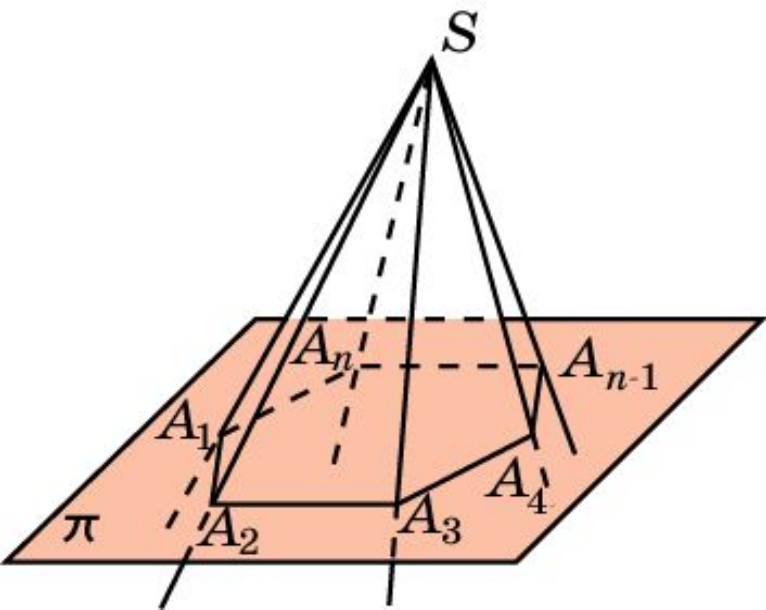


МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

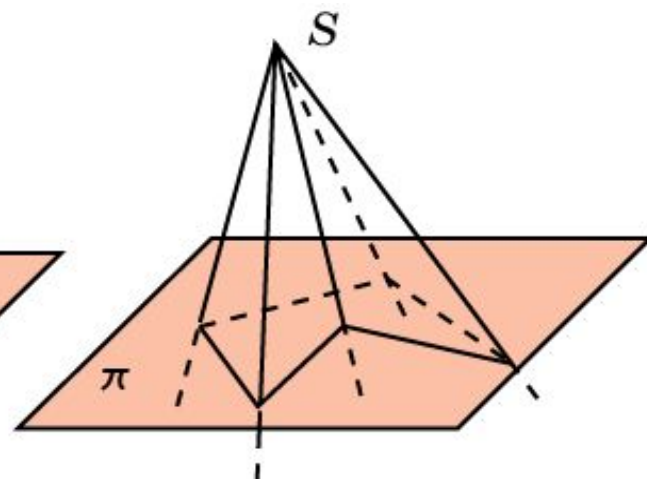
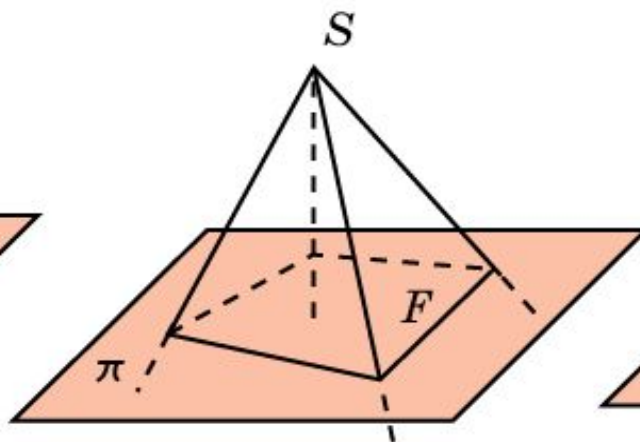
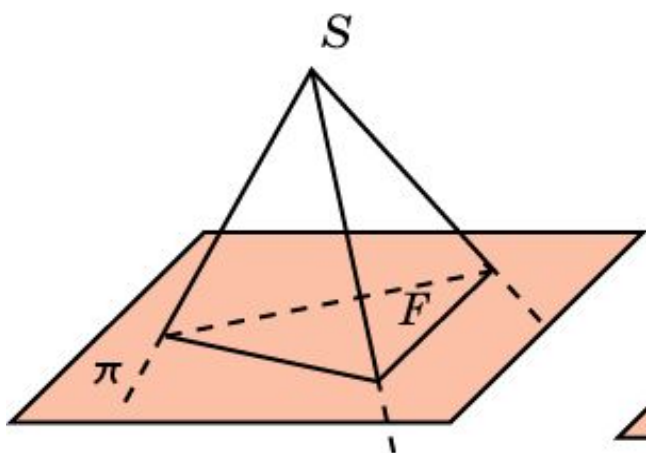


Поверхность, образованную конечным набором плоских углов $A_1SA_2, A_2SA_3, \dots, A_{n-1}SA_n, A_nSA_1$ с общей вершиной S , в которых соседние углы не имеют общих точек, кроме точек общего луча, а не соседние углы не имеют общих точек, кроме общей вершины, будем называть **многогранной поверхностью**.

