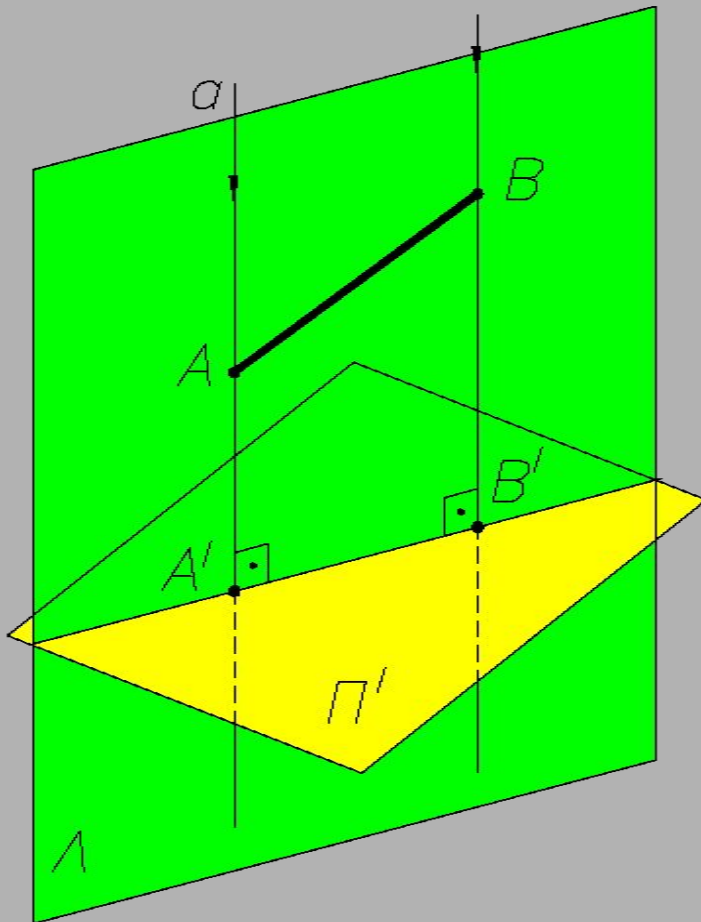


# «Начертательная геометрия»



- Выполнила: ученица 11 «А» класса
- Клименко Екатерина
- Учитель: Кашина О. Л.
- МБОУ «Гимназия №83»
- Г. Ижевск

# Предмет «Начертательная геометрия» (Н.Г.)

Н.Г. изучает законы отображения трехмерного пространства на двумерную плоскость методами проекций и сечений.

Основоположником начертательной геометрии и метода ортогонального проецирования является французский математик, геометр Гаспар Монж (1746-1818гг.).

Две основные задачи Н.Г.:

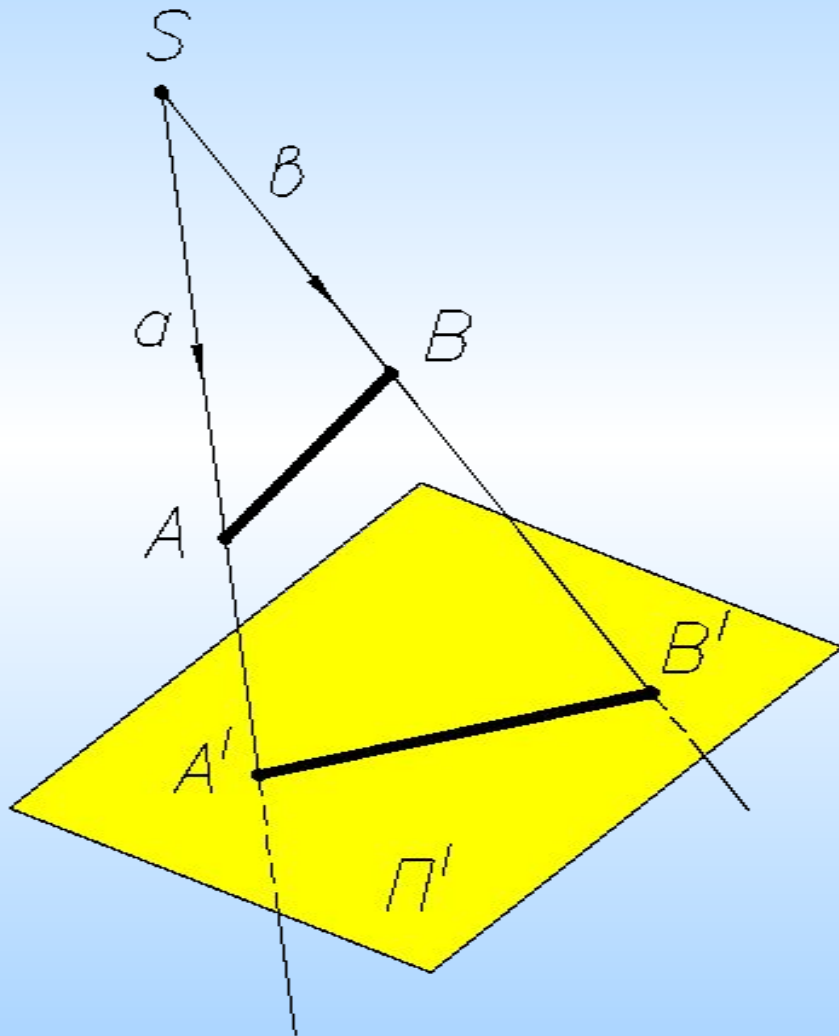
прямая -  
построить изображение  
пространственного предмета  
на чертеже;

