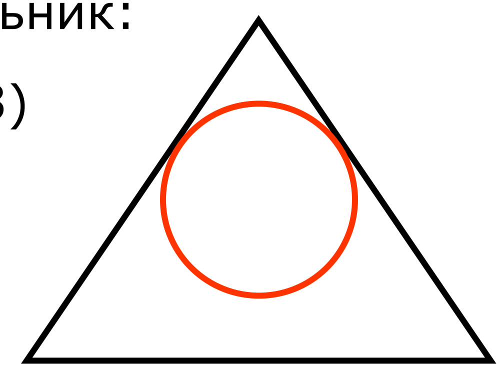
1)



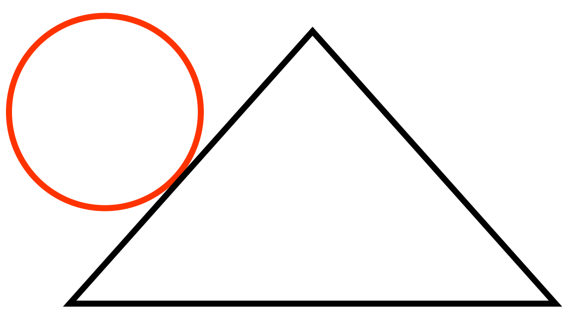
2)



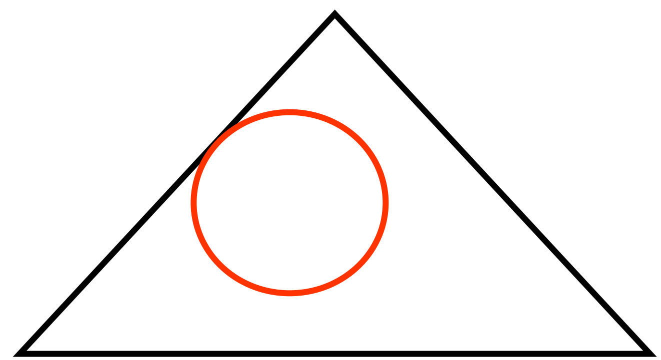
3)



4)