Фигура, образованная указанной поверхностью и одной из двух частей пространства, ею ограниченных, называется **многогранным углом**. Общая вершина S называется **вершиной** многогранного угла. Лучи SA_1, \dots, SA_n называются **ребрами** многогранного угла, а сами плоские углы $A_1SA_2, A_2SA_3, \dots, A_{n-1}SA_n, A_nSA_1$ – **гранями** многогранного угла. Многогранный угол обозначается буквами $SA_1\dots A_n$, указывающими вершину и точки на его ребрах.

МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

В зависимости от числа граней многогранные углы бывают трехгранными, четырехгранными, пятигранными и т. д.



ТРЕХГРАННЫЕ УГЛЫ

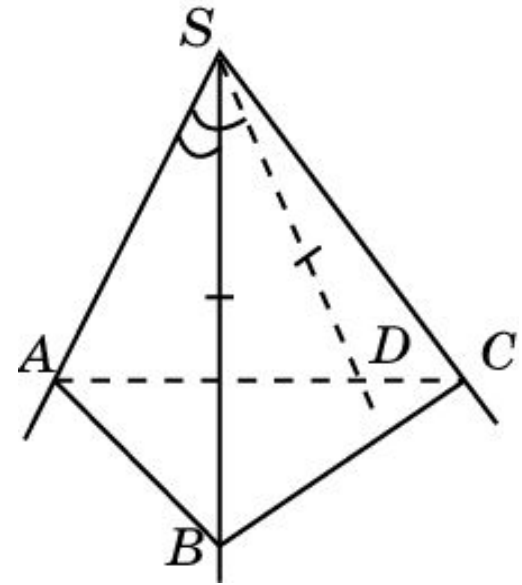
Теорема. Всякий плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

Доказательство. Рассмотрим трехгранный угол $SABC$. Пусть наибольший из его плоских углов есть угол ASC . Тогда выполняются неравенства $\angle ASB \leq \angle ASC < \angle ASC + \angle BSC$; $\angle BSC \leq \angle ASC < \angle ASC + \angle ASB$.

Таким образом, остается доказать неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.

Отложим на грани ASC угол ASD , равный ASB , и точку D выберем так, чтобы $SB = SD$. Тогда треугольники ASB и ASD равны (по двум сторонам и углу между ними) и, следовательно, $AB = AD$.

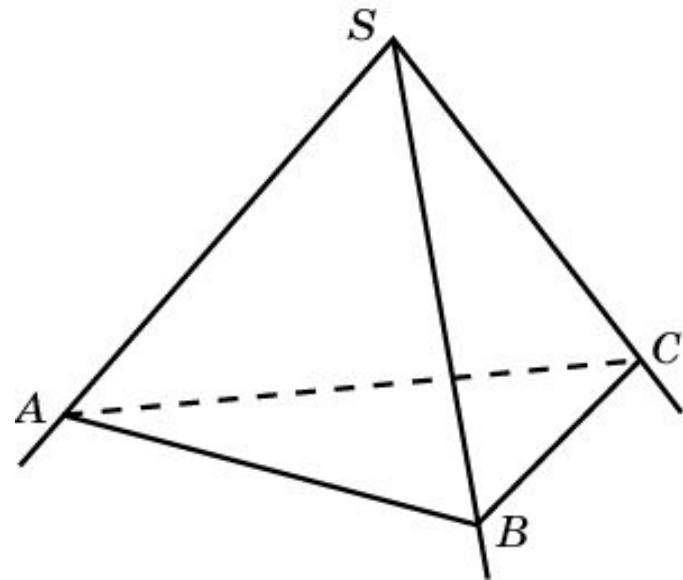
Воспользуемся неравенством треугольника $AC < AB + BC$. Вычитая из обеих его частей $AD = AB$, получим неравенство $DC < BC$. В треугольниках DSC и BSC одна сторона общая (SC), $SD = SB$ и $DC < BC$. В этом случае против большей стороны лежит больший угол и, следовательно, $\angle DSC < \angle BSC$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства угол ASD , равный углу ASB , получим требуемое неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.



ТРЕХГРАННЫЕ УГЛЫ

Свойство. Сумма плоских углов трехгранного угла меньше 360° .