обратная –  
реконструкция  
пространственного предмета  
по чертежу.

Построение любого изображения выполняется с помощью операции **проецирования**.

# Виды проецирования

## Линейное центральное проецирование



### Аппарат проецирования

$S$  - центр проецирования,  
 $\Pi$  - плоскость проекций или  
картинная плоскость,  
 $A, B$  - точки пространства,  
 $SA, SB$  – проецирующий луч,  
 $a, b$  - направление  
проецирования,  
 $A', B'$  – центральные проекции  
точек  $A$  и  $B$  на плоскость  $\Pi'$ .

**Проекцией фигуры называется  
множество проекций всех ее  
точек**

Нет закономерных отношений  
между линейными размерами  
геометрического образа (Г.О.) и его  
проекциями.

# Виды проецирования

## Параллельное проецирование

### Аппарат проецирования

$a$  - направление проецирования

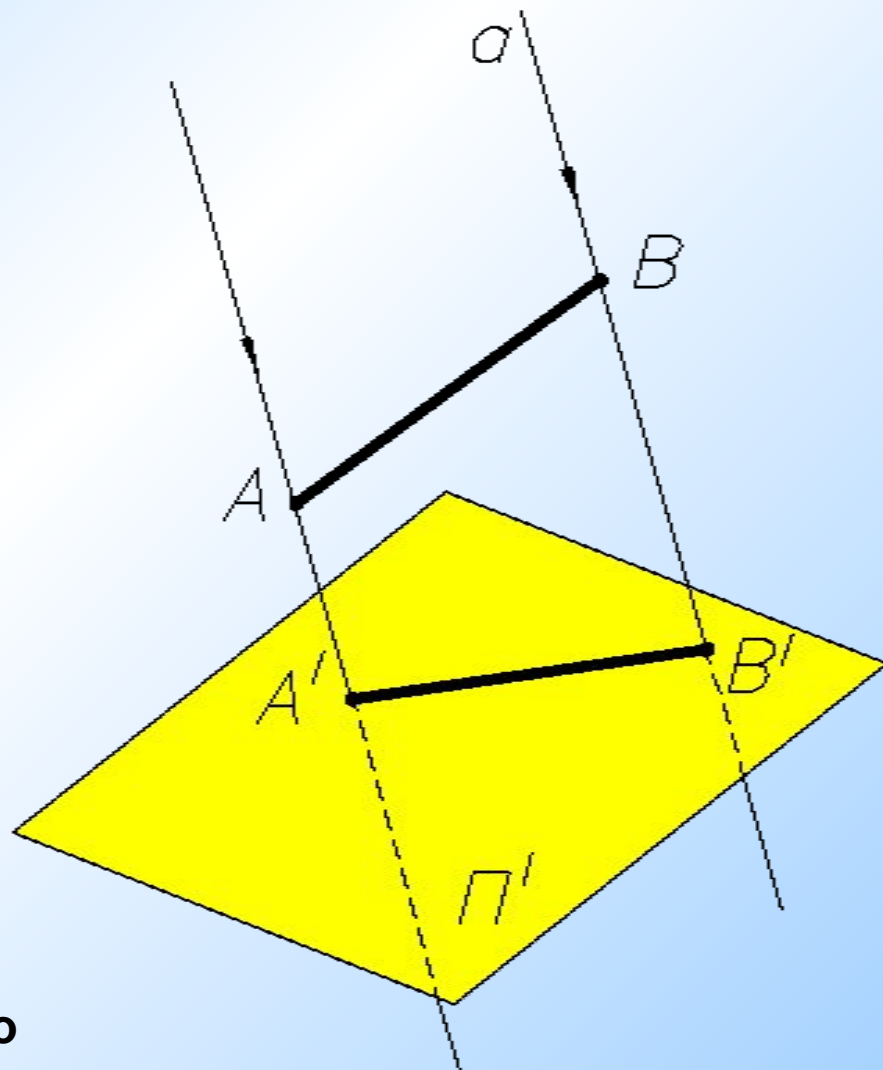
$\Pi'$  - плоскость проекций

$A, B$  - точки пространства

$A', B'$  – проекции точек  $A$  и  $B$  на плоскость  $\Pi'$ .

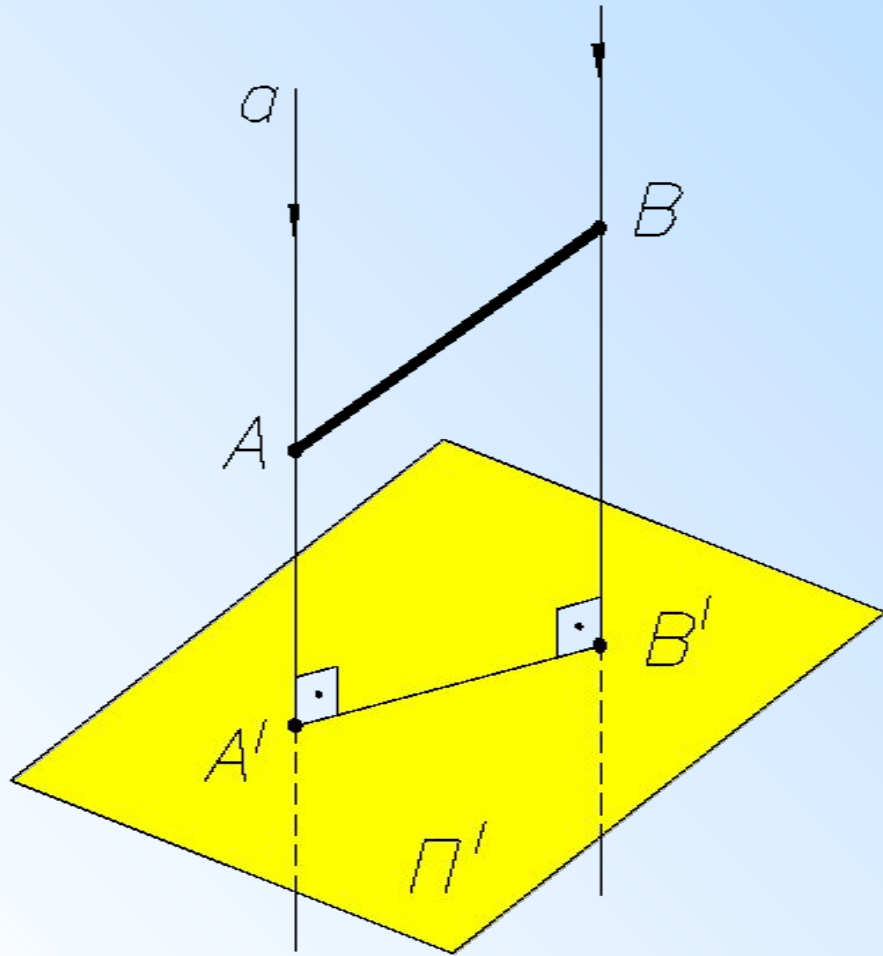
Проекцией фигуры называется множество проекций всех ее точек

Нет закономерных отношений между линейными размерами геометрического образа (Г.О.) и его проекциями.



