Многогранники: виды задач и методы их решения

(типовые задания С2) - 2

Методическая разработка Амачкиной А.А.
МОУ СОШ №12,
г. Балашиха, Московской области.

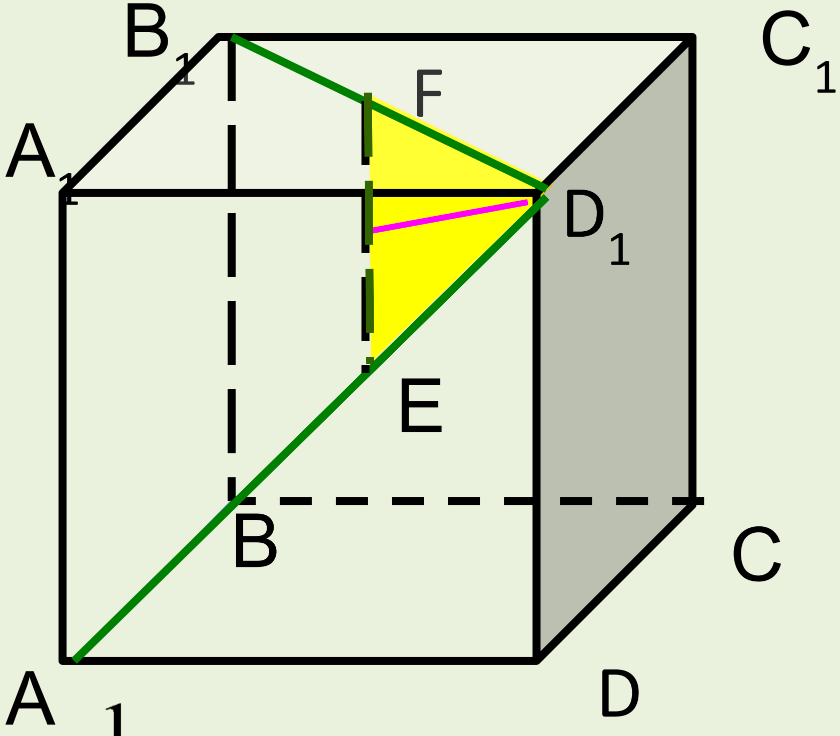
1.2. Расстояние от точки до прямой

- ***Расстояние от точки до прямой, не*** *содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую.*
- ***Расстояние между двумя параллель****ными прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.*
- ***Расстояние между двумя параллель****ными прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до другой прямой.*

Поэтапно-вычислительный метод

Расстояние от точки до прямой можно вычислить, как длину отрезка перпендикуляра, если удается включить этот отрезок в некоторый треугольник в качестве одной из высот.

Пример 4. При условиях примера 1
найти расстояние от точки D_1 до прямой EF.



Решение. *Пусть h – длина высоты треугольника, D_1EF опущенной из точки D_1 . Найдем h, используя метод площадей. Площадь треугольника D_1EF равна*

$$\frac{1}{2}D_1F * D_1E * \sin\angle FD_1E = \frac{1}{2} * \frac{2\sqrt{2}}{3} * \frac{\sqrt{2}}{3} * \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