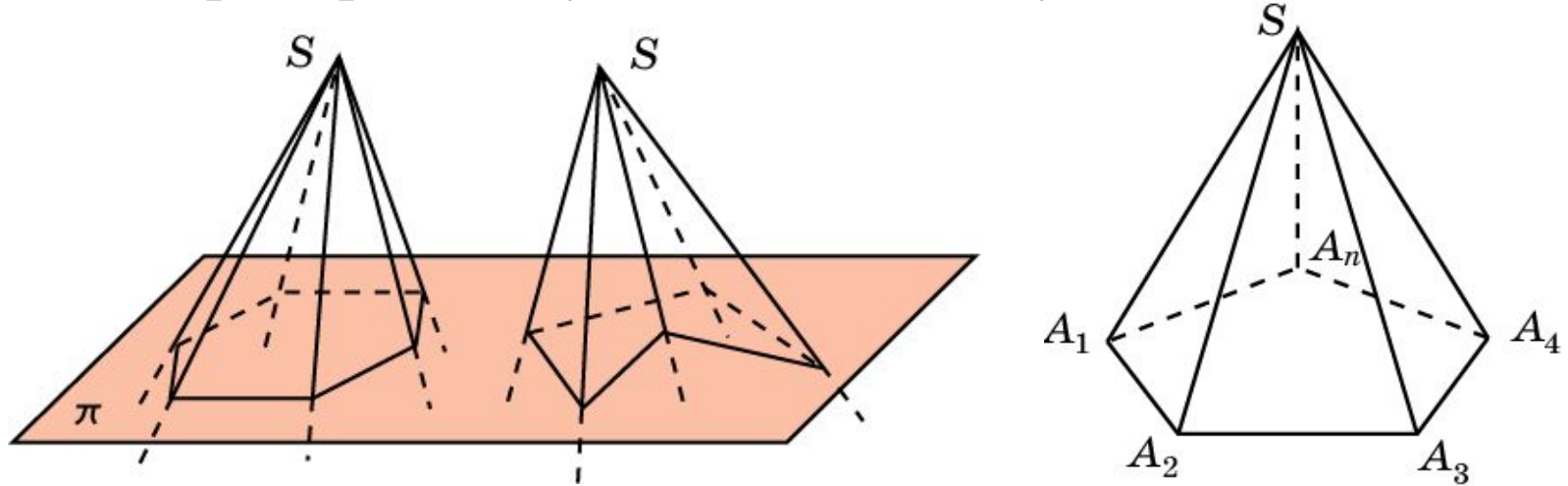
Доказательство. Пусть $SABC$ – данный трехгранный угол. Рассмотрим трехгранный угол с вершиной A , образованный гранями ABS , ACS и углом BAC . В силу доказанного свойства, имеет место неравенство $\angle BAC < \angle BAS + \angle CAS$.



Аналогично, для трехгранных углов с вершинами B и C имеют место неравенства: $\angle ABC < \angle ABS + \angle CBS$, $\angle ACB < \angle ACS + \angle BCS$. Складывая эти неравенства и учитывая, что сумма углов треугольника ABC равна 180° , получаем $180^\circ < \angle BAS + \angle CAS + \angle ABS + \angle CBS + \angle BCS + \angle ACS = 180^\circ - \angle ASB + 180^\circ - \angle BSC + 180^\circ - \angle ASC$. Следовательно, $\angle ASB + \angle BSC + \angle ASC < 360^\circ$.

ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

Многогранный угол называется **выпуклым**, если он является выпуклой фигурой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок. На рисунке приведены примеры выпуклого и невыпуклого многогранных углов.