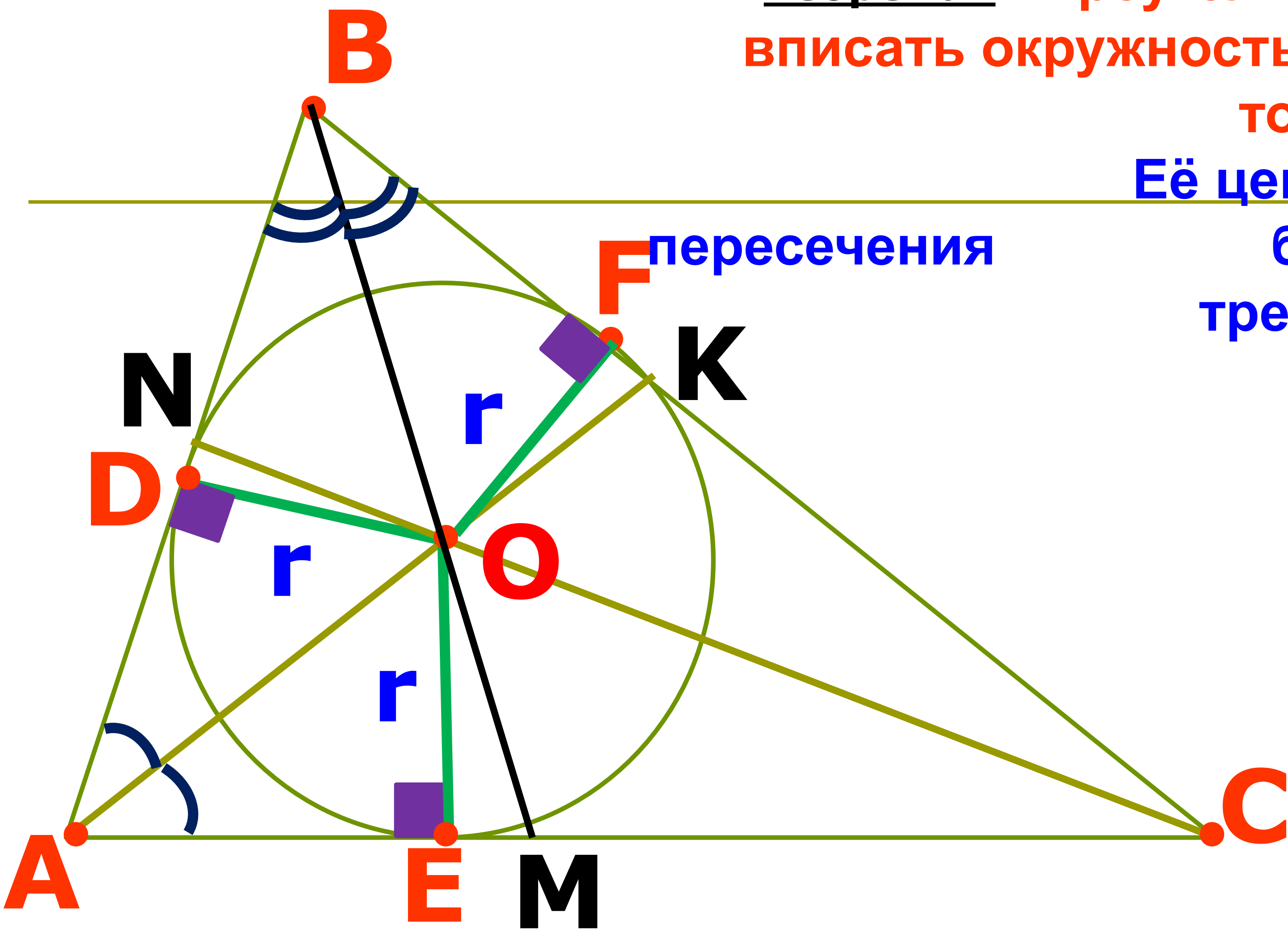


5)



**Если окружность вписана в треугольник, то треугольник описан около окружности.**

**<u>Теорема.</u>** **В треугольник можно вписать окружность, и притом только одну.**
**Её центр – точка пересечения биссектрис треугольника.**




**Проведём биссектрисы треугольника: AK, BM, CN. Построим перпендикуляры OD, OE, OF, которые равны между собой, т.к. равны соответствующие треугольники. Получаем OD= OE= OF=r.**

# Алгоритм построения вписанной окружности в треугольник

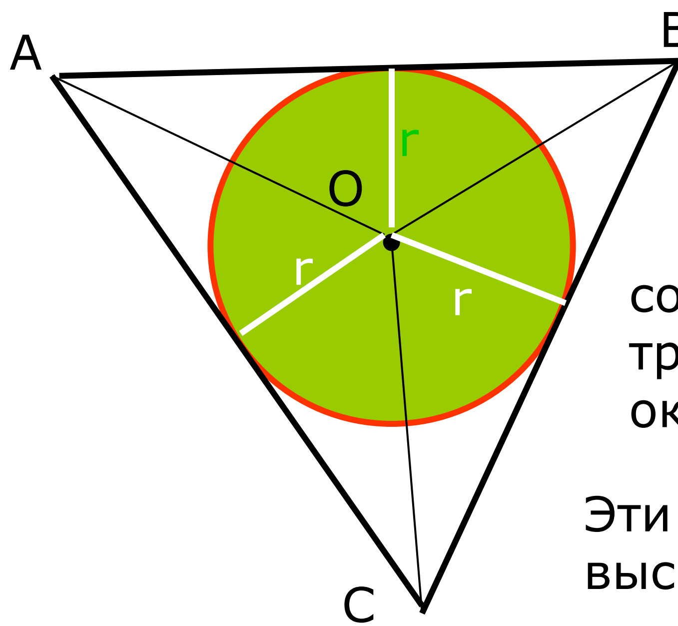
- 1.Строим две биссектрисы треугольника. Точка пересечения-центр вписанной окружности.
- 2. Строим перпендикуляр на основание из точки пересечения.
- 3. Этот перпендикуляр является радиусом вписанной окружности.
- Строим вписанную окружность.

# Задача №1

- Построить вписанную окружность в:
- 1. остроугольный треугольник;
- 2. тупоугольный треугольник;
- 3. прямоугольный треугольник.
- **Самостоятельная работа**
- Построить вписанную окружность в:
- 1. остроугольный равнобедренный треугольник;
- 2. тупоугольный равнобедренный треугольник;
- 3. прямоугольный равнобедренный треугольник.

# Важная формула

Дано: Окр.(O;r) вписана в △ABC,
p = ½ (AB + BC + AC) – полупериметр.




