



**Многогранники:  
виды задач и методы их  
решения**  
(типовые задания С2)

- 1

**Методическая разработка Амачкиной А.А.  
МОУ СОШ №12,  
г. Балашиха, Московской области.**

# 1.1. Расстояние между двумя точками

Расстояние между точками  $A$  и  $B$  можно вычислить:

1) как длину отрезка  $AB$ , если отрезок  $AB$  удастся включить в некоторый треугольник в качестве одной из его сторон;

2) по формуле  $\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ,

где  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$ ;

3) по формуле  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$ , где  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ,

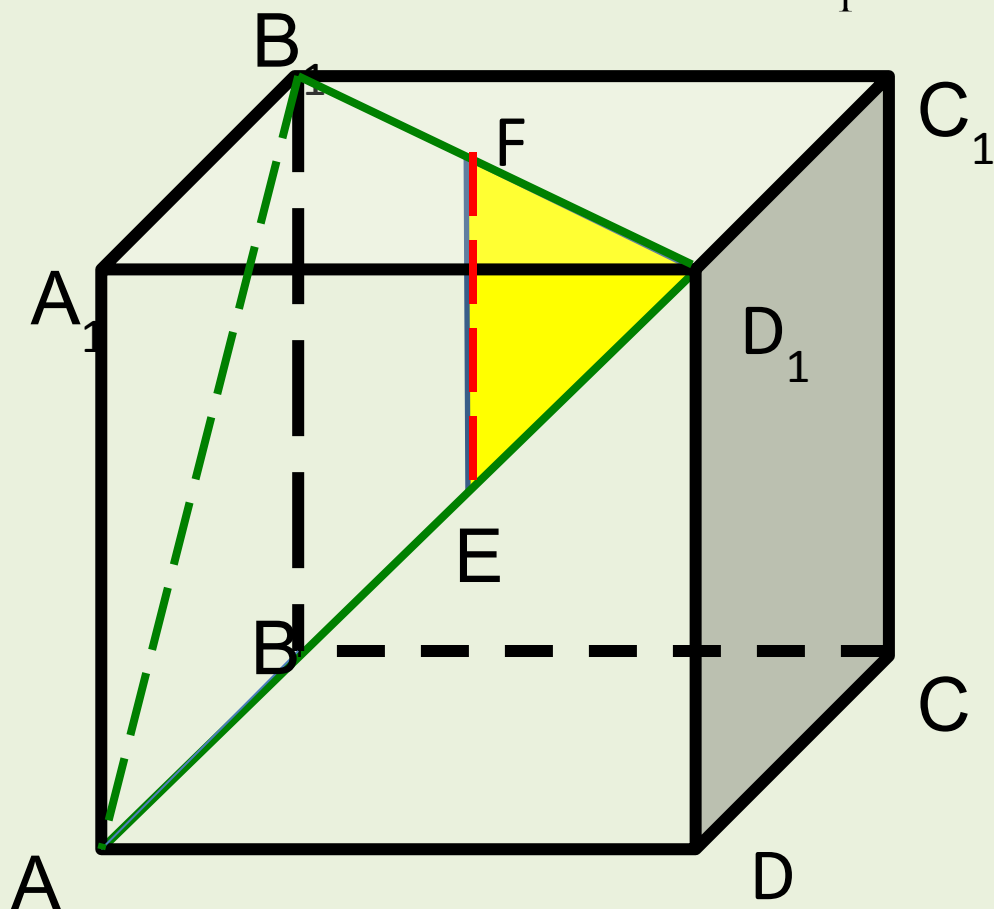
где  $\{a, b, c\}$  – координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$

# Поэтапно-вычислительный

## Пример 1. метод

В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  на диагоналях граней  $AD_1$  и  $D_1 B_1$  взяты точки  $E$  и  $F$  так, что

$$D_1 E = \frac{1}{3} AD_1, \quad D_1 F = \frac{2}{3} D_1 B_1.$$



Найти длину отрезка  $EF$ .