С другой стороны площадь треугольника D_1 EF равна

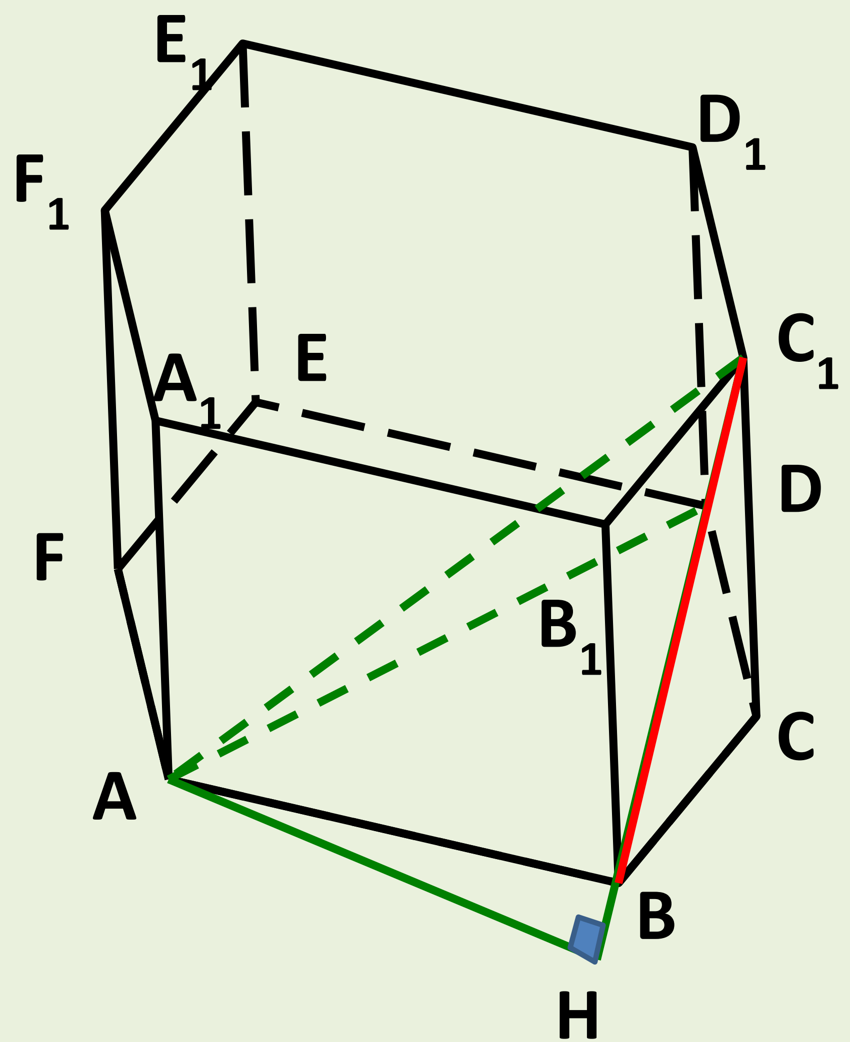
$$\frac{1}{2}FE * h = \frac{\sqrt{6}}{6}h. \quad \text{Из уравнения} \quad \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{6}}{6}h$$

$$\text{находим искомое расстояние} \quad h = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Замечание. *Можно заметить, что выполняется равенство $FE^2 + D_1E^2 = D_1F^2$, т.е. треугольник D_1EF прямоугольный и длина отрезка D_1E является искомым расстоянием.*

$$Ответ: \quad \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Пример 5. *В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, ребра которой равны l, найти расстояние от точки A до прямой BC_1.*



Решение.