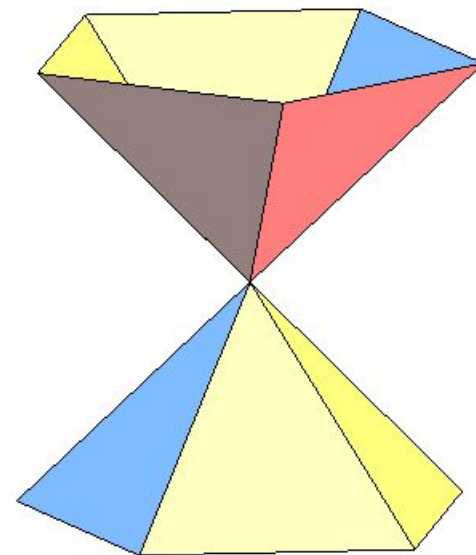
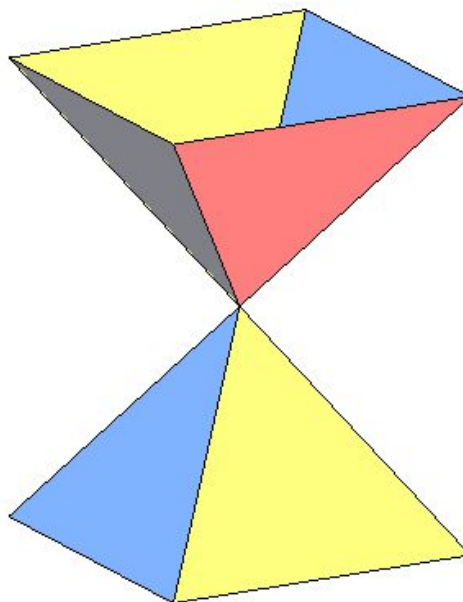
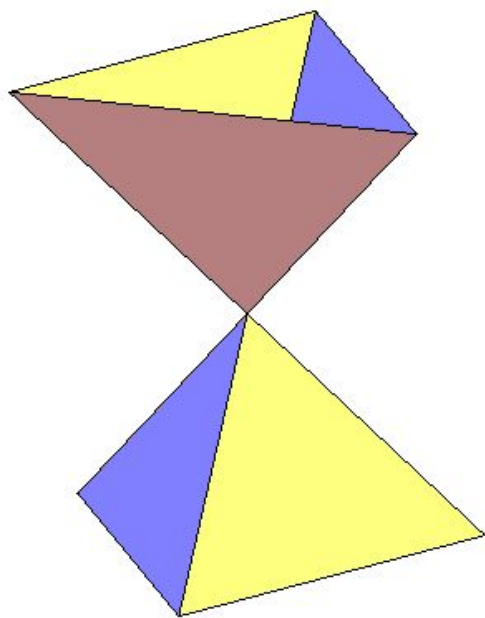


Свойство. Сумма всех плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360° .

Доказательство аналогично доказательству соответствующего свойства для трехгранного угла.

Вертикальные многогранные углы

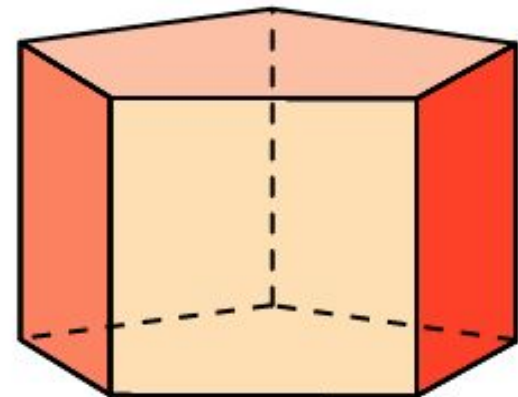
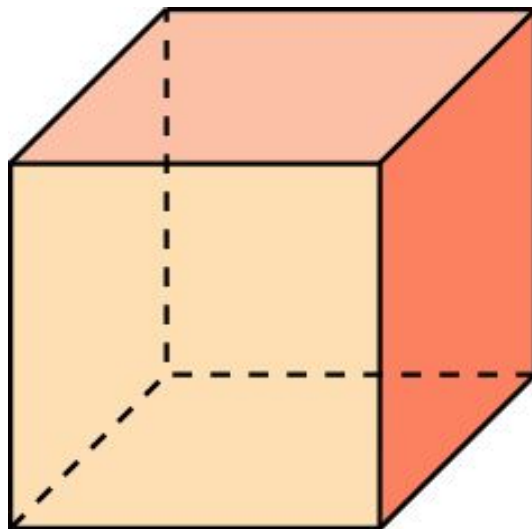
На рисунках приведены примеры трехгранных, четырехгранных и пятигранных вертикальных углов



Теорема. Вертикальные углы равны.

