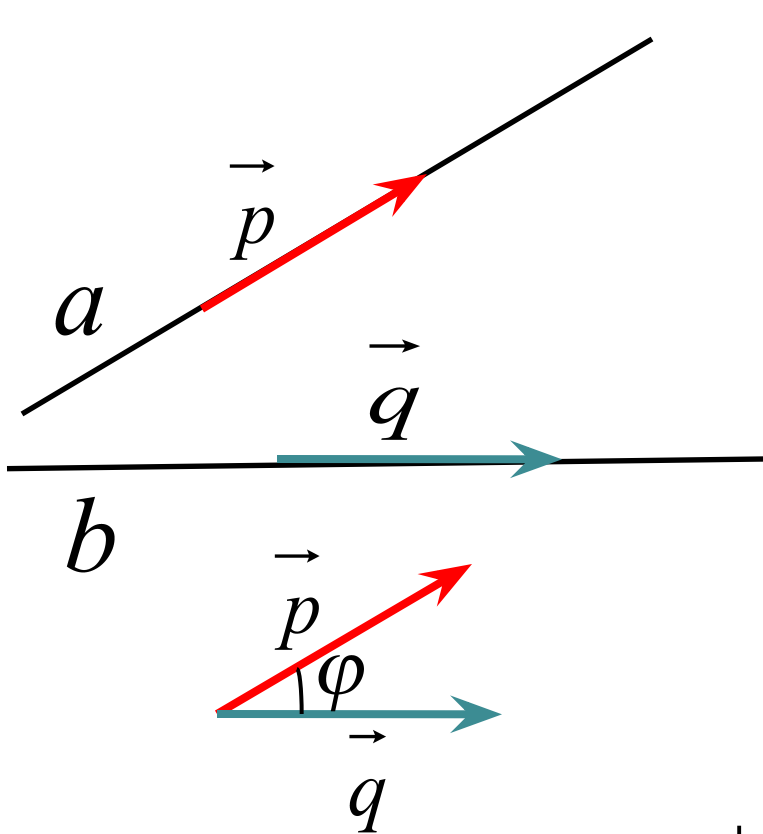


Стереометрия

Метод координат в
задачах С2

Угол между прямыми



\vec{p} - направляющий вектор прямой a

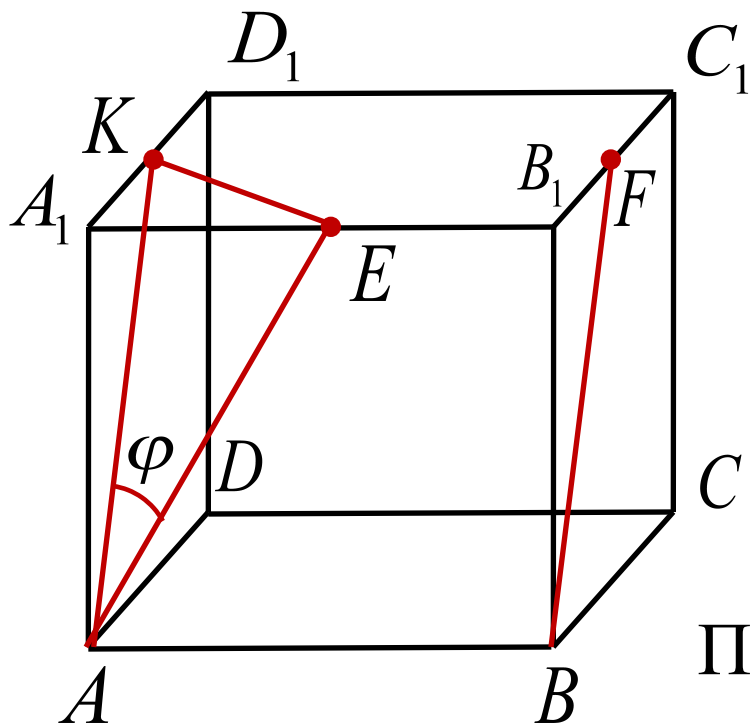
\vec{q} - направляющий вектор прямой b

φ - угол между прямыми

$$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Задача 1 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AE и BF , где E – середина ребра A_1B_1 , а F – середина ребра B_1C_1



Решение (1 способ)

K - середина A_1D_1

$AK \parallel BF$ $\angle KAE = \varphi$

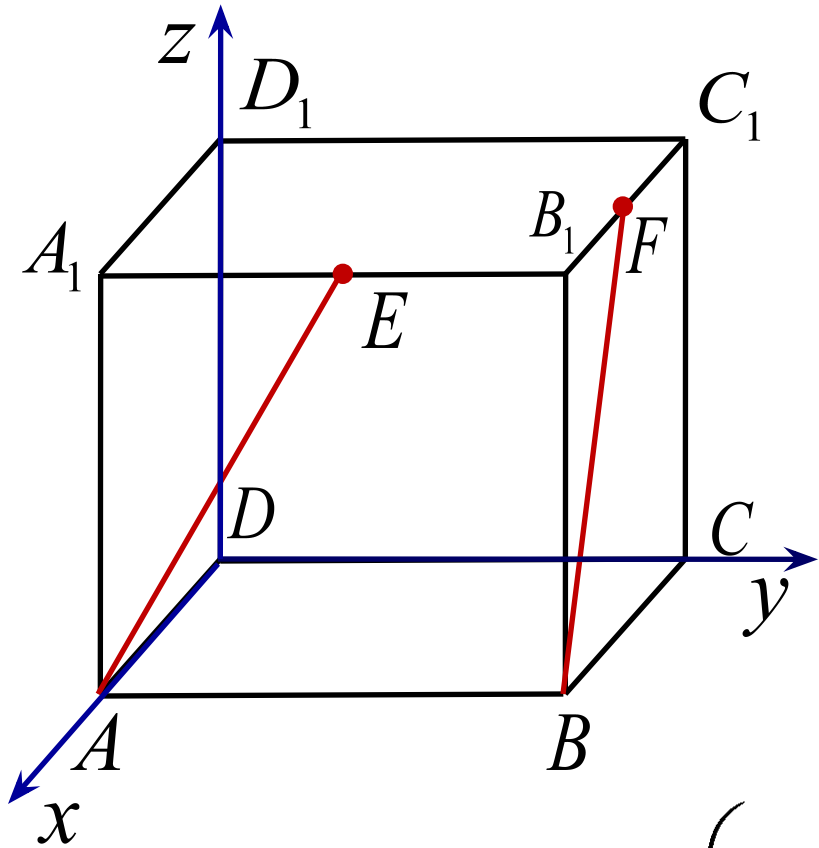
$$AE = AK = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad KE = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

По теореме косинусов для $\triangle AKE$

$$KE^2 = AE^2 + AK^2 - 2 \cdot AE \cdot AK \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = 0,8 \quad \varphi = \arccos 0,8$$

Решение (2 способ)



$$A(1;0;0) \quad E\left(1;\frac{1}{2};1\right)$$

$$B(1;1;0) \quad F\left(\frac{1}{2};1;1\right)$$

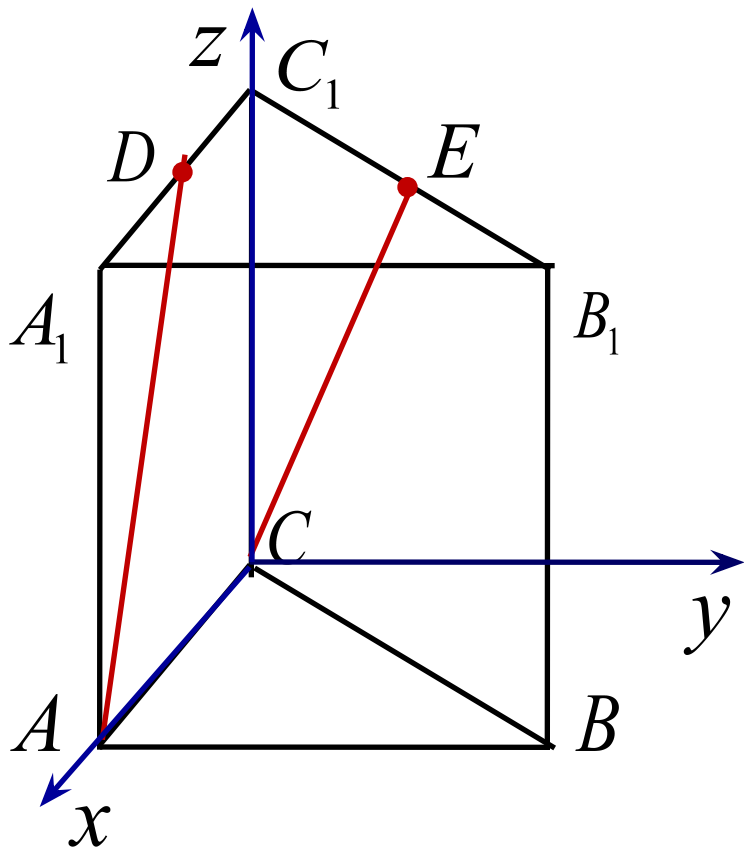
$$\overrightarrow{AE} \left\{ 0; \frac{1}{2}; 1 \right\}$$