**Решение.** Длину отрезка  $EF$  найдем по теореме косинусов из треугольника  $D_1 EF$  в котором

$$D_1 F = \frac{2}{3} \sqrt{2}, D_1 E = \frac{1}{3} \sqrt{2}, \angle F D_1 E = \frac{\pi}{3}$$

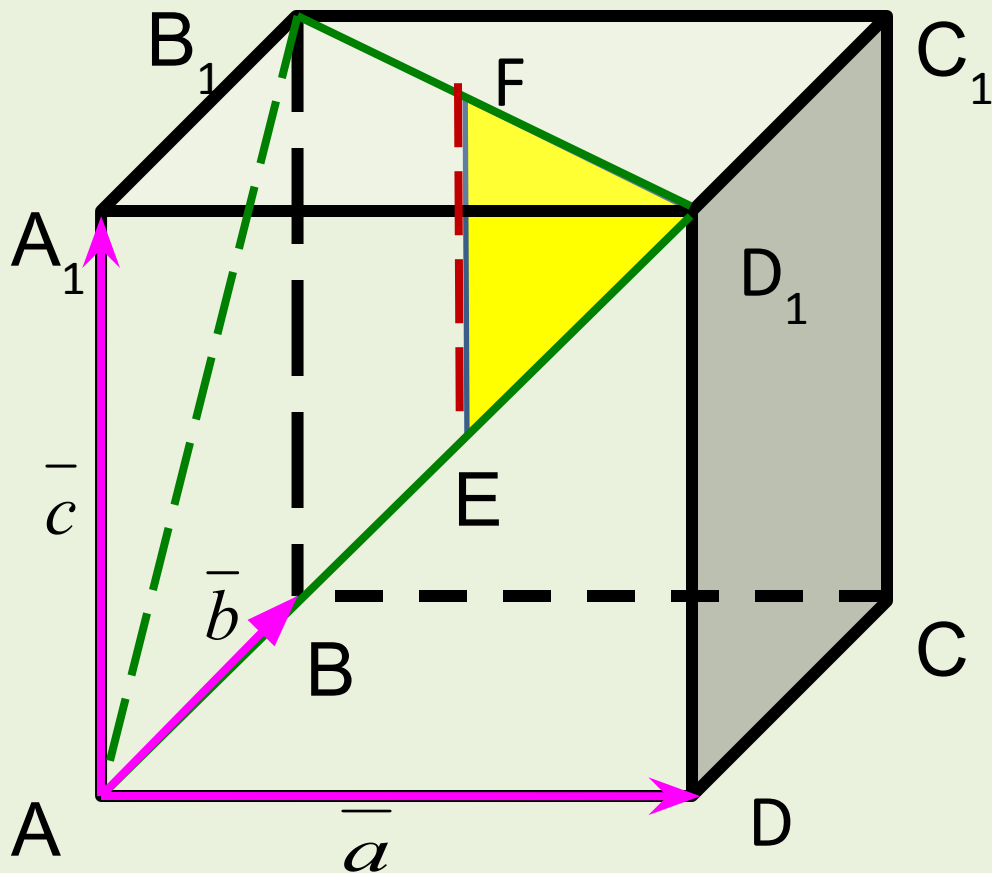
(треугольник  $AB_1 D_1$  является равносторонним). Имеем

$$\begin{aligned} EF^2 &= D_1 E^2 + D_1 F^2 - 2 D_1 E * D_1 F * \cos \frac{\pi}{3} = \\ &= \frac{3}{9} + \frac{8}{9} - 2 * \frac{\sqrt{2}}{3} * \frac{2\sqrt{2}}{3} * \frac{1}{2} = \frac{2}{3}, \text{ Откуда } EF = \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{6}}{3}$

# Векторный метод

**Пример 1.** В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  на диагоналях граней  $AD_1$  и  $D_1 B_1$  взяты точки  $E$  и  $F$  так, что  $D_1 E = \frac{1}{3} AD_1$ ,  $D_1 F = \frac{2}{3} D_1 B_1$ .



Найти длину отрезка  $EF$ .

*Решение. Пусть*

$$\overline{AD} = \overline{a}, \quad \overline{AB} = \overline{b}, \quad \overline{AA_1} = \overline{c}, \quad \text{тогда}$$

$$|\overline{a}| = |\overline{b}| = |\overline{c}| = 1, \quad \overline{a} * \overline{b} = \overline{a} * \overline{c} = \overline{b} * \overline{c} = 0.$$

*Выразим вектор  $\overline{FE}$  через базисные векторы  $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ :*

$$\overline{FE} = \overline{EA} + \overline{AB_1} + \overline{B_1F} = -\frac{2}{3}(\overline{a} + \overline{c}) + (\overline{b} + \overline{c}) + \frac{1}{3}(\overline{a} - \overline{b}) =$$

$$= -\frac{1}{3}\overline{a} + \frac{2}{3}\overline{b} + \frac{1}{3}\overline{c}$$

$$|\overline{FE}| = \sqrt{\overline{FE}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\overline{a} + \frac{2}{3}\overline{b} + \frac{1}{3}\overline{c}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

