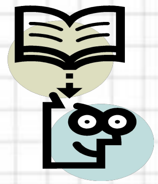
Метод площадей при решении геометрических задач

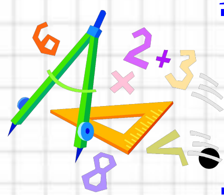
Выполнил: ученик 10 Б класса
МОУ «Лицей №15»
им. акад. Ю.Б. Харитона
Сулоев Илья
Руководитель: Теленгатор С.В.

Саров - 2011г.

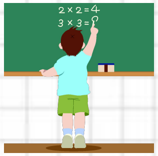
Содержание



- [Введение]



- [Свойства площадей]

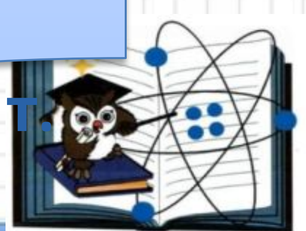


- [Задачи]
- [Литература]

Введение

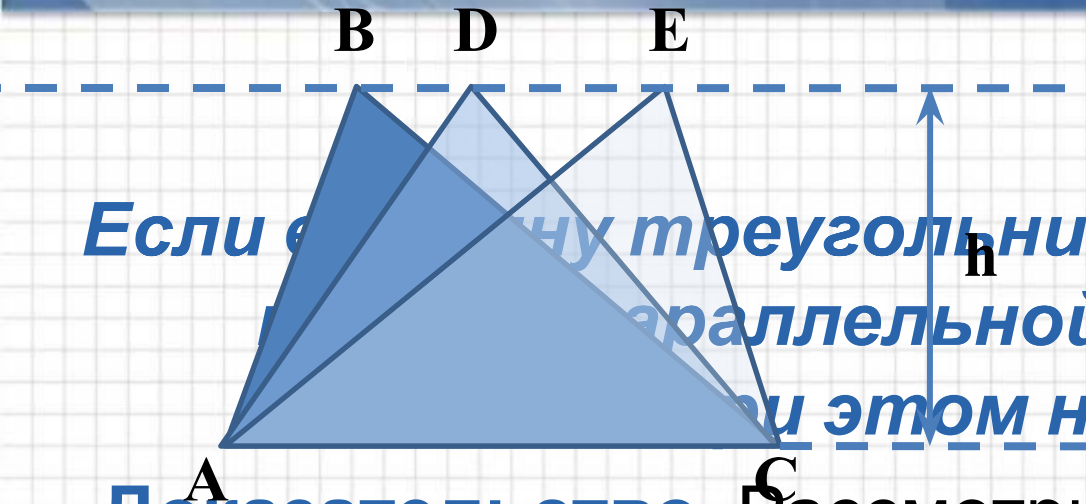
В элементарной математике, самыми трудными считаются геометрические задачи.

При решении геометрических задач, как правило, алгоритмов нет, и выбирать наиболее подходящую к данному случаю теорему не просто. Поэтому, желательно в каждой теме выработать какие-то общие положения, которые полезно знать всякому решающему геометрические задачи. Один из алгоритмов решения многих геометрических задач – метод площадей, т. е. решение задач с использованием свойств площадей.



Свойство

1



Если е… ну треугольника передвигать по … араллельной основанию, то … и этом не измениться.

Доказательство: Рассмотрим ΔABC и ΔADC. Они имеют общее основание и равные высоты, так как прямые AC и BD параллельные, то расстояние между ними равно h - высоте ΔABC и ΔADC. Если

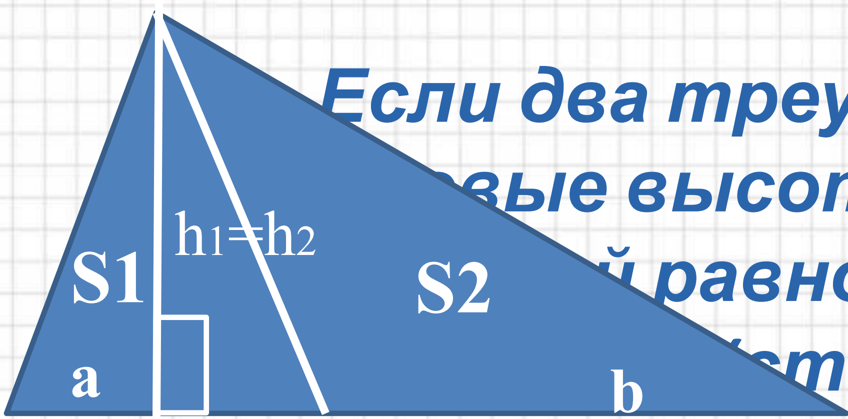
лощадь треугольника находится по формуле …5·a·h, то $S_{ABC}=0{,}5\cdot AC\cdot h$, $S_{ADC}=0{,}5\cdot AC\cdot h$, $S_{AEC}=0{,}5\cdot AC\cdot h$.