$$\overrightarrow{BF} \left\{ -\frac{1}{2}; 0; 1 \right\}$$

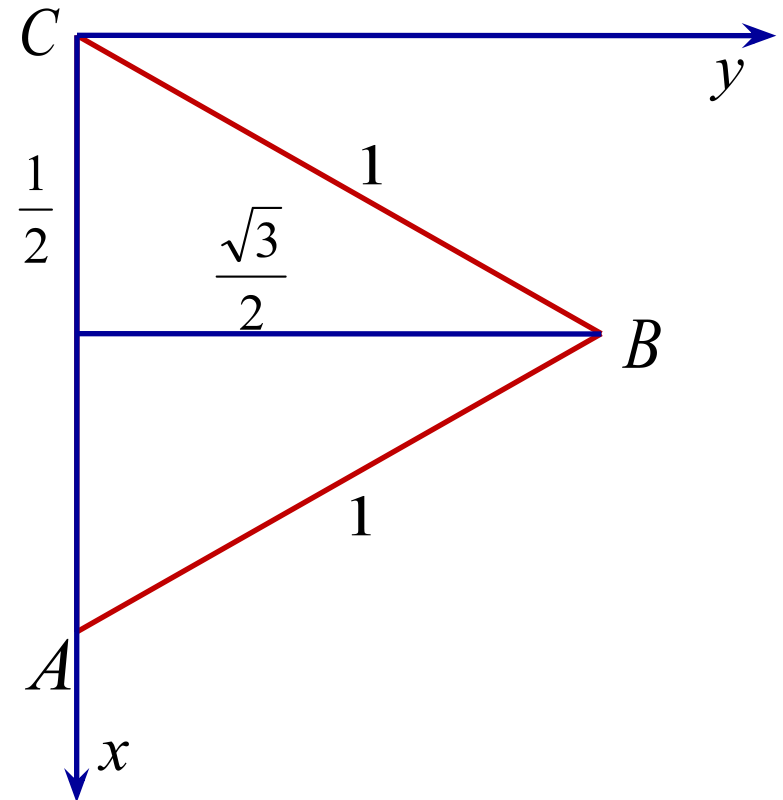
$$\left| 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 1 \right|$$

$$\cos \varphi = \frac{\left| 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 1 \right|}{\sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2}} = 0,8$$

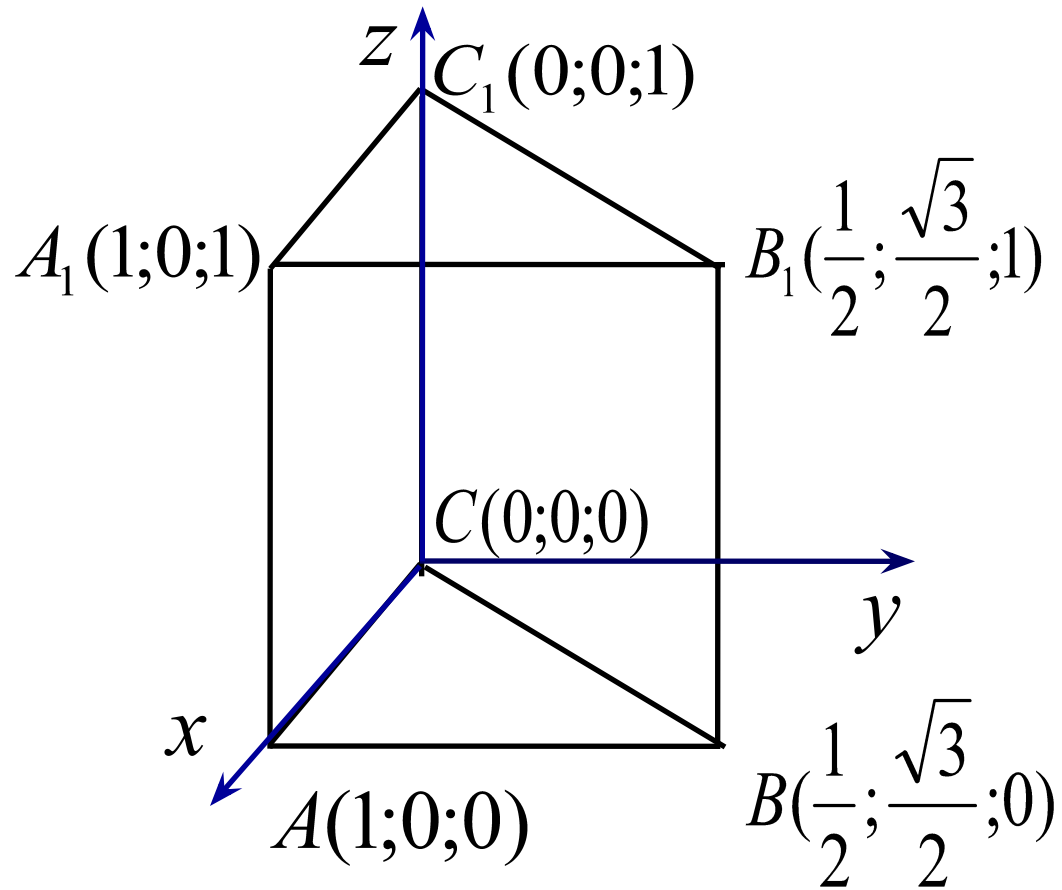
Задача 2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AD и CE , где D и E - соответственно середины ребер A_1C_1 и B_1C_1



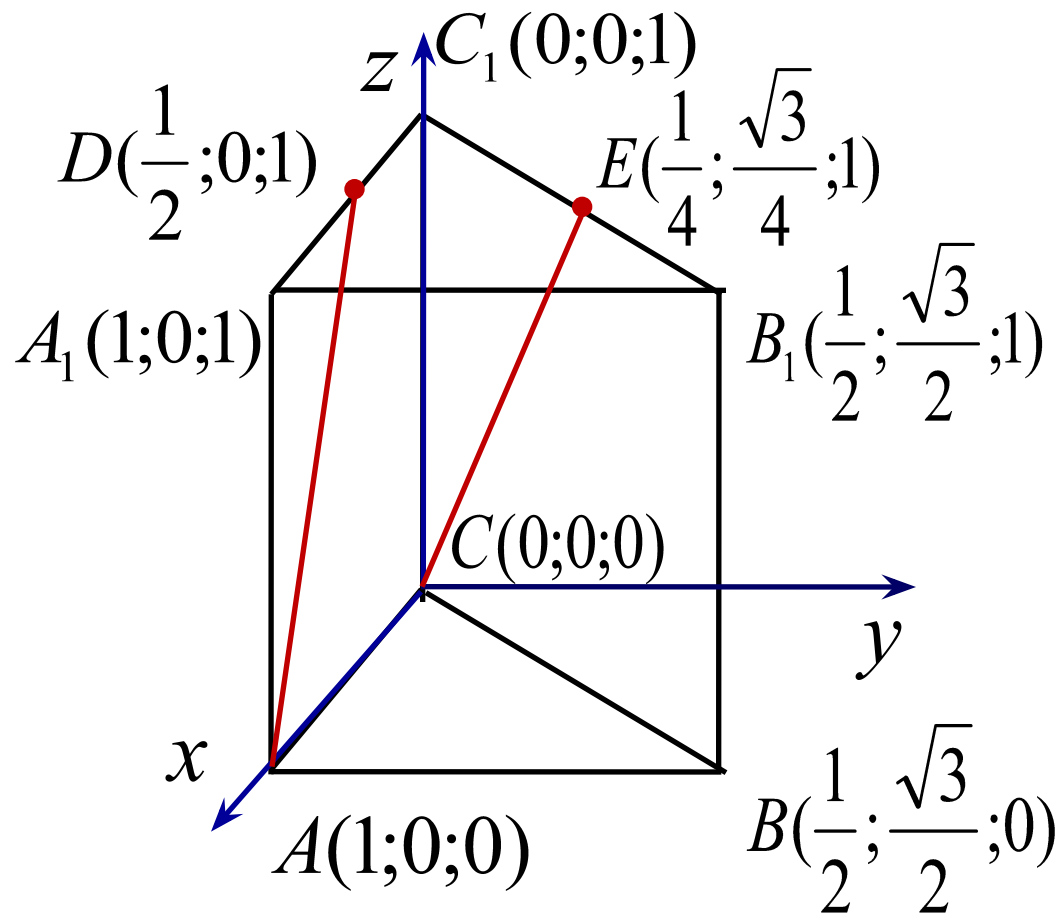
Решение.