### **Замечание.**

Вектор  $\overline{FE}$  в данном базисе имеет

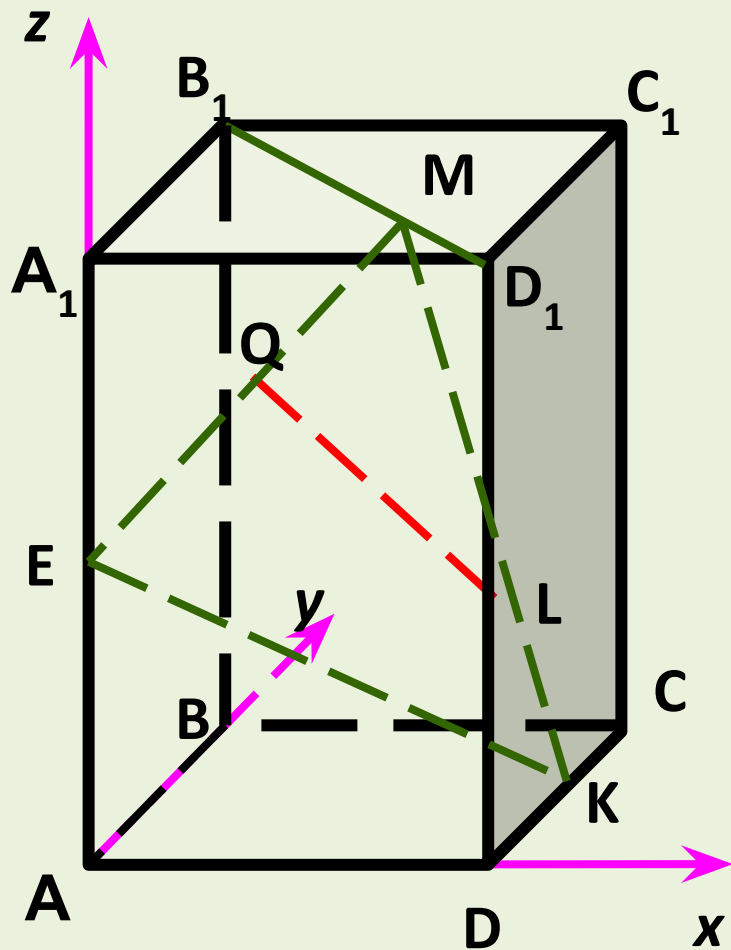
координаты  $\left\{-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right\}$ , поэтому длину

этого вектора можно найти по

по формуле  $|\overline{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ , то есть

$$|\overline{AB}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

# Координатный метод



**Пример 2.** В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точки  $E$  и  $K$  – середины ребер  $AA_1$  и  $CD$  соответственно, а точка  $M$  расположена на диагонали  $B_1 D_1$  так, что  $B_1 M = 2 M D_1$ . Найти расстояние между точками  $Q$  и  $L$ , где  $Q$  – середина отрезка  $EM$ , а  $L$  – точка отрезка  $MK$  такая, что  $ML = 2LK$ .

*Решение.* Введем прямоугольную систему координат



Тогда  $E\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$ ,  $K\left(1,\frac{1}{2};0\right)$ ,  $B(0,1,1)$ ,  $D_1(1,0,1)$ .

Для нахождения координат точки  $M$  используем формулу координат точки (опорная задача 1), делящей отрезок  $B_1D_1$  в отношении  $2:1$ . Имеем

$$M\left(\frac{0+2*1}{1+2};\frac{1+2*0}{1+2};\frac{1+2*1}{1+2}\right)=\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};1\right).$$

Аналогично получим координаты точки  $L$ , делящей отрезок  $MK$  в отношении  $2:1$ . Имеем

$$L\left(\frac{\frac{2}{3}+2*1}{1+2};\frac{\frac{1}{3}+2*\frac{1}{2}}{1+2};\frac{1+2*0}{1+2}\right)=\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{1}{3}\right).$$

*Координаты точки Q равны полусуммам соответствующих координат точек E и M, поэтому*

$Q\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{3}{4}\right)$ . *Применим формулу для расстояния между точками с заданными координатами*

$$LQ = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{725}{36^2}} = \frac{5\sqrt{29}}{36}$$

**Ответ:**  $\frac{5\sqrt{29}}{36}$

**Используемая литература:**

***Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Многогранники: виды задач и методы их решения. МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2011 (типовые задания С2)***

***Корянов А. Г., г. Брянск, [akoryanov@mail.ru](mailto:akoryanov@mail.ru)***

***Прокофьев А.А., г. Москва, [aaprokof@yandex.ru](mailto:aaprokof@yandex.ru)***