Значит,

$S_{ADC}=S_{ABC}=S_{AEC}$

Свойство

2



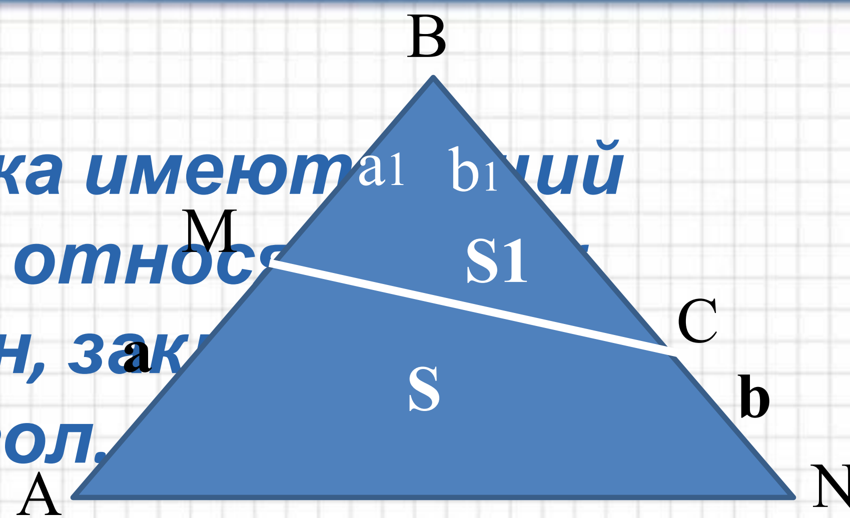
Если два треугольника имеют … вые высоты, то отношение их … й равно отношению длин … (сторон, на которые опущены эти высоты).

Доказательство: Пусть $h_1 = h_2$ в двух треугольниках с основаниями a и b. Рассмотрим отношение площадей этих треугольников $S_1:S_2=(0{,}5\cdot a\cdot h_1):(0{,}5\cdot b\cdot h_2)$. Упростив, получим $S_1:S_2=a:b$.

Свойство

3

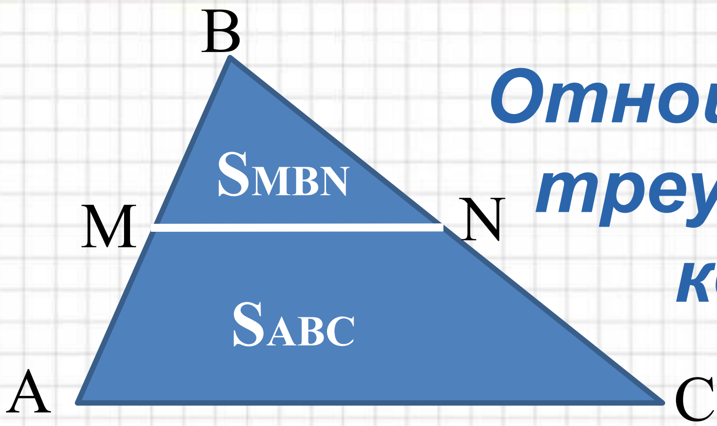
Если два треугольника имеют ий угол, то их площади относ произведение сторон, за этот угол.



Доказательство: Рассмотрим ΔABN и ΔMBC с общим углом B , где $AB = a$, $BN = b$, $MB = a_1$ и $BC = b_1$. Пусть $S_1 = S_{MBC}$ и $S = S_{ABN}$. Используя формулу площади треугольника вида $S=0,5ab\sin\gamma$, рассмотрим отношение площадей ΔABN и ΔMBC . Тогда $S_1:S=(0,5\cdot a_1\cdot b_1\cdot \sin\angle B):(0,5\cdot a\cdot b\cdot \sin\angle B)$. Упростив, получим $S_1:S=(a_1\cdot b_1):(a\cdot b)$.