Координаты правильной треугольной призмы



Решение.



$$\overrightarrow{AD} \left\{ -\frac{1}{2}; 0; 1 \right\}$$

$$\overrightarrow{CE} \left\{ \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 1 \right\}$$

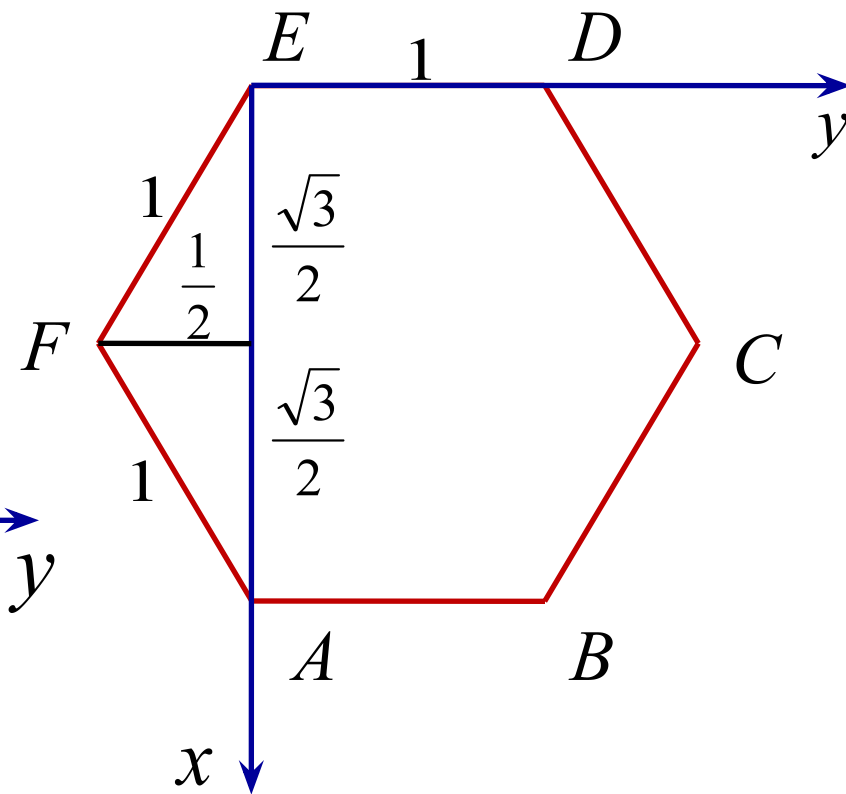
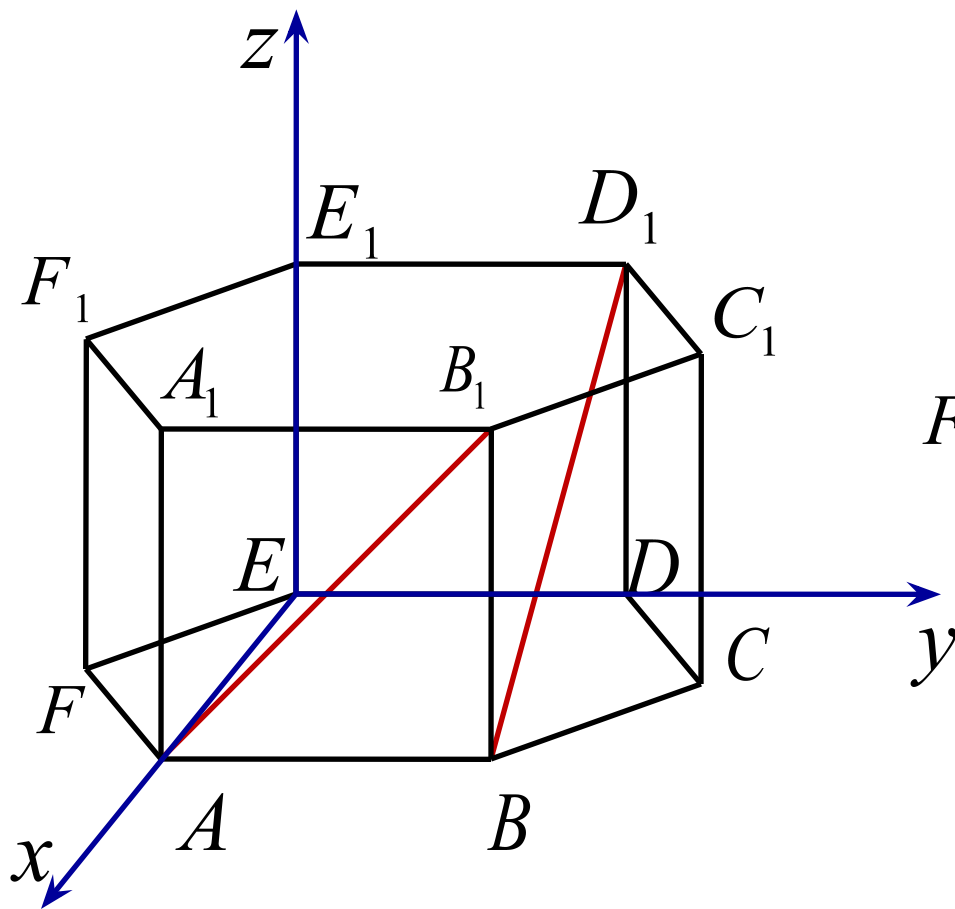
$$\overrightarrow{AD} \left\{ -\frac{1}{2}; 0; 1 \right\} \quad \overrightarrow{CE} \left\{ \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 1 \right\}$$

$$\cos \varphi = \frac{\left| -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \cdot 1 \right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + 1^2}}$$

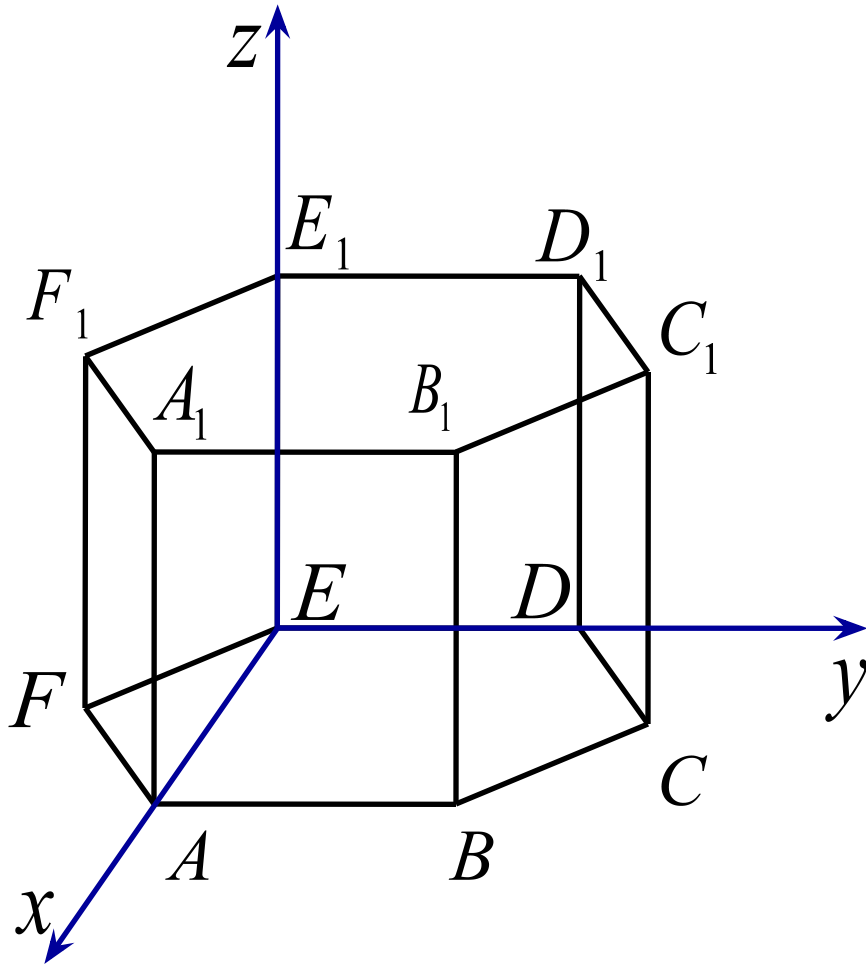
$$\cos \varphi = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = 0,7$$

Задача 3 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1

Решение.