Доказать: $S_{ABC} = p \cdot r$

Доказательство:

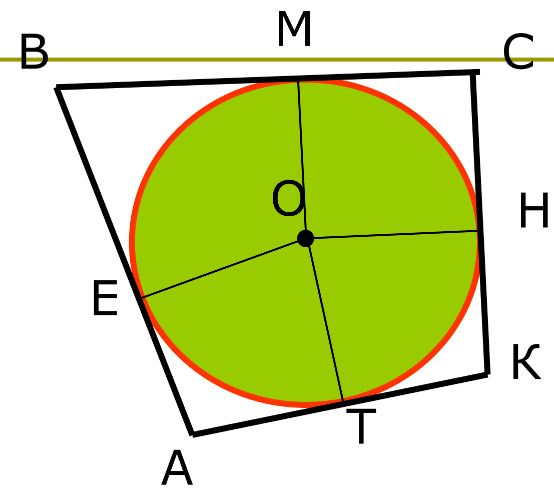
соединим центр окружности с вершинами треугольника и проведём радиусы окружности в точки касания.

Эти радиусы являются высотами треугольников AOB, BOC, COA.

$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} AC \cdot r =$
$= \frac{1}{2} (AB + BC + AC) \cdot r = p \cdot r.$

**№689**

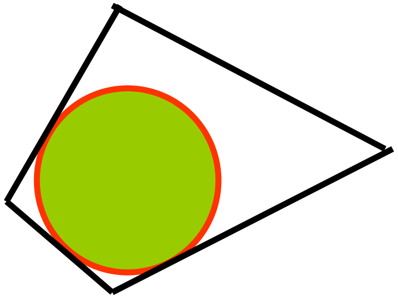
# Окружность, вписанная в четырёхугольник



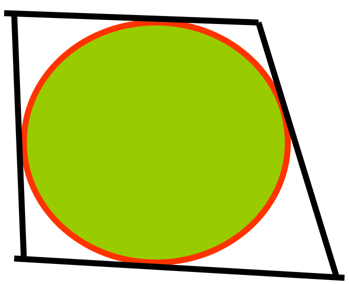

Определение: **окружность называется вписанной в четырёхугольник, если все стороны четырёхугольника касаются её.**

На каком рисунке окружность вписана в четырёхугольник:

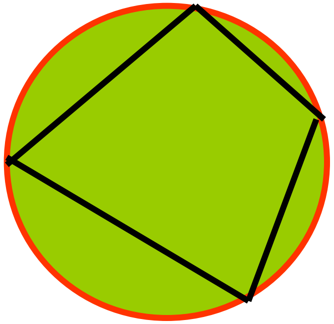
1)



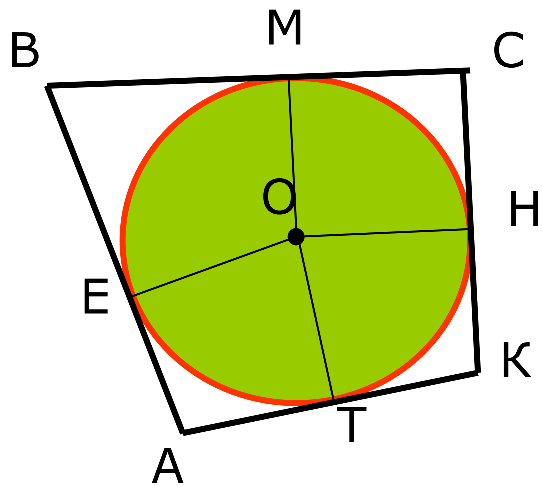
2)



3)



Теорема: **если в четырёхугольник вписана окружность, то суммы противоположных сторон четырёхугольника равны (** в любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны).