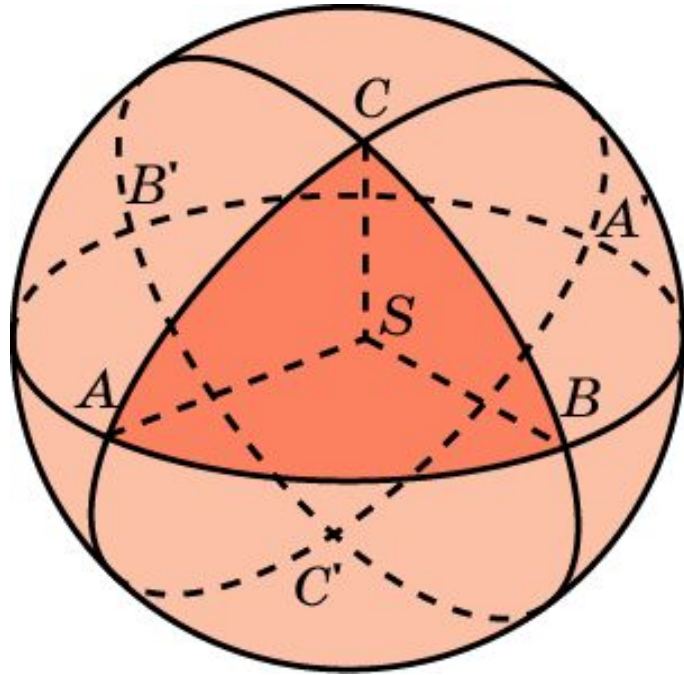
Измерение многогранных углов

Поскольку градусная величина развернутого двугранного угла измеряется градусной величиной соответствующего линейного угла и равна 180° , то будем считать, что градусная величина всего пространства, которое состоит из двух развернутых двугранных углов, равна 360° . Величина многогранного угла, выраженная в градусах, показывает какую часть пространства занимает данный многогранный угол. Например, трехгранный угол куба занимает одну восьмую часть пространства и, значит, его градусная величина равна $360^\circ : 8 = 45^\circ$. Трехгранный угол в правильной n -угольной призме равен половине двугранного угла при боковом ребре. Учитывая, что этот двугранный угол равен $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$, получаем, что трехгранный угол призмы равен $\frac{90^\circ(n-2)}{n}$.



Измерение трехгранных углов*

Выведем формулу, выражающую величину трехгранного угла через его двугранные углы. Опишем около вершины S трехгранного угла единичную сферу и обозначим точки пересечения ребер трехгранного угла с этой сферой A, B, C .



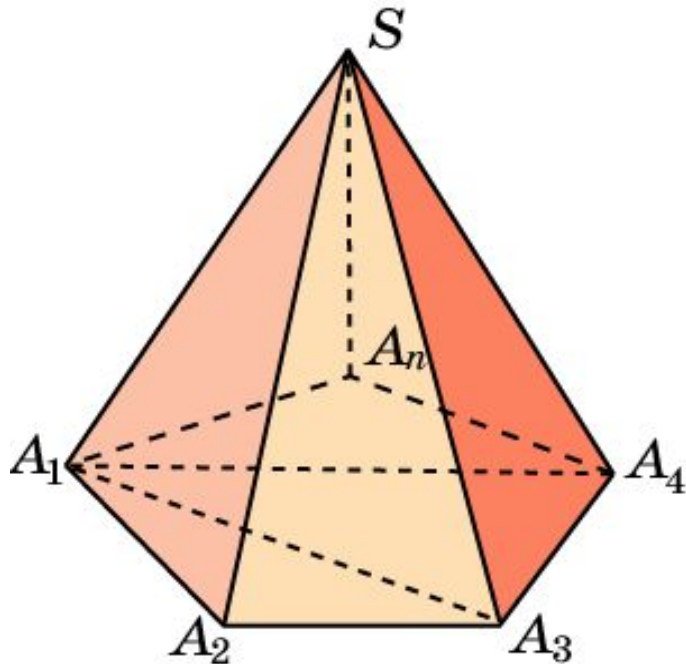
Плоскости граней трехгранного угла разбивают эту сферу на шесть попарно равных сферических двуугольников, соответствующих двугранным углам данного трехгранного угла. Сферический треугольник ABC и симметричный ему сферический треугольник $A'B'C'$ являются пересечением трех двуугольников. Поэтому удвоенная сумма двугранных углов равна 360° плюс учетверенная величина трехгранного угла, или

$$\angle SA + \angle SB + \angle SC = 180^\circ + 2 \angle SABC.$$

Измерение многогранных углов*

Пусть $SA_1 \dots A_n$ – выпуклый n -гранный угол. Разбивая его на трехгранные углы, проведением диагоналей $A_1A_3, \dots, A_1A_{n-1}$ и применяя к ним полученную формулу, будем иметь:

$$\angle SA_1 + \dots + \angle SA_n = 180^\circ(n-2) + 2 \angle SA_1 \dots A_n.$$



Многогранные углы можно измерять и числами. Действительно, тремстам шестидесяти градусам всего пространства соответствует число 2π . Переходя от градусов к числам в полученной формуле, будем иметь:

$$\angle SA_1 + \dots + \angle SA_n = \pi(n-2) + 2 \angle SA_1 \dots A_n.$$

Упражнение 1

Может ли быть трехгранный угол с плоскими углами:

а) 30° , 60° , 20° ; б) 45° , 45° , 90° ; в) 30° , 45° , 60° ?