Свойство

4

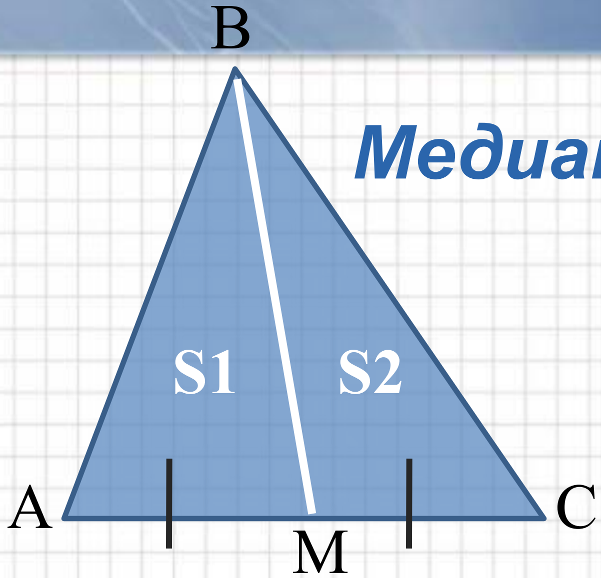


Отношение площадей подобных треугольников равны квадрату коэффициента подобия.

Доказательство: Рассмотрим ΔABC и ΔMBN. Пусть $AB = k \cdot MB$, $BC = k \cdot NB$ и $\angle ABC = \angle MBN$. Используя формулу площади треугольника вида $S=0{,}5 \cdot a \cdot b \cdot \sin \angle\gamma$, рассмотрим отношение площадей ΔABC и ΔMBN.

Тогда $S_{ABC} : S_{MBN} = (0{,}5 \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\angle B) : (0{,}5 \cdot MB \cdot NB \cdot \sin\angle B) = (k \cdot NB \cdot k \cdot MB) : (MB \cdot NB) = k^2$.

Свойство 5

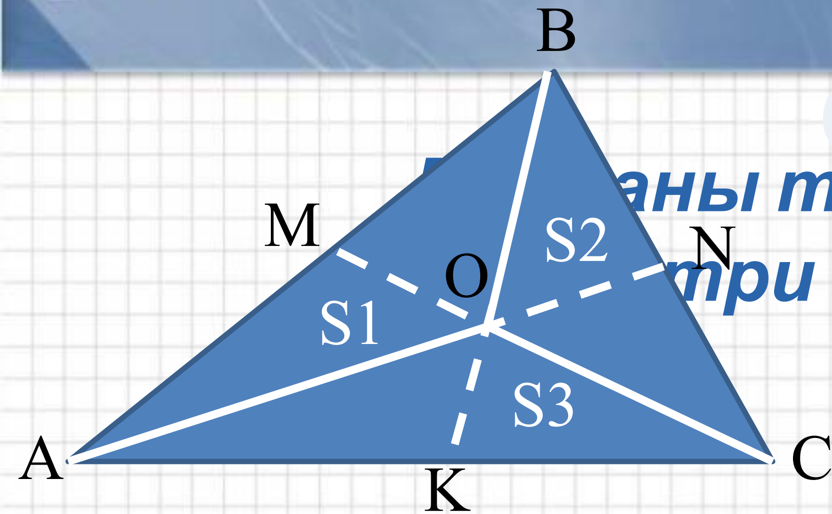


Медиана треугольника делит его на две равновеликие части.

Доказательство: Рассмотрим ΔABC , где BM – медиана , тогда $AM=MC=0{,}5\cdot AC$. Медиана делит треугольник на два равновеликих. Найдем площади треугольников ΔABM и ΔMBC по формуле $S=0{,}5\cdot \boldsymbol{a}\cdot h$. Получим, $S_{ABM}=0{,}5\cdot AM\cdot h$ и $S_{MBC}=0{,}5\cdot MC\cdot h$. Значит, $S_{ABM}=S_{MBC}$.