В квадрате BCC_1B_1 диагональ BC_1 равна $\sqrt{2}$

В прямоугольном треугольнике ACD, где

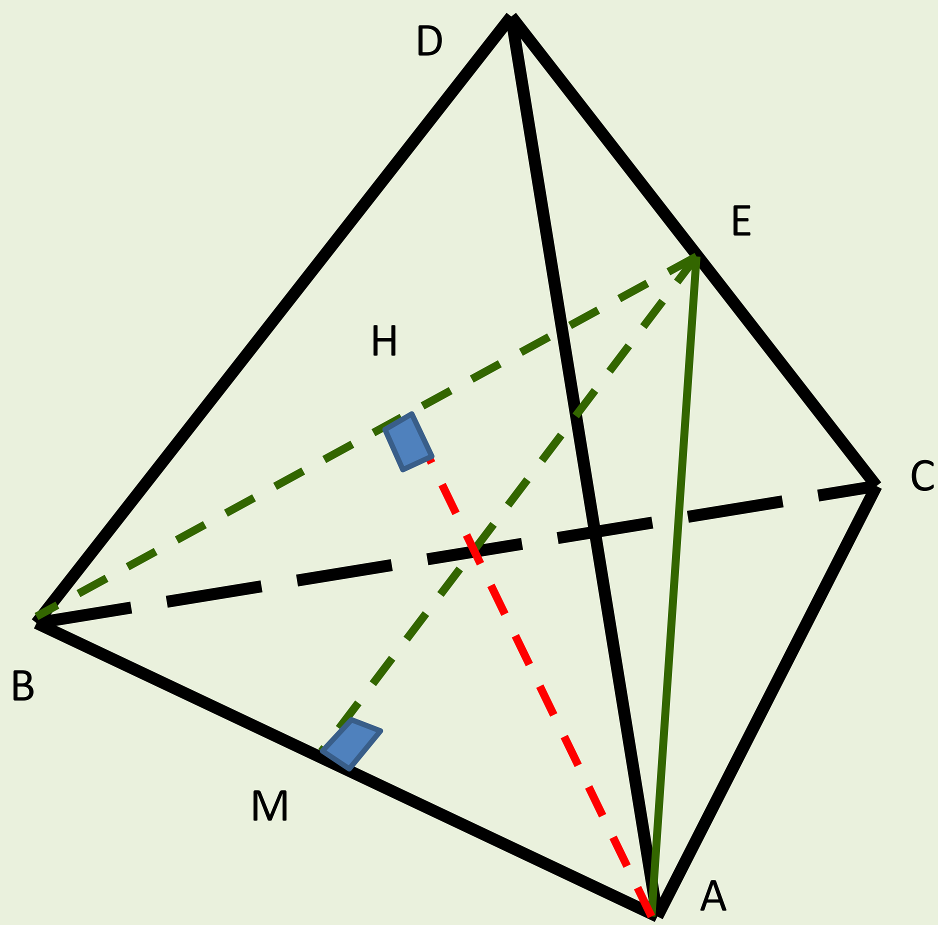
$$\angle ACD = 90^0, \qquad AD = 2,$$

находим $AC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$ Из прямоугольного теругольника ACC_1 имеем $AC_1 = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2.$ В треугольнике ABC_1, используя теорему косинусов, получаем $\cos\varphi = \dfrac{2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2}{2 * 2 * \sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{8}$ где $\angle AC_1B = \varphi.$ Далее находим $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{14}}{8}$ и из треугольника AC_1H высоту

$$AH = AC_1 \sin\varphi = 2 * \frac{\sqrt{14}}{8} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

Пример 6. **(МИОО, 2010).** *В тетраэдре ABCD, все ребра которого равны l, найти расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и середину E ребра CD .*



Решение.

Так как все ребра ABCD - равные правильные треугольники, то медианы BE и AE треугольников BDC и ADC равны и

$$BE = AE = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Рассмотрим равнобедренный треугольник BEA и его высоты EM и AH. Выражая площадь треугольника двумя способами, получаем

$S_{BEA} = \frac{1}{2} * AH * BE = \frac{1}{2} * EM * AB,$ *получаем равенство*

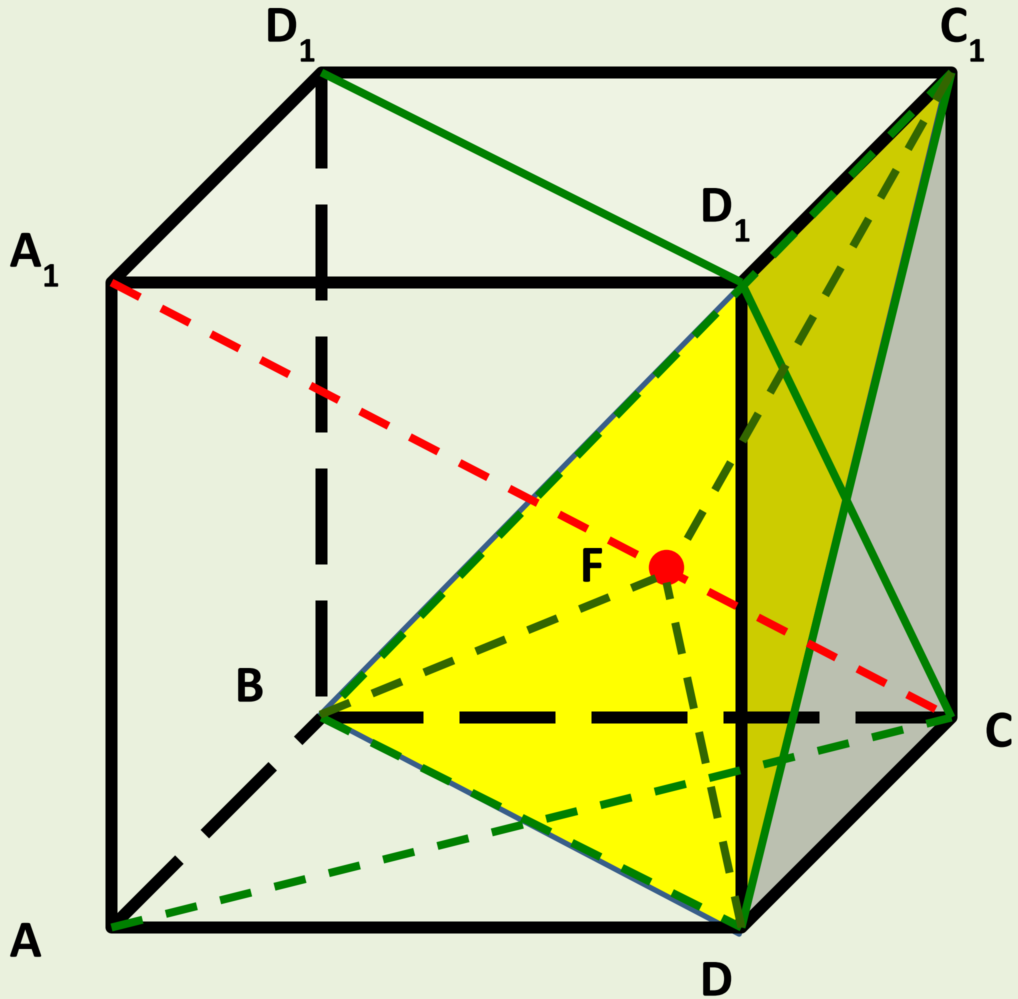
$AH * BE = EM * AB.$ *Так как* $EM = \sqrt{BE^2 - BM^2} =$