Ответ: а) Нет; б) нет; в) да.

Упражнение 2

Приведите примеры многогранников, у которых грани, пересекаясь в вершинах, образуют только: а) трехгранные углы; б) четырехгранные углы; в) пятигранные углы.

Ответ: а) Тетраэдр, куб, додекаэдр;
б) октаэдр;
в) икосаэдр.

Упражнение 3

Два плоских угла трехгранного угла равны 70° и 80° . В каких границах находится третий плоский угол?

Ответ: $10^\circ < \phi < 150^\circ$.

Упражнение 4

Плоские углы трехгранного угла равны 45° , 45° и 60° .
Найдите величину угла между плоскостями плоских углов в 45° .

Ответ: 90° .

Упражнение 5

В трехгранном угле два плоских угла равны по 45° ; двугранный угол между ними прямой. Найдите третий плоский угол.

Ответ: 60° .

Упражнение 6

Плоские углы трехгранного угла равны 60° , 60° и 90° . На его ребрах от вершины отложены равные отрезки OA , OB , OC . Найдите двугранный угол между плоскостью угла в 90° и плоскостью ABC .

Ответ: 90° .

Упражнение 7

Каждый плоский угол трехгранного угла равен 60° . На одном из его ребер отложен от вершины отрезок, равный 3 см, и из его конца опущен перпендикуляр на противоположную грань. Найдите длину этого перпендикуляра.

Ответ: $\sqrt{6}$ см.

Упражнение 8

Найдите геометрическое место внутренних точек трехгранного угла, равноудаленных от его граней.

Ответ: Луч, вершиной которого является вершина трехгранного угла, лежащий на линии пересечения плоскостей, делящих двугранные углы пополам.

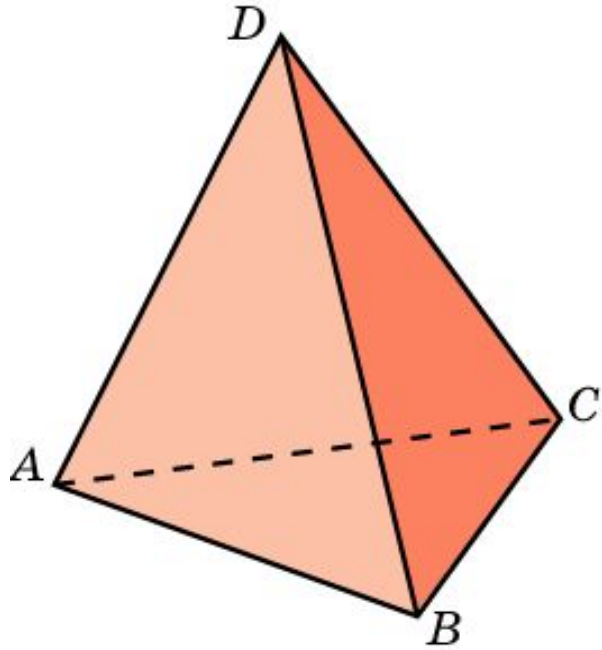
Упражнение 9

Найдите геометрическое место внутренних точек трехгранного угла, равноудаленных от его ребер.

Ответ: Луч, вершиной которого является вершина трехгранного угла, лежащий на линии пересечения плоскостей, проходящих через биссектрисы плоских углов и перпендикулярных плоскостям этих углов.

Упражнение 10

Найдите приближенные значения трехгранных углов тетраэдра.



Для двугранных углов φ тетраэдра имеем:

$$\cos \varphi = \frac{1}{3}, \text{ откуда } \varphi \approx 70^{\circ}30'.$$

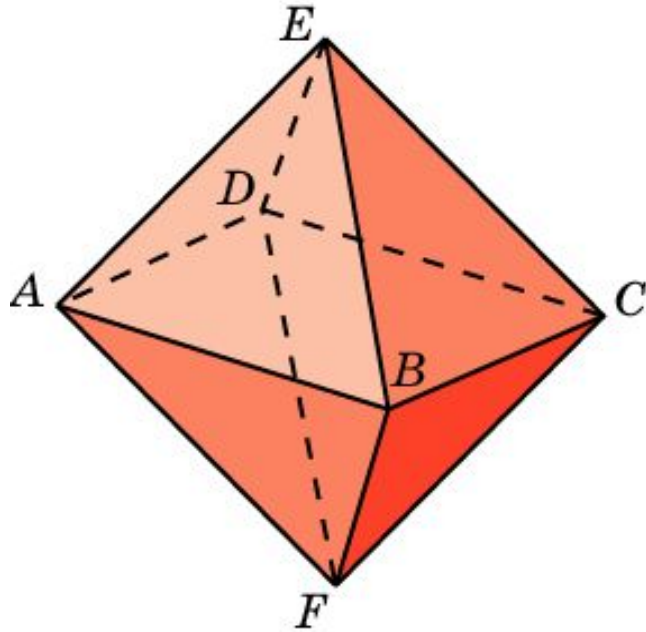
Для трехгранных углов ψ тетраэдра имеем:

$$\psi = \frac{3\varphi - 180^{\circ}}{2} \approx 15^{\circ}45'.$$

Ответ: $\psi \approx 15^{\circ}45'$.