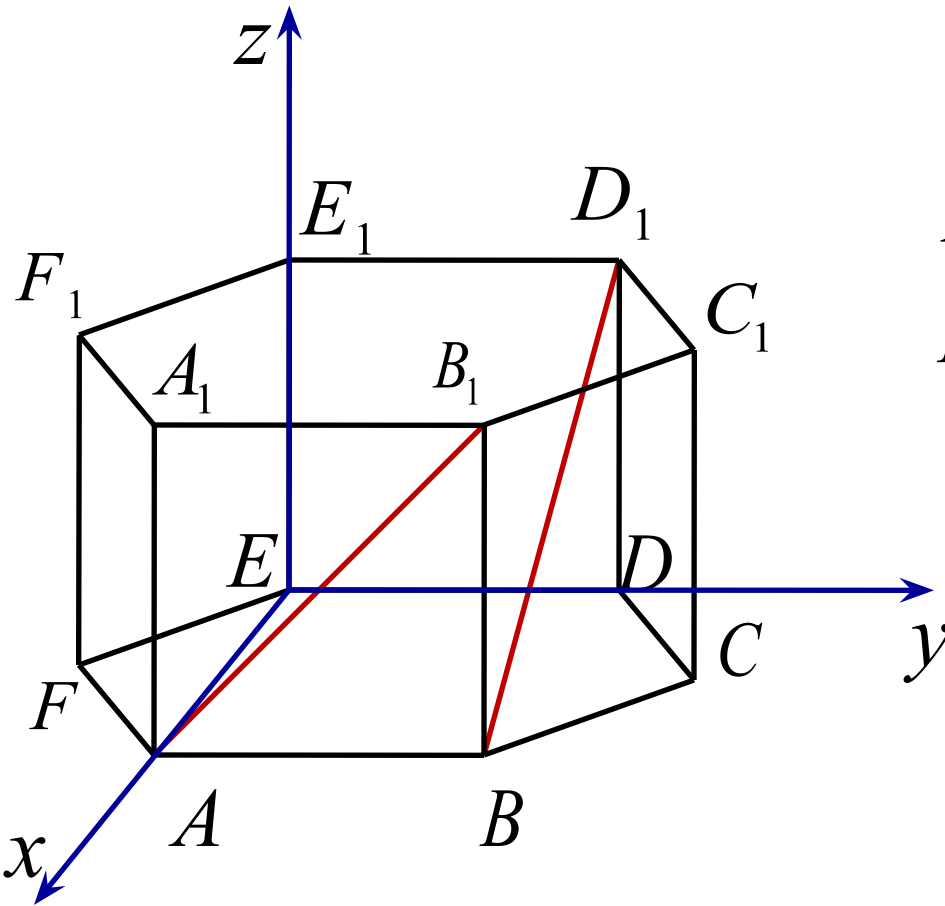


Координаты правильной шестиугольной призмы



$E_1(0;0;1)$	$D_1(0;1;1)$
$F_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1\right)$	$C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};1\right)$
$A_1(\sqrt{3};0;1)$	$B_1(\sqrt{3};1;1)$
$E(0;0;0)$	$D(0;1;0)$
$F\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$	$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};0\right)$
$A(\sqrt{3};0;0)$	$B(\sqrt{3};1;0)$

Решение.



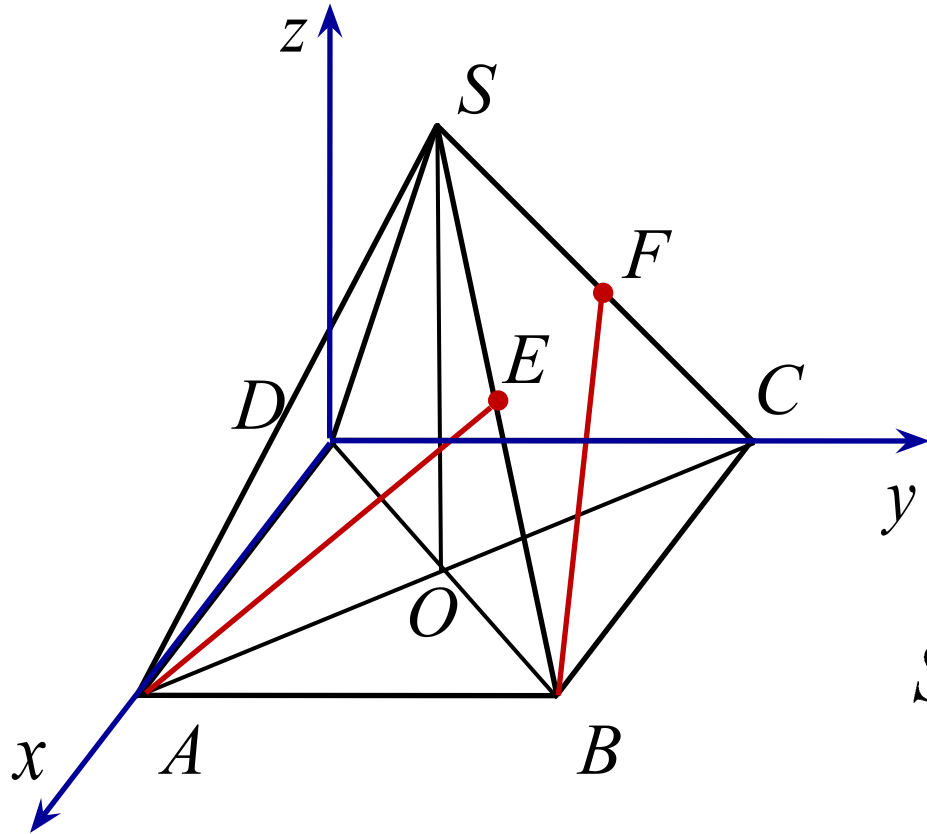
$$\begin{array}{ll} A(\sqrt{3};0;0) & B_1(\sqrt{3};1;1) \\ B(\sqrt{3};1;0) & D_1(0;1;1) \end{array}$$

$$\overrightarrow{AB_1} \{0;1;1\}$$

$$\overrightarrow{BD_1} \{-\sqrt{3};0;1\}$$

$$\cos \varphi = \frac{|0 \cdot (-\sqrt{3}) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Задача 4 В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1 , отмечены точки E и F – середины сторон SB и SC соответственно. Найдите угол между прямыми AE и BF .