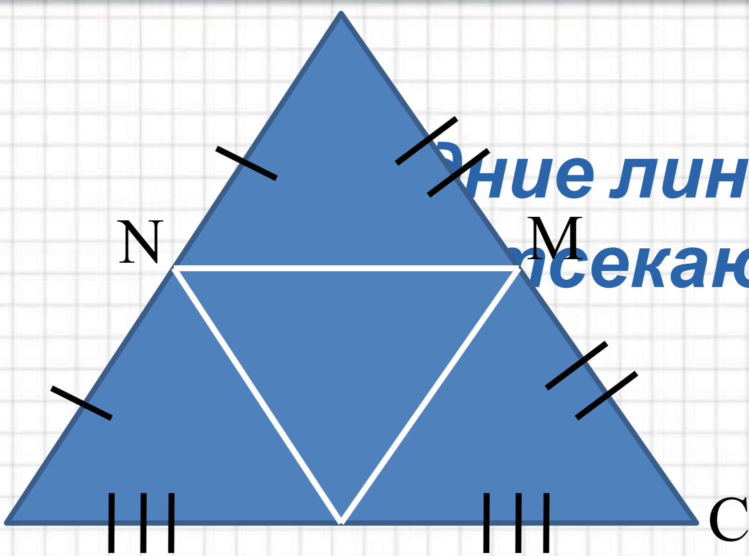
Свойство 6

…аны треугольника делят его на три равновеликие части.



Доказательство: Рассмотрим ΔABC. Проведем медианы из всех вершин, которые пересекаются в точке O. Получим треугольники ΔAOB, ΔBOC, ΔAOC. Пусть их площади равны соответственно S_1, S_2, S_3. А площадь ΔABC равна S. Рассмотрим ΔABK и ΔCBK, они равной площади, т.к. BK медиана. В треугольнике ΔAOC OK - медиана, значит, площади треугольников ΔAOK и ΔCOK равны. Отсюда следует, что $S_1 = S_2$. Аналогично можно доказать, что $S_2 = S_3$ и $S_3 = S_1$.

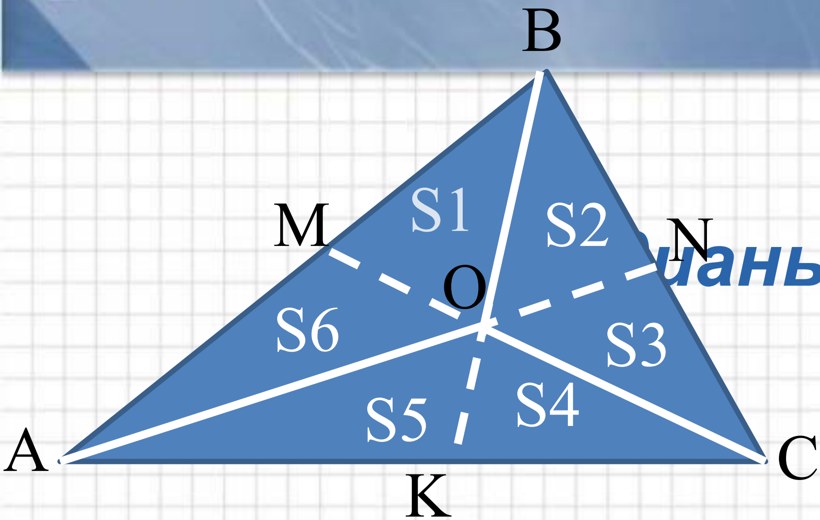
Свойство 7



…дние линии треугольника площади S …секают от него треугольники площади ¼·S .

Доказательство: Рассмотрим ΔABC. NM - средняя линия в треугольнике и она равна половине основания AC. Если $S_{ABC} = S$, то $S_{NBM}=0,5\cdot NM\cdot h_1=0,5\cdot (0,5\cdot AC)\cdot(0,5\cdot h)=0,25\cdot S$. Аналогично, можно доказать, что площади всех треугольников равны одной четвертой части площади ΔABC.

Свойств
о



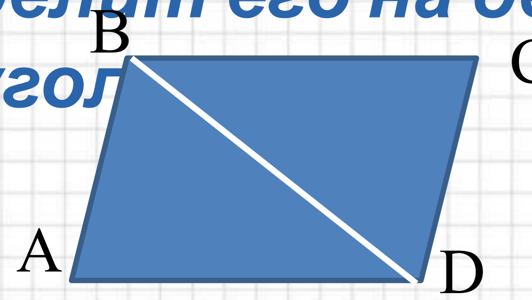
ианы треугольника делят его на равновеликих частей.

Доказательство: По свойству №7 площади ΔAOB, ΔBOC, ΔAOC равны. По свойству №5 площади ΔAOM, ΔBOM равны. Значит $S_1 = S_6$. Аналогично $S_2 = S_3$. Если $S_1 + S_6 = S_2 + S_3$ и $2S_1 = 2S_2$ значит $S_1 = S_2$. И так далее. Получим, что все шесть треугольников имеют равные площади и они составляют шестую часть от площади ΔABC.