Упражнение 11

Найдите приближенные значения четырехгранных углов октаэдра.



Для двугранных углов φ октаэдра имеем:

$$\cos \varphi = -\frac{1}{3}, \text{ откуда } \varphi \approx 109^{\circ}30'.$$

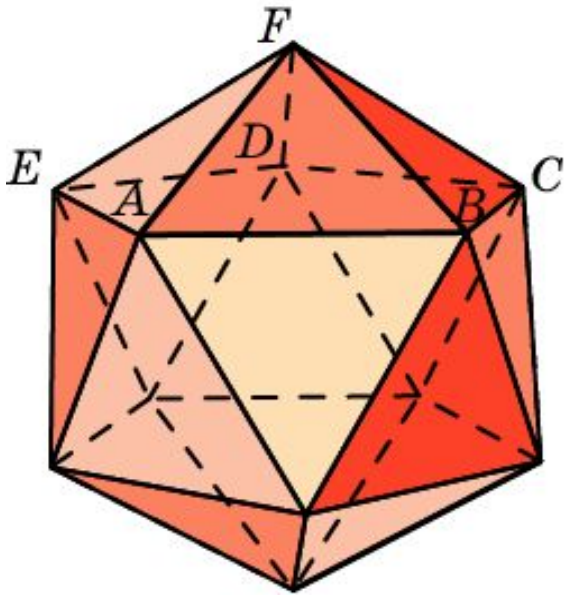
Для четырехгранных углов ψ октаэдра имеем:

$$\psi = \frac{4\varphi - 180^{\circ} \cdot 2}{2} = 2\varphi - 180^{\circ} \approx 38^{\circ}56'.$$

Ответ: $\psi \approx 38^{\circ}56'$.

Упражнение 12

Найдите приближенные значения пятигранных углов икосаэдра.



Для двугранных углов φ икосаэдра имеем:

$$\cos \varphi = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \text{ откуда } \varphi \approx 138^\circ 11'.$$

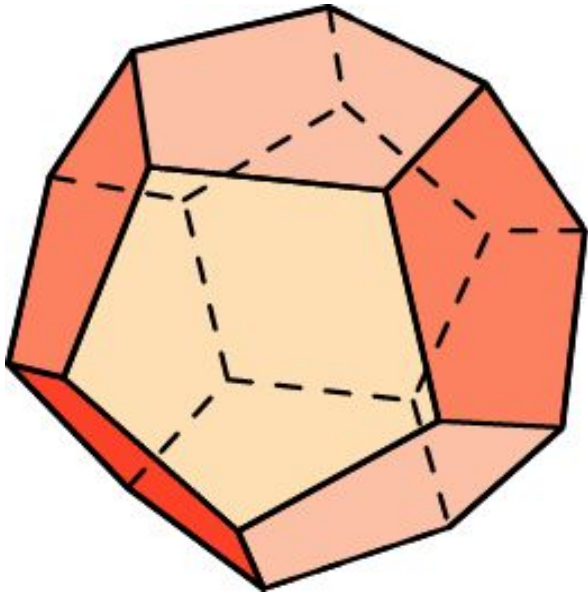
Для пятигранных углов ψ икосаэдра имеем:

$$\psi = \frac{5\varphi - 180^\circ \cdot 3}{2} \approx 75^\circ 28'.$$

Ответ: $\psi \approx 75^\circ 28'$.

Упражнение 13

Найдите приближенные значения трехгранных углов додекаэдра.