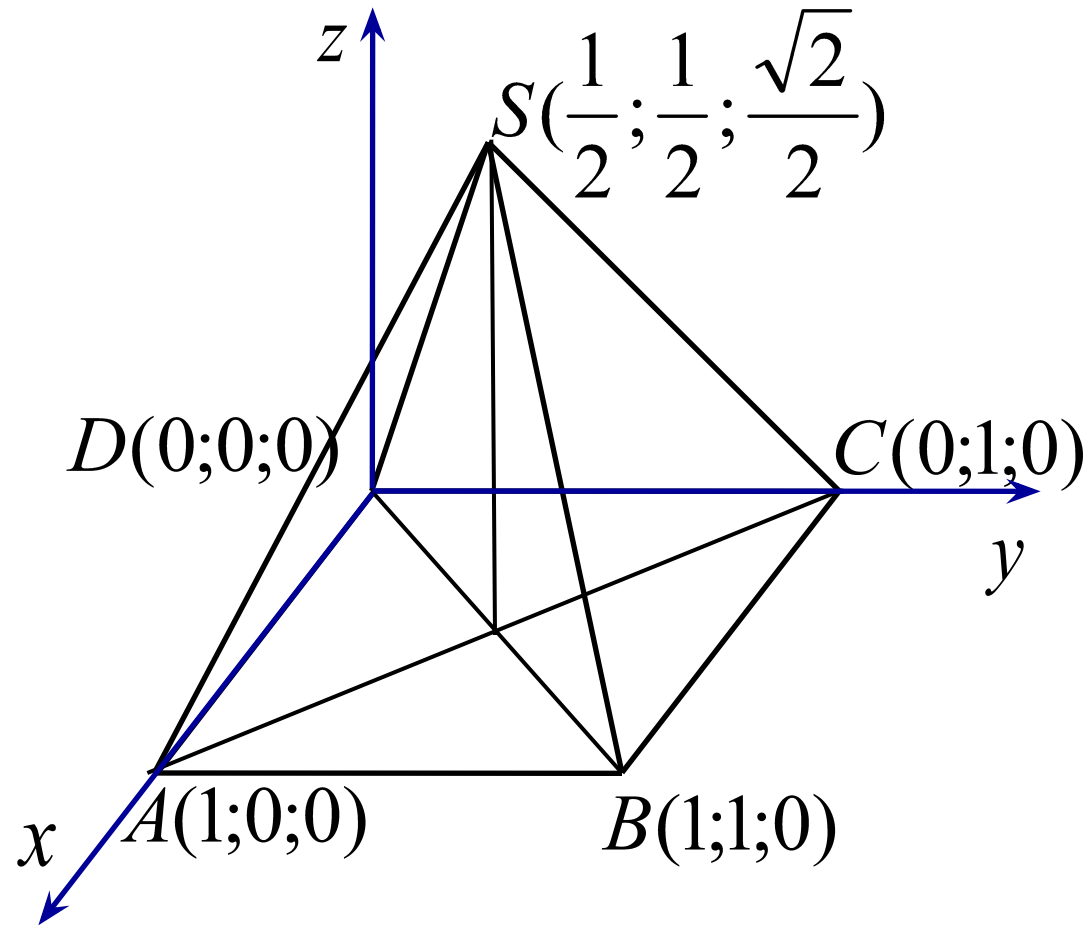
Решение.

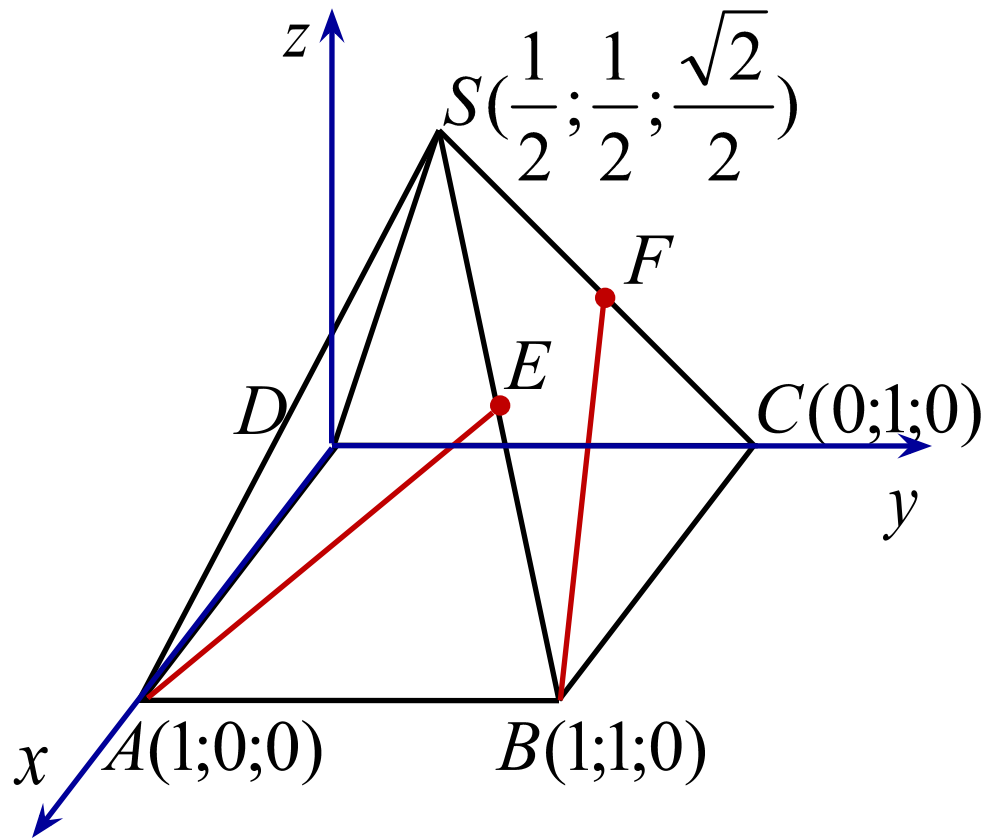
$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$SO = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Координаты правильной четырехугольной пирамиды





Решение.

E - середина SB

$$E(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4})$$

F - середина SC

$$F(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4})$$

$$\overrightarrow{AE} \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$$

$$\overrightarrow{BF} \left\{ -\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$$

$$\overrightarrow{AE} \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\} \quad \overrightarrow{BF} \left\{ -\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$$

$$\cos \varphi = \frac{\left| -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{6}$$

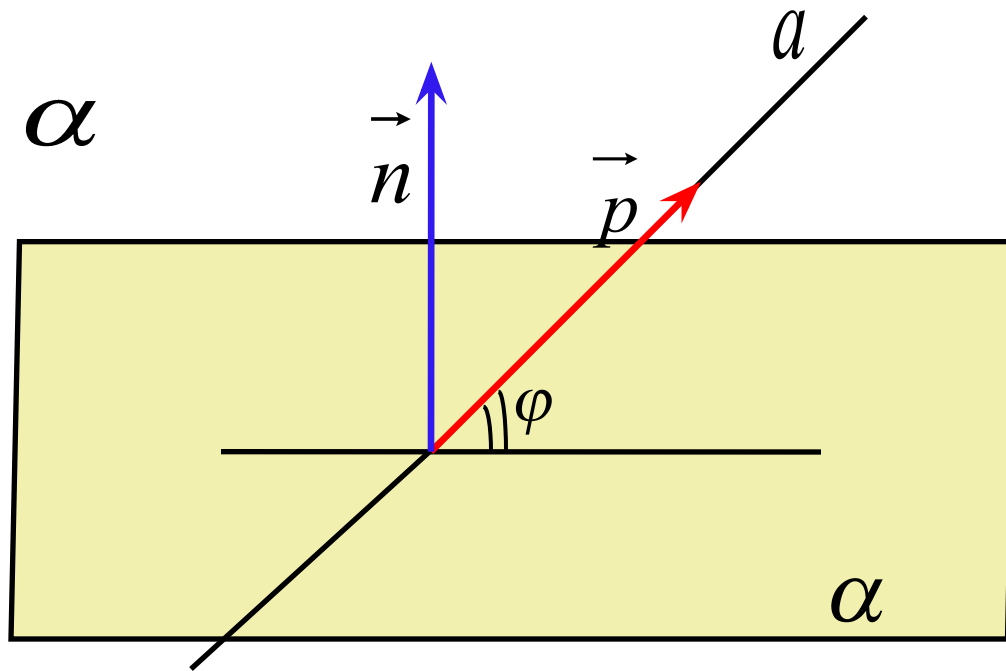
$$\varphi = \arccos \frac{1}{6}$$

Угол между прямой и плоскостью

$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ - направляющий вектор прямой