$= \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$ *то получаем*

$$AH = \frac{EM * AB}{BE} = \frac{\sqrt{2}}{2} * 1 * \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Пример 7. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от точки D до прямой A_1C.*



Пусть $A_1C \cap BDC_1 = F$. *Так как* $A_1C \perp BDC_1$ (*опорная задача* 20), *то* $FC_1 = FB = FD$

как проекции на плоскость BDC_1 *равных наклонных* CC_1 , CB *и* CD *соответственно. Следовательно, точка* F *является центром правильного треугольника* BDC_1 *Поэтому искомое расстояние равно радиусу окружности, описанной около треугольника* BDC_1.

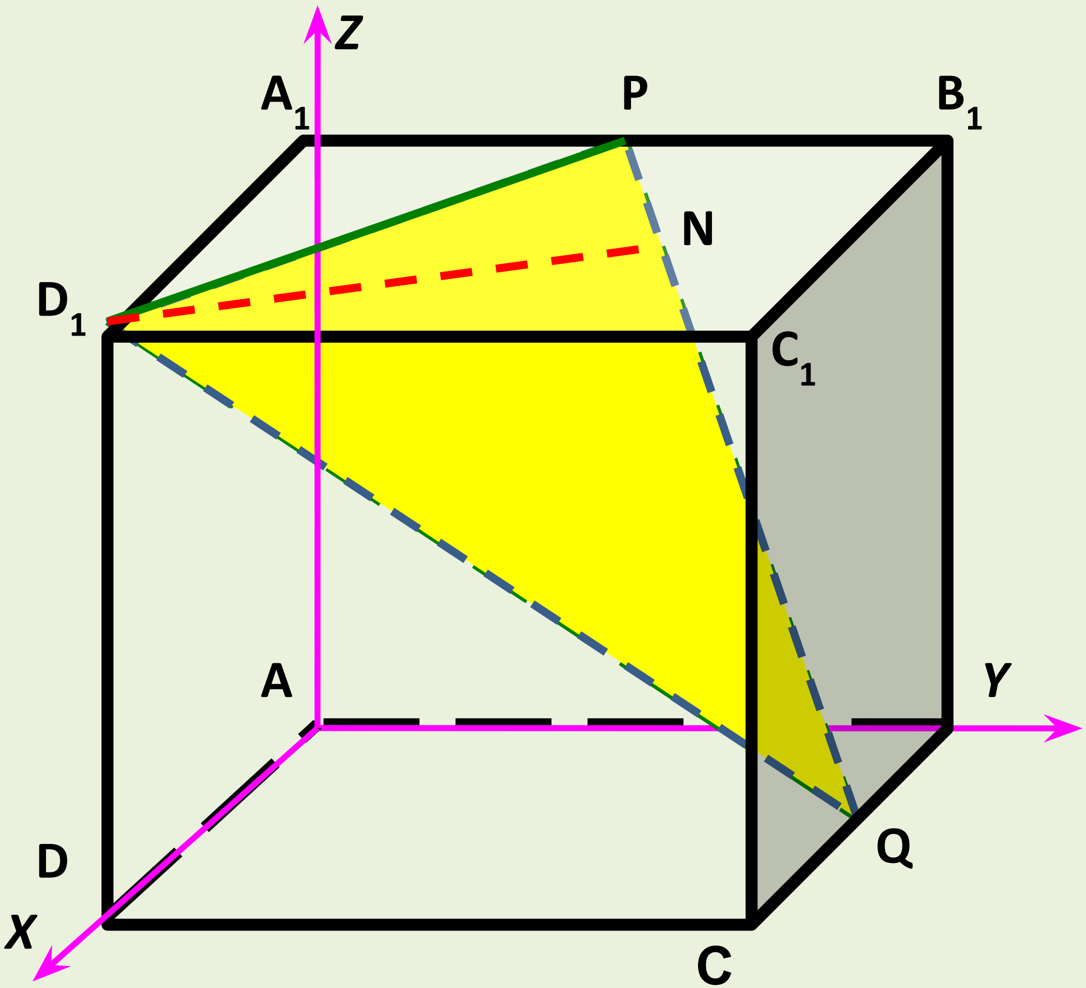
Сторона этого треугольника равна $\sqrt{2}$ *значит,*