Для двугранных углов φ додекаэдра имеем:

$$\cos \varphi = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ откуда } \varphi \approx 116^{\circ}34'.$$

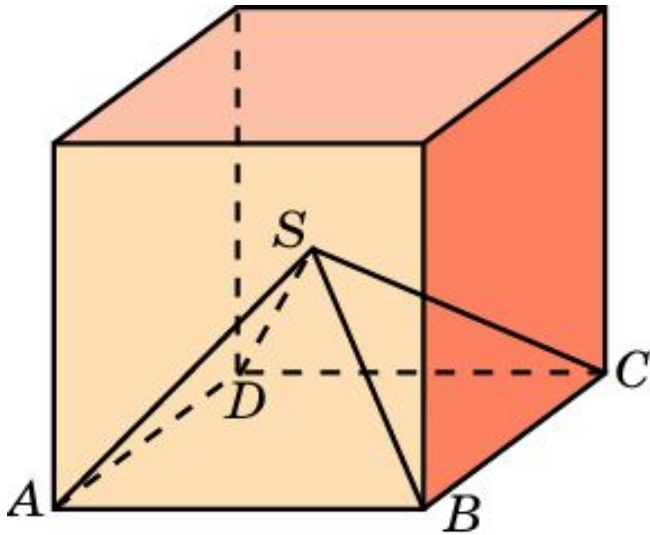
Для трехгранных углов ψ додекаэдра имеем:

$$\psi = \frac{3\varphi - 180^{\circ}}{2} \approx 84^{\circ}51'.$$

Ответ: $\psi \approx 84^{\circ}51'$.

Упражнение 14

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 2 см, высота 1 см. Найдите четырехгранный угол при вершине этой пирамиды.

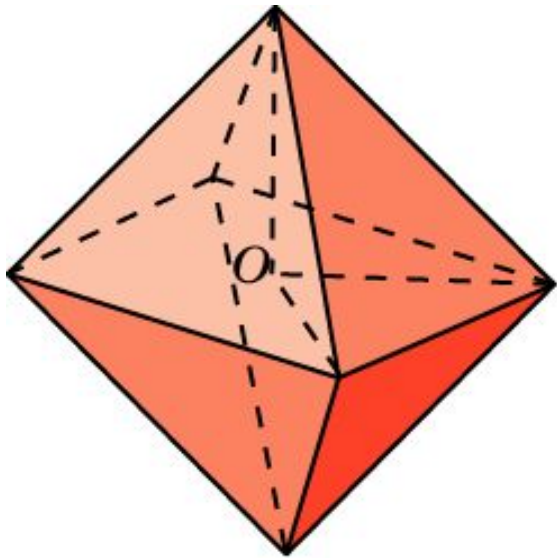


Решение: Указанные пирамиды разбивают куб на шесть равных пирамид с вершинами в центре куба. Следовательно, 4-х гранный угол при вершине пирамиды составляет одну шестую часть угла в 360° , т.е. равен 60° .

Ответ: 60° .

Упражнение 15

В правильной треугольной пирамиде боковые ребра равны 1, углы при вершине 90° . Найдите трехгранный угол при вершине этой пирамиды.

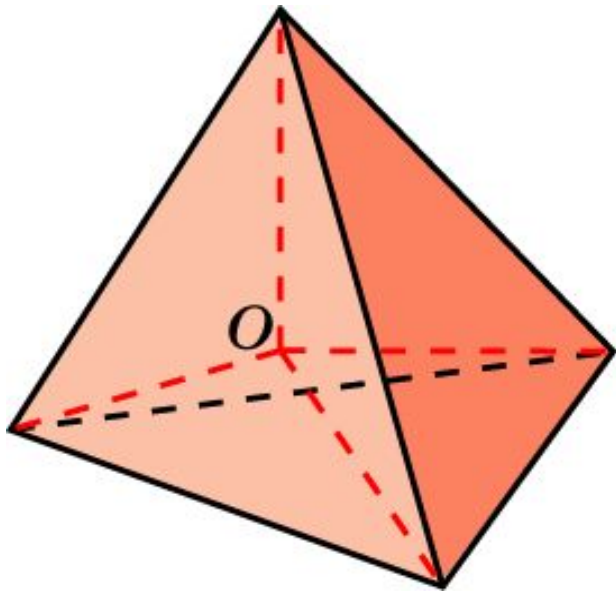


Решение: Указанные пирамиды разбивают октаэдр на восемь равных пирамид с вершинами в центре O октаэдра. Следовательно, 3-х гранный угол при вершине пирамиды составляет одну восьмую часть угла в 360° , т.е. равен 45° .

Ответ: 45° .

Упражнение 16

В правильной треугольной пирамиде боковые ребра равны 1, а высота $\frac{1}{3}$. Найдите трехгранный угол при вершине этой пирамиды.



Решение: Указанные пирамиды разбивают правильный тетраэдр на четыре равные пирамиды с вершинами в центре O тетраэдра. Следовательно, 3-гранный угол при вершине пирамиды составляет одну четвертую часть угла в 360° , т.е. равен 90° .

Ответ: 90° .