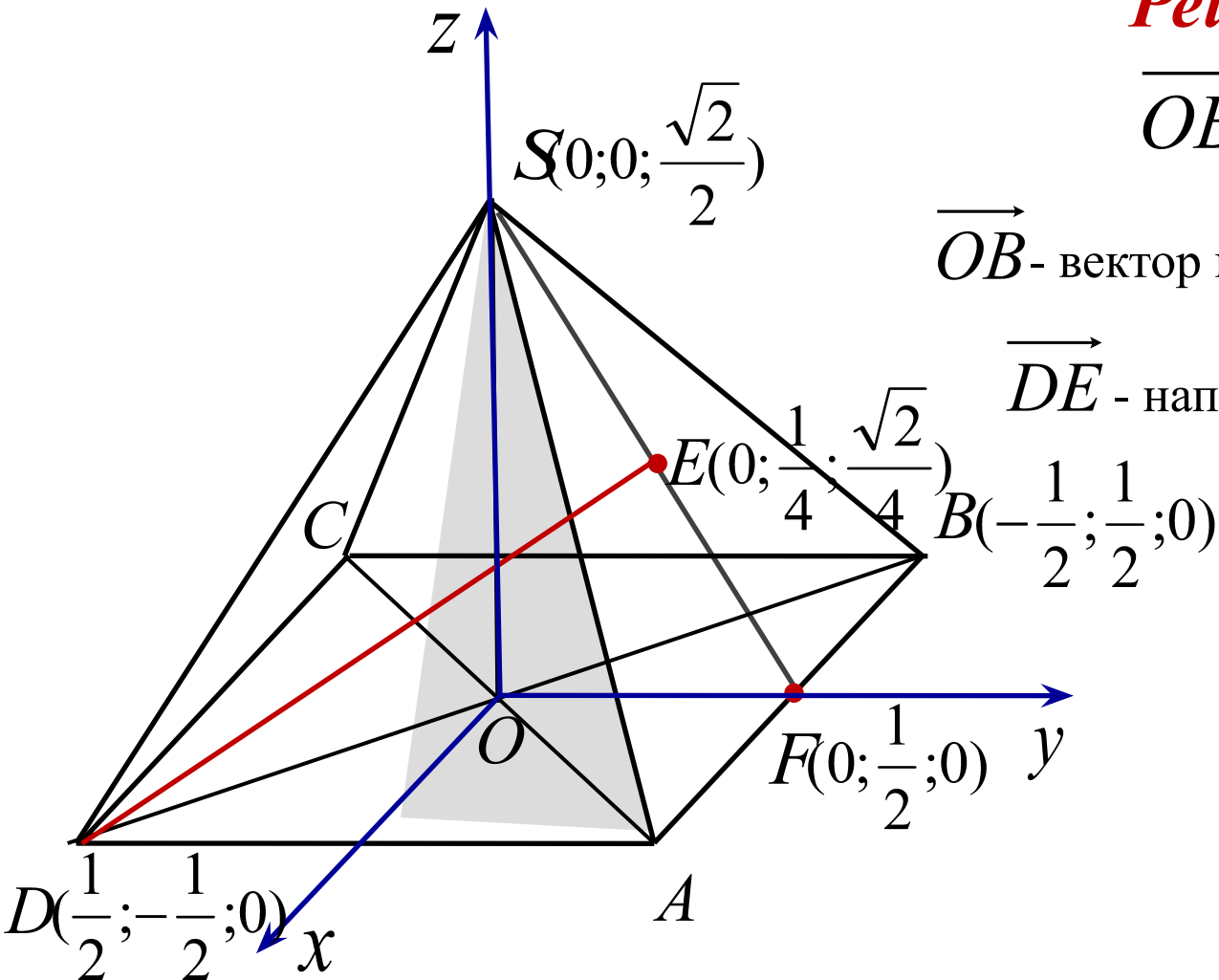
$\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$ - нормальный вектор плоскости

$$\vec{n} \perp \alpha$$



$$\sin \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Задача 5 В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1 , найдите угол между прямой DE , где E - середина апофемы SF грани ASB и плоскостью ASC



Решение.

$$\vec{OB} \perp ASC$$

\vec{OB} - вектор нормали плоскости ASC

\vec{DE} - направляющий вектор прямой

$$\vec{OB} \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0 \right\}$$

$$\vec{DE} \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$$

$\overrightarrow{OB} \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0 \right\}$ - вектор нормали плоскости ASC

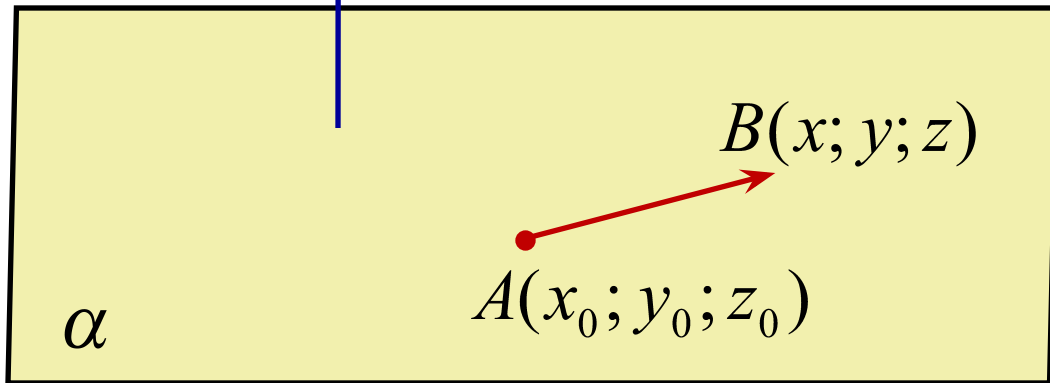
$\overrightarrow{DE} \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$ - направляющий вектор прямой DE

$$\sin \varphi = \frac{\left| \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{3}{4} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{5}{\sqrt{30}} \quad \varphi = \arcsin \frac{5}{\sqrt{30}}$$

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

$\vec{n}\{a; b; c\}$ вектору



$$A(x_0; y_0; z_0) \in \alpha$$

$$\vec{n} \perp \alpha$$

$\vec{n}\{a; b; c\}$ нормальный вектор плоскости

$$B(x; y; z) \in \alpha$$

$$\vec{AB}\{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

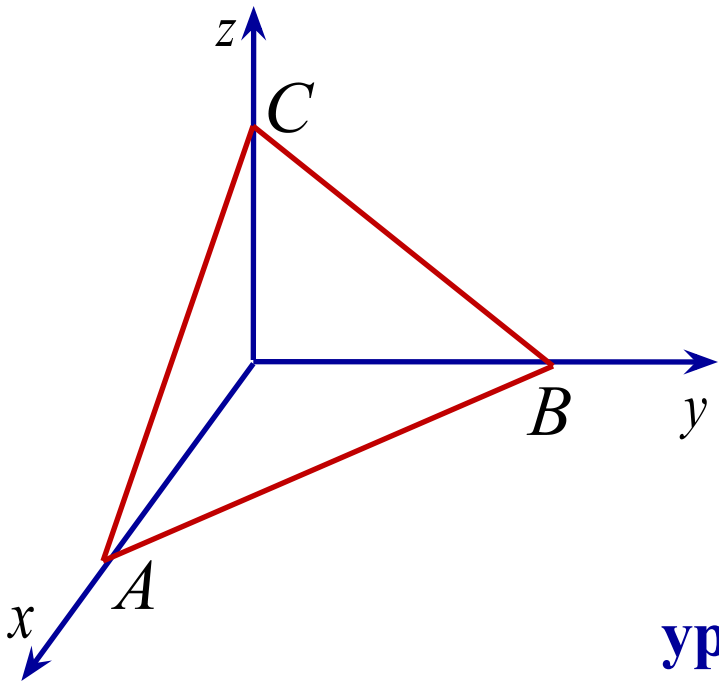
, где $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$

Уравнение плоскости

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0, \text{ где } d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$$

Если плоскость проходит через начало координат, то $d=0$



Если плоскость пересекает оси координат в точках A, B, C, то

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$

уравнение плоскости в отрезках

Задача 6 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2;3;5)$, $B(4;-3;0)$, $C(0;6;-5)$ и найти координаты вектора нормали.

Решение.