$$\rho(D, A_1C) = DF = \frac{\sqrt{2} * \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Координатный метод

Пример 8. *В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от точки D_1 до прямой PQ, где P и Q – середины соответственно ребер A_1B_1 и BC.*



Решение. *Рассмотрим прямоугольную систему координат с началом в точке А Найдем координаты точек*

$$P\left(0;\frac{1}{2};1\right), Q\left(\frac{1}{2};1;0\right), D_1(1;0;1). \qquad Тогда$$

$$PQ=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad D_1Q=\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}=\frac{3}{2},$$

$$D_1P=\sqrt{1+\frac{1}{4}+0}=\sqrt{\frac{1}{4}}$$

Из треугольника D_1PQ , используя формулу

$$\cos\angle D_1PQ=\frac{D_1P^2+QP^2-D_1Q^2}{2*D_1P*QP},$$ *находим*

$$\cos\angle D_1PQ=\frac{\frac{5}{4}+\frac{3}{2}-\frac{9}{4}}{2*\sqrt{\frac{5}{4}}*\sqrt{\frac{3}{2}}}=\sqrt{\frac{1}{30}}.$$ *Далее получаем*

$$\sin\angle D_1PQ=\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{1}{30}}\right)^2}=\sqrt{\frac{29}{30}}.$$

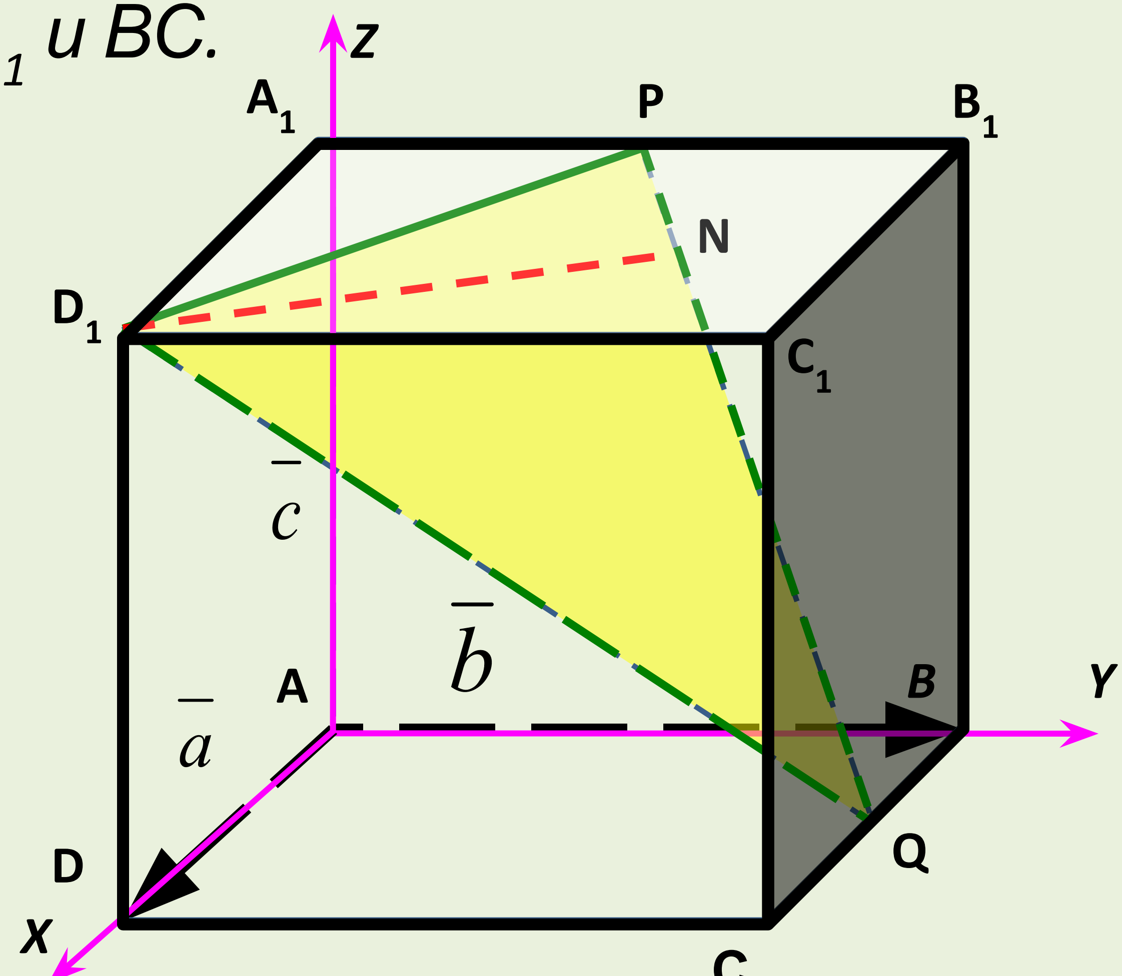
Пусть $D_1N\perp PQ,$ *где* $N\in PQ.$ *Тогда*