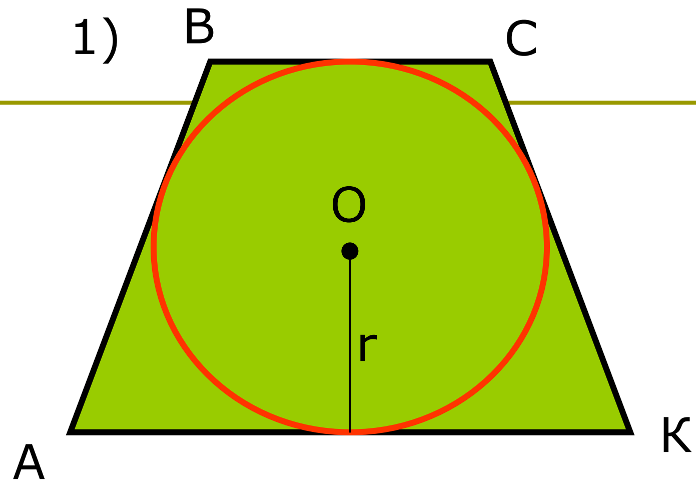



**AB + CK = BC + AK.**

Обратная теорема: **если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.**

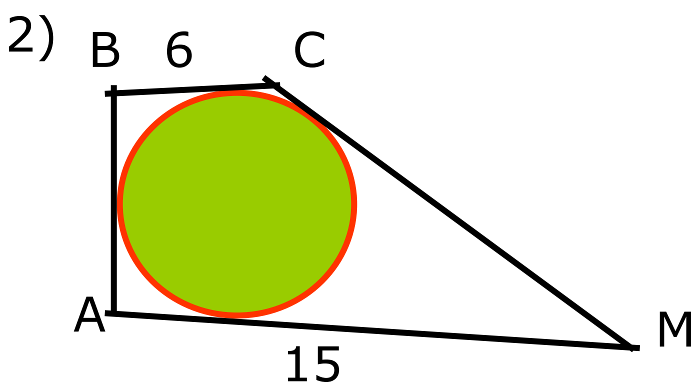
( доказательство – в учебнике № 724 )

# Реши задачи




Дано: Окр.(O; r) вписана в АВСК,
$P_{ABCK} = 10$

Найти: ВС + АК



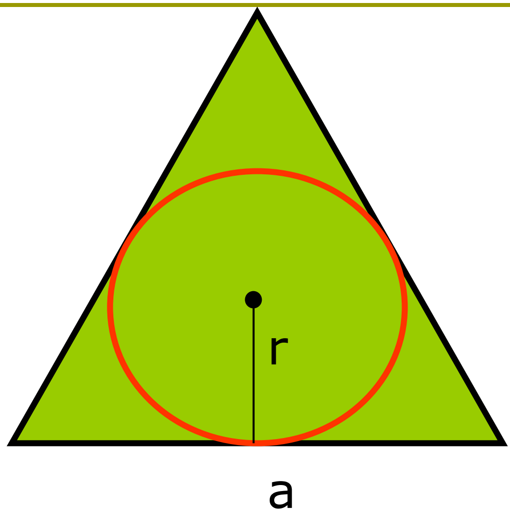

Дано: АВСМ описан около Окр.(O; r)
ВС = 6, АМ = 15,

СМ = 2 АВ

Найти: АВ, СМ

**№695 698**

Задача: в равносторонний треугольник со стороной 4 см вписана окружность. Найдите её радиус.




Решение:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{и} \quad S = p \cdot r$$

$$S = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

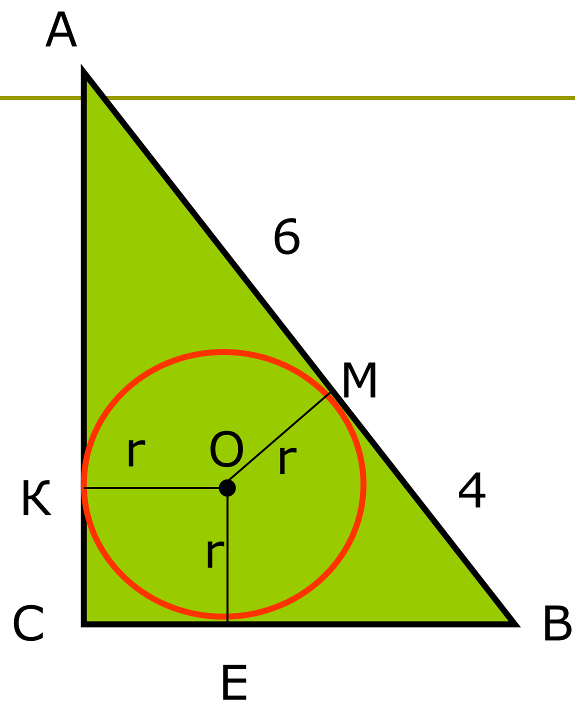
P = ½ ·4 · 3 = ½ · 12 = 6(см) - полупериметр

$$4\sqrt{3} = 6 \cdot r$$

$$r = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ (см)}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (см)

Задача: в прямоугольный треугольник вписана окружность, гипотенуза точкой касания делится на отрезки 6 см и 4 см. Найдите радиус вписанной окружности.