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ -2a + 3b + 5c + d = 0 \\ 4a - 3b + d = 0 \\ 6b - 5c + d = 0 \end{cases}$$

$$d = 5c - 6b$$

$$\begin{cases} -2a - 3b + 10c = 0 \\ 4a - 9b + 5c = 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{5}{2}c, b = \frac{5}{3}c, d = -5c$$

$$\frac{5}{2}cx + \frac{5}{3}cy + cz - 5c = 0$$

$$15x + 10y + 6z - 30 = 0$$

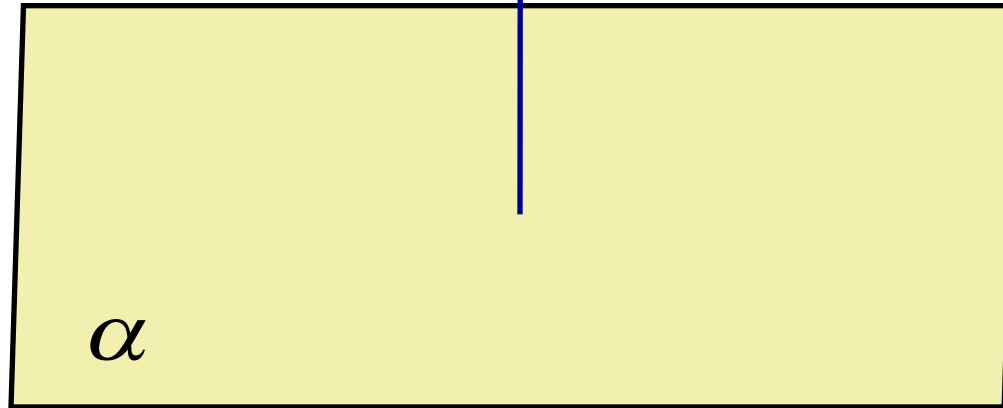
$$\vec{n} \{15; 10; 6\}$$

Расстояние от точки до плоскости

$M(x_0; y_0; z_0)$



$\vec{n}\{a; b; c\}$



$$\rho(M, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Расстояние между параллельными плоскостями

$$ax + by + cz + d_1 = 0$$

α

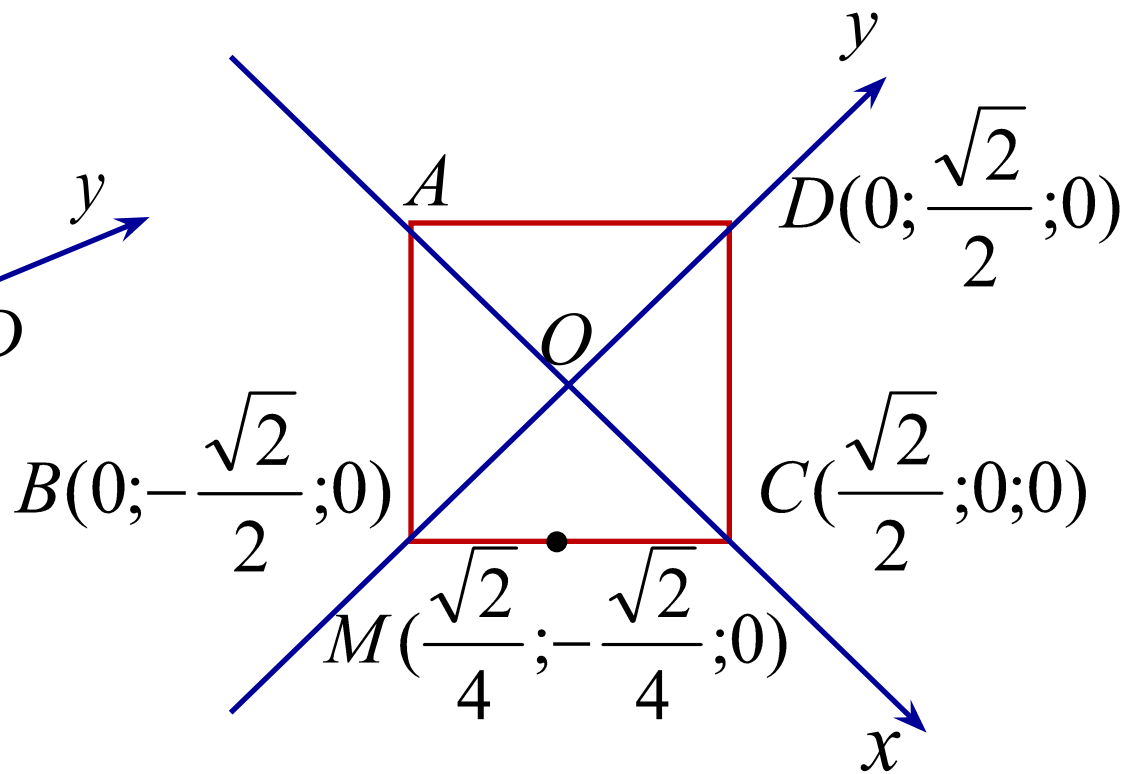
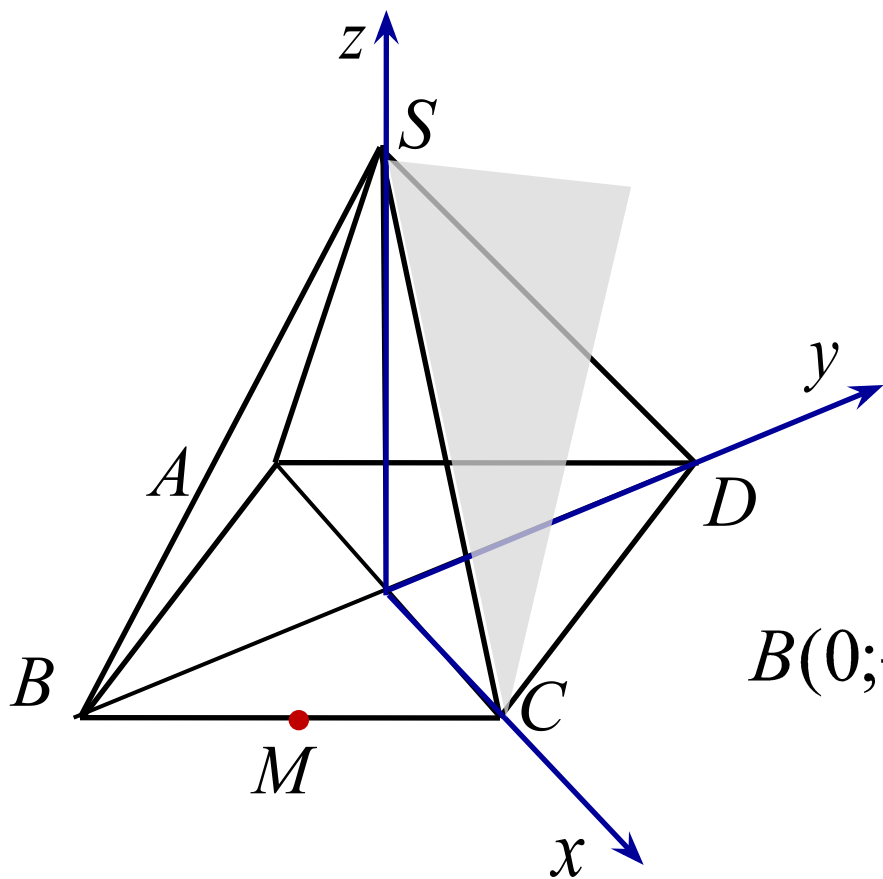
$$ax + by + cz + d_2 = 0$$

β

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Задача 7 В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1 , найдите расстояние от середины ребра BC до плоскости SCD

Решение.