# Виды проецирования

## Ортогональное проецирование



### Аппарат проецирования

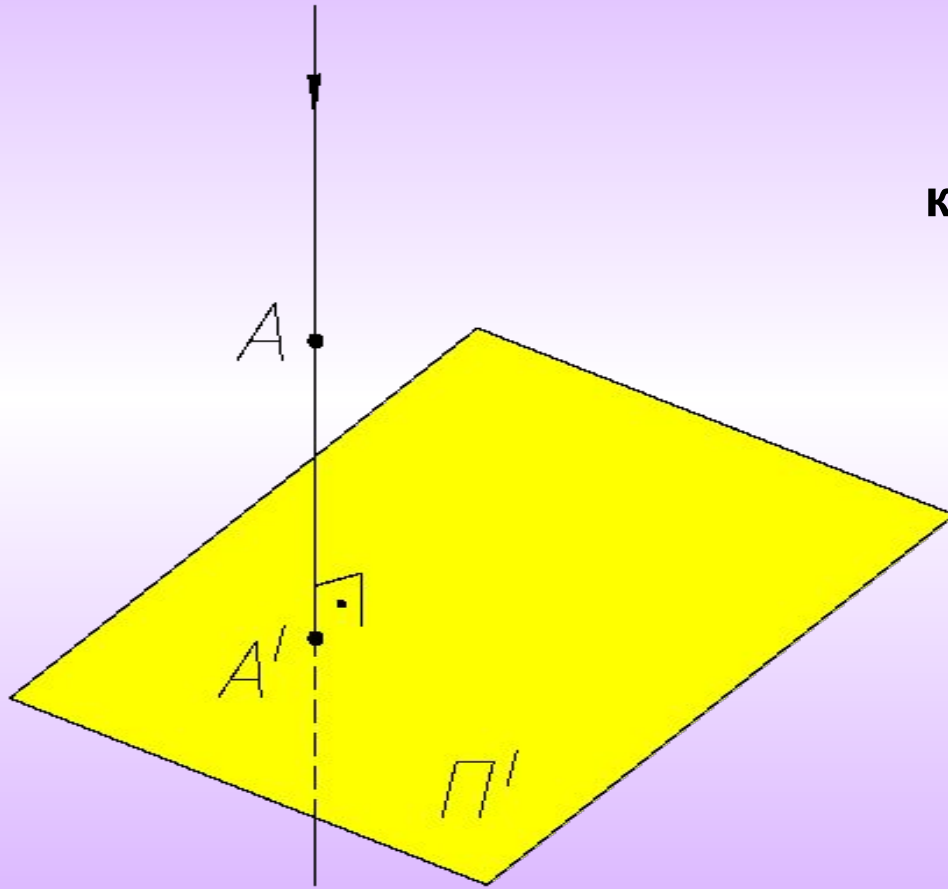
$a$  - направление проецирования,  
 $a \perp \Pi'$ ,

$\Pi'$  - плоскость проекций,  
 $A, B$  - точки пространства,  
 $A', B'$  - ортогональные проекции точек  $A$  и  $B$  на плоскость  $\Pi'$ .

**Проекцией фигуры называется множество проекций всех ее точек**

Существуют определенные закономерности между геометрическим образом (Г.О.) и его ортогональной проекцией:  
позиционные и метрические свойства ортогонального проецирования.