Дано: △ABC, $\angle C = 90^0$

Окр.(O;r) вписана,

AM = 6 см, BM = 4 см

Найти: r.

Решение:

AB = AM + BM = 6 + 4 = 10(см)

Т. к. Окр.(O;r) вписана в △ABC, то AB, AC,BC – касательные и по свойству касательных, проведённых из одной точки: AM = AK = 6 см, BE = BM = 4 см, CK = CE

Т. к. $\angle C = 90^0$, то CKOE – квадрат, поэтому CK = CE = r.

AC= 6+ r, BC = 4 + r

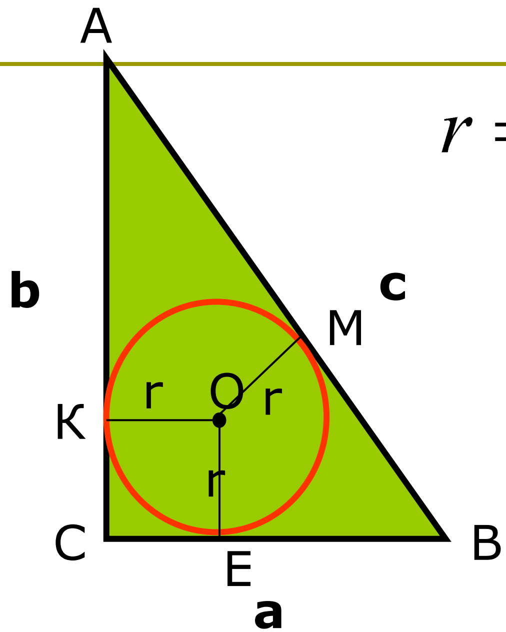
По теореме Пифагора: $AC^2 + BC^2 = AB^2$

$(6 + r)^2 + (4 + r)^2 = 10^2$

Решив квадратное уравнение, получим r = 2 см

Ответ: 2 см

# Нужная формула для радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник




$$r = \frac{a+b-c}{2}; a, b$$ - **катеты, c - гипотенуза**

Доказательство:

Т. к. Окр.(O;r) вписана в треугольник ABC, у которого угол C – прямой, то

AC, BC, AB – касательные и

CKOE – квадрат, значит, CK = CE = r

По свойству касательных: BE = BM = a - r

AK = AM = b - r

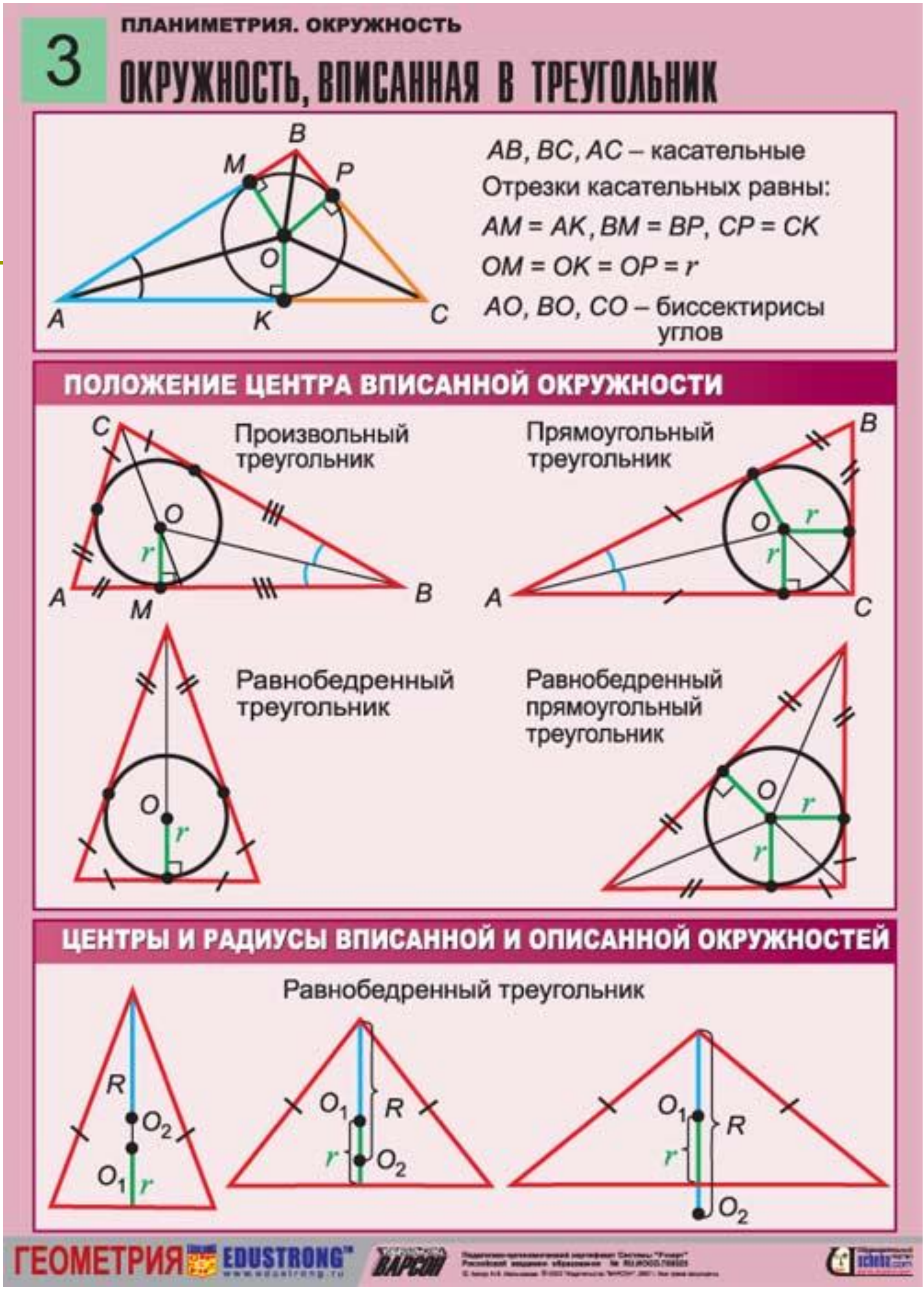
AB = AM + BM

c = b – r + a - r

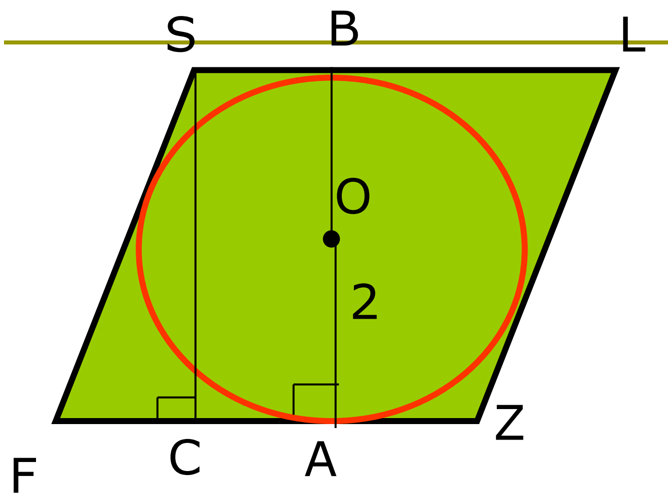
2r = a + b - c

r = ½ (a + b – c)

**Ваш заказ принят интернет-магазином My-shop.ru. Его номер: 3859767**



Задача: в ромб, острый угол которого $60^0$, вписана окружность, радиус которой равен 2 см. Найти периметр ромба.




Дано: Окр.(О; 2 см) вписана в ромб FSLZ, $\angle F = 60^0$.

Найти: $P_{FSLZ}$

Решение:

Т. к. окружность вписана в ромб, то стороны ромба касаются окружности, значит, $AB \perp FZ$, AB = 2r = 4см – диаметр.

Проведём $SC \perp FZ$, SC = AB (как перпендикуляры между параллельными прямыми), SC = 4см

$\triangle$ FSC – прямоугольный, $SinF = \dfrac{SC}{FS}; Sin60^0 = \dfrac{4}{FS}; \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4}{FS}; FS = \dfrac{8}{\sqrt{3}} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

$P_{FSLZ} = 4FS = 4 \cdot \dfrac{8\sqrt{3}}{3} = \dfrac{32\sqrt{3}}{3}$ (см).

Ответ: $\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$ см