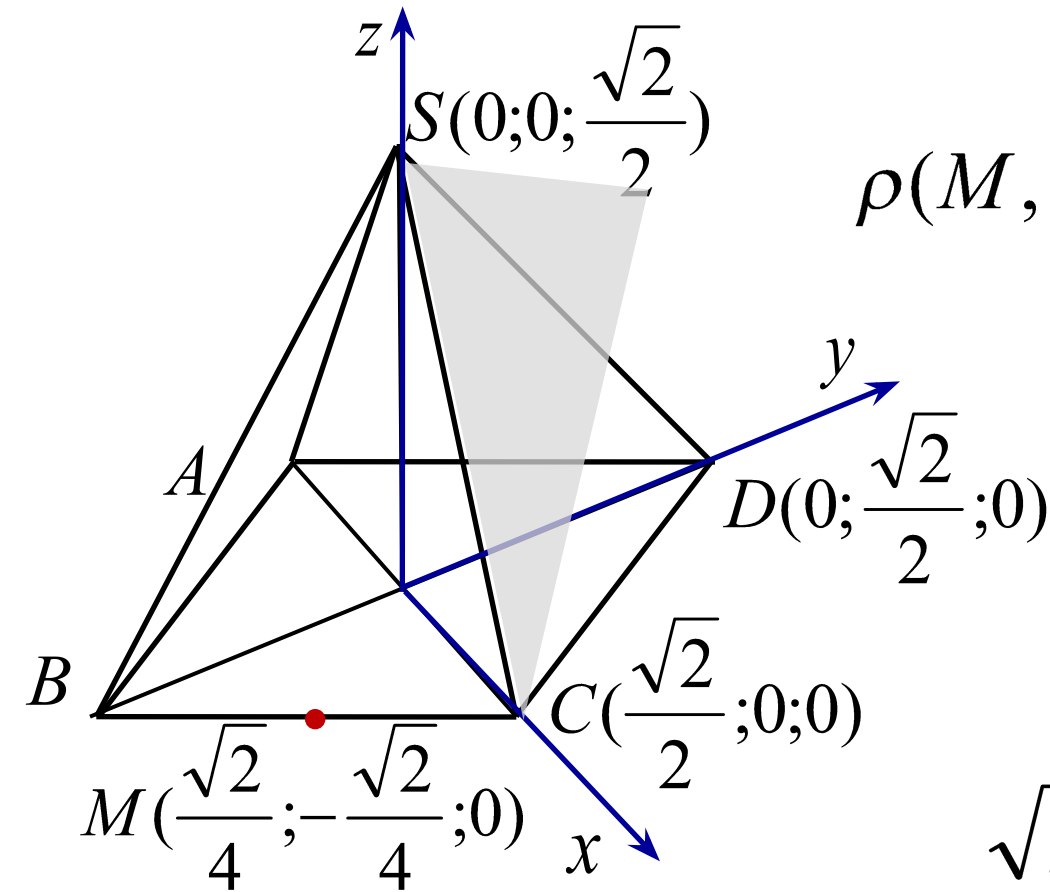
Решение.

$$\rho(M, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{z}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \sqrt{2}z - 1 = 0$$

$$\rho(M, SCD) = \frac{|\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \sqrt{2} \cdot 0 - 1|}{\sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$



Угол между плоскостями

$$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

Вектор нормали плоскости α : $\vec{n}_1 \{a_1; b_1; c_1\}$

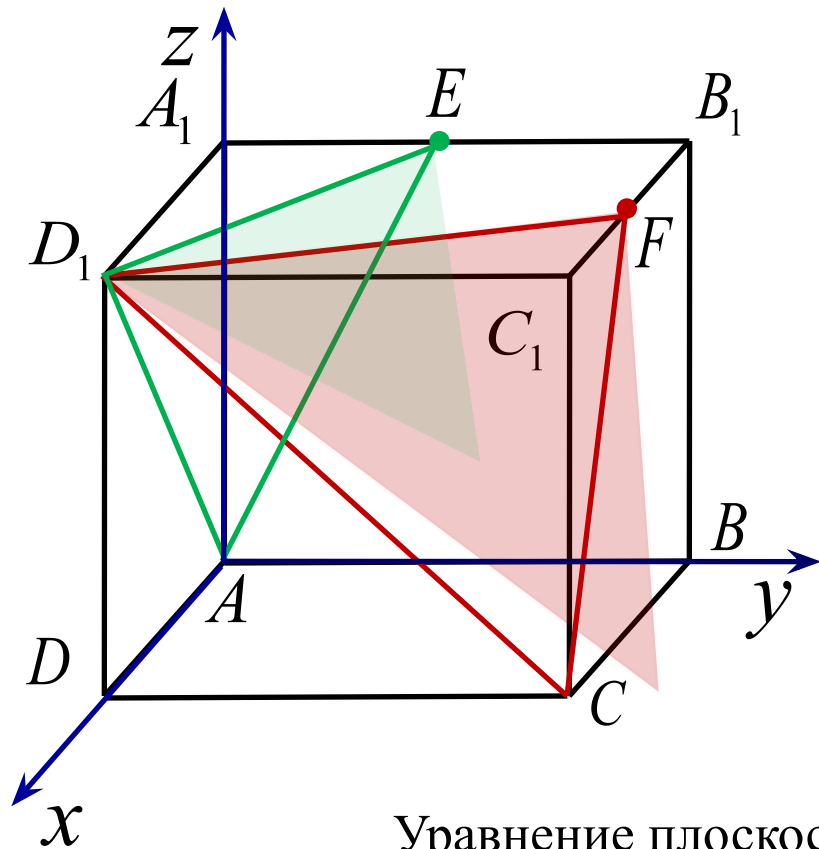
$$\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Вектор нормали плоскости β : $\vec{n}_2 \{a_2; b_2; c_2\}$

$$\cos \varphi = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Задача 8 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями AD_1E и D_1FC , где E – середина ребра A_1B_1 , а F – середина ребра B_1C_1

Решение.



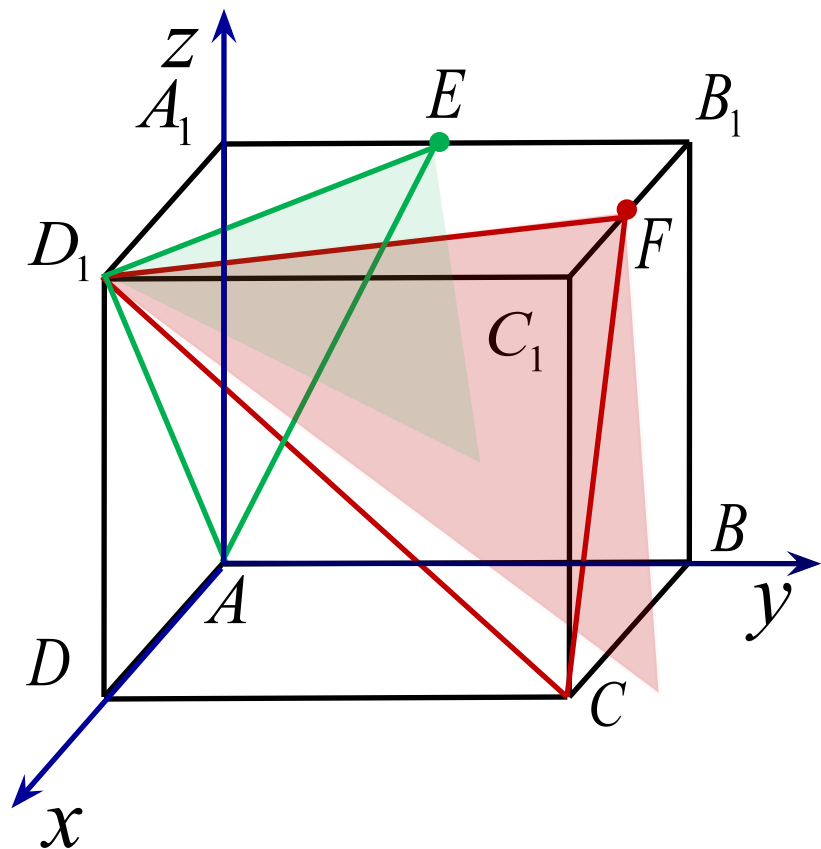
$$A(0;0;0) \quad D_1(1;0;1) \quad E\left(0;\frac{1}{2};1\right)$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} d = 0 & c = -a \\ a + c + d = 0 & b = 2a \\ \frac{1}{2}b + c + d = 0 & ax + 2ay - az = 0 \end{cases}$$

Уравнение плоскости AD_1E : $x + 2y - z = 0$

Вектор нормали плоскости AD_1E : $\vec{n}_1 \{1; 2; -1\}$



$$D_1(1;0;1) \quad F\left(\frac{1}{2};1;1\right) \quad C(1;1;0)$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} a + c + d = 0 \\ \frac{1}{2}a + b + c + d = 0 \\ a + b + d = 0 \end{cases}$$

$$a = 2c \quad b = c \quad d = -3c$$

$$2cx + cy + cz - 3c = 0$$

Уравнение плоскости D_1FC : $2x + y + z - 3 = 0$

Вектор нормали плоскости D_1FC : $\vec{n}_2 \{2;1;1\}$

$$\cos \varphi = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\vec{n}_1 \{1; 2; -1\} \quad \vec{n}_2 \{2; 1; 1\}$$

$$\cos \varphi = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$