# Основные позиционные свойства ортогонального проецирования:

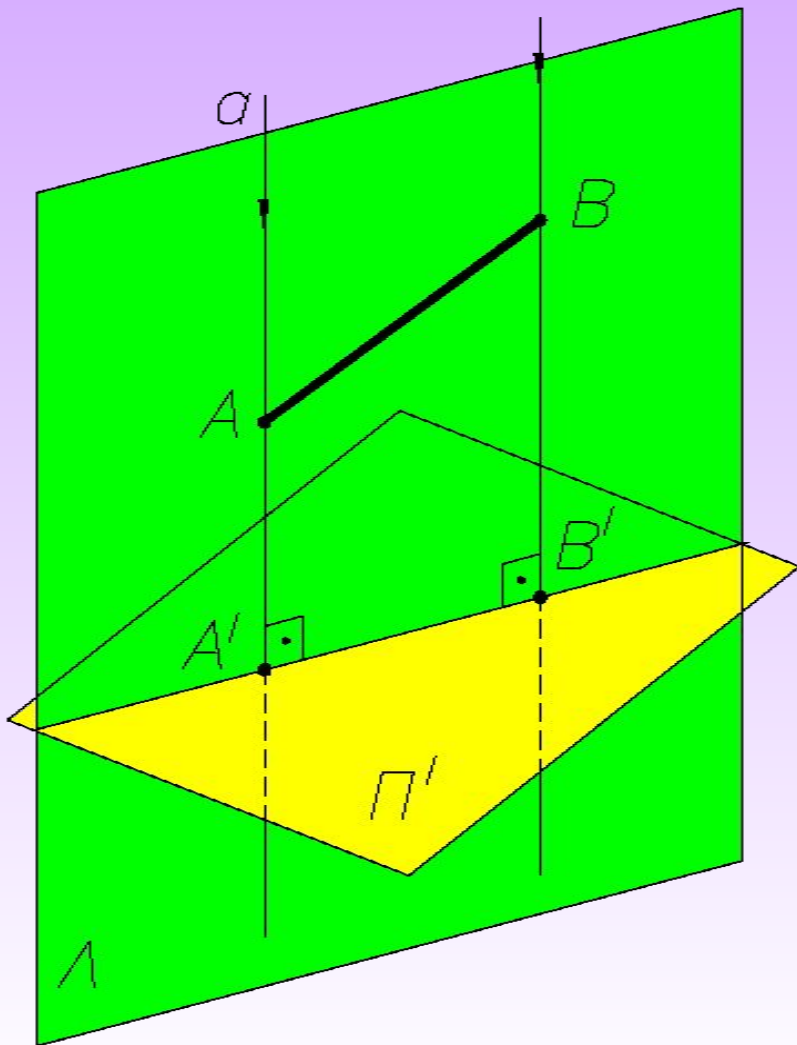


1.

каждой точке проецируемого  
Г.О. соответствует одна  
точка на плоскости  
проекций,  
 $A \Rightarrow A'$ ;

(обратная зависимость  
неоднозначна);

# Основные **позиционные** свойства ортогонального проектирования:



2.

проекцией прямой линии  $AB$   
является прямая линия  
 $A'B'$ ,

$$AB \Rightarrow A'B';$$

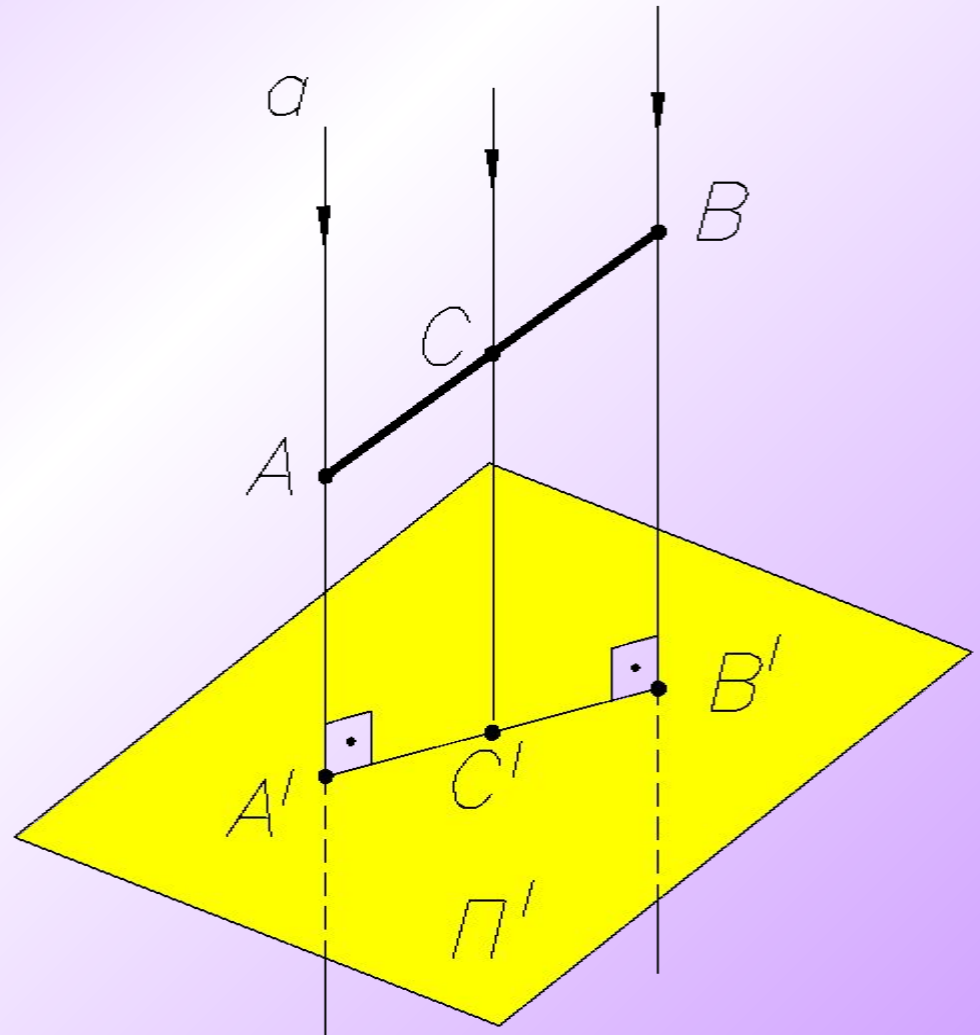
$ABA'B'$  – проектирующая  
плоскость  $L$ );