Утверждение 1

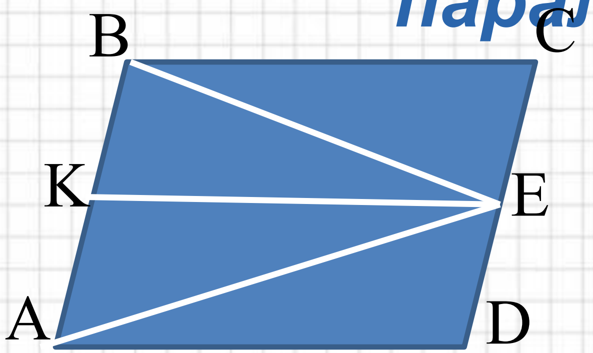
Два треугольника являются равновеликими, если равны их высоты и основания.

Задача 1. Докажите, что диагональ параллелограмма делит его на два равновеликих треугол



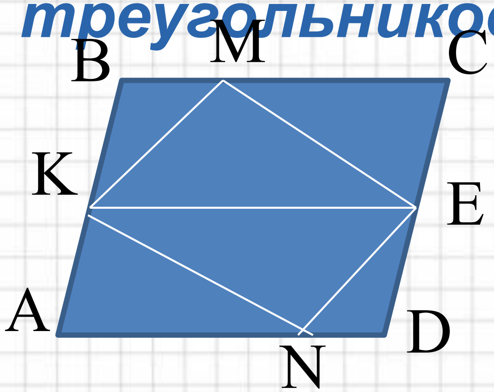
Решение. Высоты треугольников ABD и BCD равны. AD = BC (по свойству параллелограмма). Тогда в силу утверждения 1 $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta BCD}$

Задача 2. **На стороне CD параллелограмма ABCD взята произвольная точка E. Зная, что $S_{\Delta ABE} = S$, найдите площадь параллелограмма ABCD.**



Решение. Проведем дополнительное построение: KE||AD. Тогда из задачи 1 следует, что $S_{\Delta KBE} = S_{\Delta CBE}$, а $S_{\Delta AKE} = S_{\Delta ADE}$. Отсюда, $S_{ABCD} = 2S$.

Задача 3. **В параллелограмме ABCD на сторонах AB и CD взяты произвольные точки M и N. Докажите, что площадь четырехугольника KMEN равна площади четырех образовавшихся треугольников.**



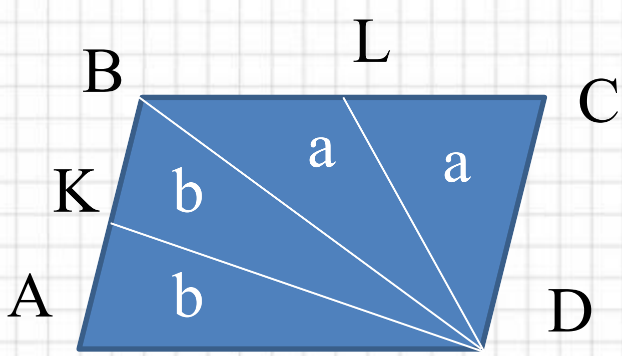
Решение. Проведем отрезок KE. Тогда в силу задачи 2 $S_{\Delta KME} = S_{\Delta KMB} + S_{\Delta MEC}$, а $S_{\Delta KNE} = S_{\Delta AKN} + S_{\Delta EDN}$.

Отсюда, $S_{\Delta KMEN} = S_{\Delta KMB} + S_{\Delta MEC} + S_{\Delta KNE} + S_{\Delta EDN}$.

Утверждение 2.

Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника.

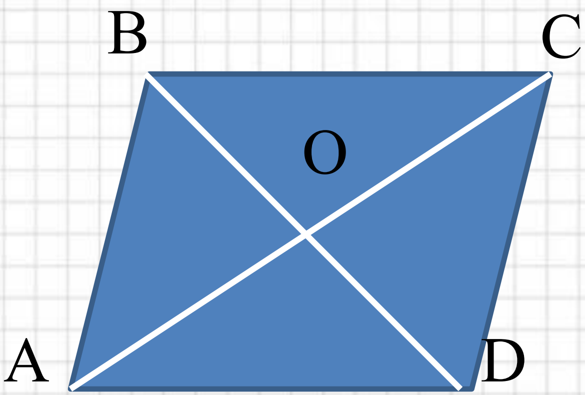
Задача 4. В параллелограмме ABCD точка К – середина AB, а L – середина BC. Зная, что $S_{KBLD} = S$, найдите S_{ABCD} .