$$D_1N=D_1P*\sin\angle D_1PQ,\qquad D_1N=\sqrt{\frac{5}{4}}*\sqrt{\frac{29}{30}}=\sqrt{\frac{174}{144}}=\frac{\sqrt{174}}{12}$$

Ответ : $\dfrac{\sqrt{174}}{12}$

Векторный метод

Пример 9. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от точки D_1 до прямой PQ, где P и Q – середины соответственно ребер A_1B_1 и BC.



Решение.

Пусть $\overrightarrow{AD}=\vec{a}, \quad \overrightarrow{AB}=\vec{b}, \quad \overrightarrow{AA_1}=\vec{c}, \quad$ *тогда* $\quad |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$

$\vec{a}*\vec{b}=\vec{a}*\vec{c}=\vec{b}*\vec{c}=0.$

Выразим вектор $\overrightarrow{PQ}$ *через базисные векторы* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}:$ $\quad \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c},$

$\overrightarrow{PD_1}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

Пусть $D_1N \perp PQ$, *где* $N \in PQ$. *Выразим вектор* $\overrightarrow{D_1N}$, *учитывая коллинеарность векторов* $\overrightarrow{PN}$ *и* $\overrightarrow{PQ}$: $\quad \overrightarrow{D_1N}=\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PD_1}=x*\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PD_1}$

Так как $\overrightarrow{D_1N} \perp \overrightarrow{PQ}$, то $\overrightarrow{D_1N} * \overrightarrow{PQ} = 0$.

Отсюда получаем $\left(x * \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PD_1}\right) * \overrightarrow{PQ} = 0$

$$x * \overrightarrow{PQ}^2 = \overrightarrow{PD_1} * \overrightarrow{PQ},$$

$$x * \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right)^2 = \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) * \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right),$$

$$x * \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \qquad x = \frac{1}{6}$$

$$\overrightarrow{D_1N} = \frac{1}{6} * \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PD_1} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right) + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} = -\frac{11}{12}\vec{a} + \frac{7}{12}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c}$$

$$\left|\overrightarrow{D_1N}\right| = \sqrt{\overrightarrow{D_1N}^2} = \sqrt{\left(-\frac{11}{12}\vec{a} + \frac{7}{12}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c}\right)^2} = \sqrt{\frac{121}{144} + \frac{49}{144} + \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{174}}{12}$$

Замечание. *Решение данного примера векторным методом не является рациональным, но приведено с целью показа широких возможностей векторного метода при решении задач разных видов*

Используемая литература:

Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Многогранники: виды задач и методы их решения.