Решение.

Проведем диагональ BD. Тогда, исходя из утверждения 2, получим, что $S_{ABCD} = S$.

Задача 5. *Докажите, что диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликих треугольника.*

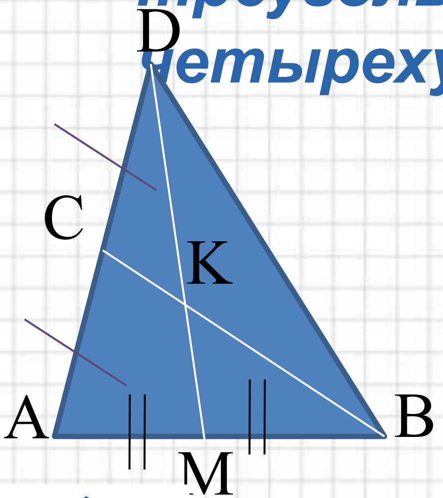


Решение.

В силу задачи 1 и утверждения 2 будем иметь

$S_{\Delta AOB} = S_{\Delta BOC} = S_{\Delta COD} = S_{\Delta DOA}$

Задача 6. **На продолжении стороны треугольника ABC взята точка D так, что AC = CD. Пусть M – середина стороны AB, а K – точка пересечения отрезков BC и MD. Докажите, что площадь треугольника BKD равна площади четырехугольника AMKC.**



Решение.

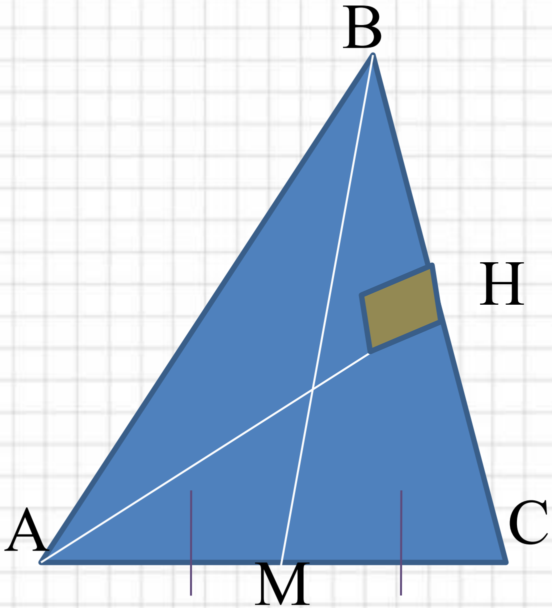
В треугольнике ABD DM и BC – медианы. Поэтому $S_{\Delta AMD} = S_{\Delta BMD}$ и $S_{\Delta ACB} = S_{\Delta CDB}$.

Эти равенства можно записать так: $S_{AMKC} + S_{\Delta CKD} = S_{\Delta CDK} + S_{\Delta BKD}$, $S_{AMKC} + S_{\Delta MBK} = S_{\Delta CKD} + S_{\Delta BKD}$

Сложив эти равенства и упростив выражение, получим $S_{AMCK} = S_{\Delta BKD}$.

Задача типа С4 на ЕГЭ

Медиана ВМ $\triangle ABC$ равна его высоте АН. Найдите угол МВС.



Решение. Пусть $\angle MBC = \alpha$. Найдем площадь треугольника ABC двумя способами. Так как медиана ВМ треугольника АВС разбивает его на два равновеликих треугольника, то $S_{ABC}=2S_{CBM}=2\cdot 0{,}5\cdot BC\cdot BM\cdot \sin\alpha=BC\cdot BM\cdot \sin\alpha$

С другой стороны, $S_{ABC}=0{,}5\cdot BC\cdot AH$.

Учитывая, что $AH=BM$, приравняем площади $BC\cdot BM\cdot \sin\alpha=0{,}5\cdot BC\cdot AH$. Получаем, что $\sin\alpha=0{,}5$. Отсюда $\alpha=30°$ или $\alpha=150°$.

Список литературы.

- http://uztest.ru/abstracts/?idabstract=440813
- http://artgrafica.net/2010/05/14/free-power-point-templates.html
- http://uztest.ru/abstracts/?idabstract=814114
- http://www.etudes.ru/