# Основные позиционные свойства ортогонального проецирования:

3.

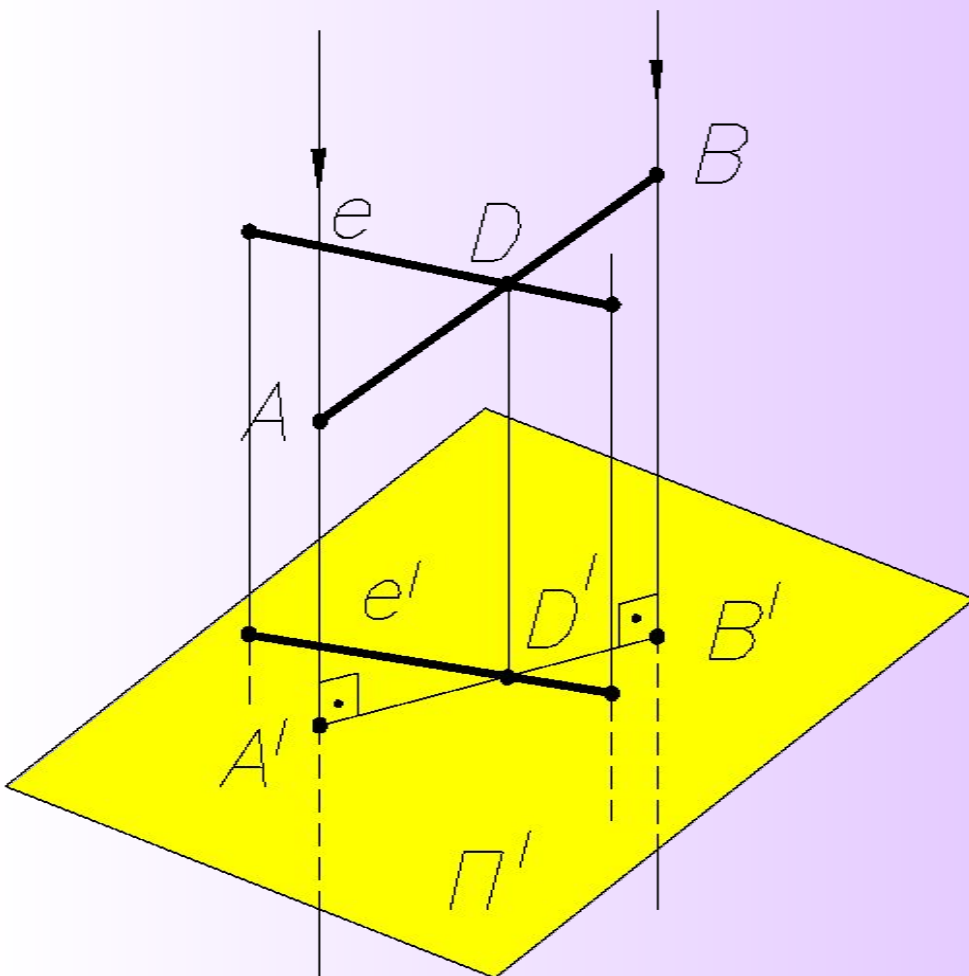
если точка принадлежит  
линии, то ее проекция  
принадлежит проекции  
данной линии,

$$C \in AB \Rightarrow C' \in A'B';$$





# Основные позиционные свойства ортогонального проектирования:



4.

проекцией точки пересечения  
двух прямых является  
точка пересечения проекций  
данных прямых;

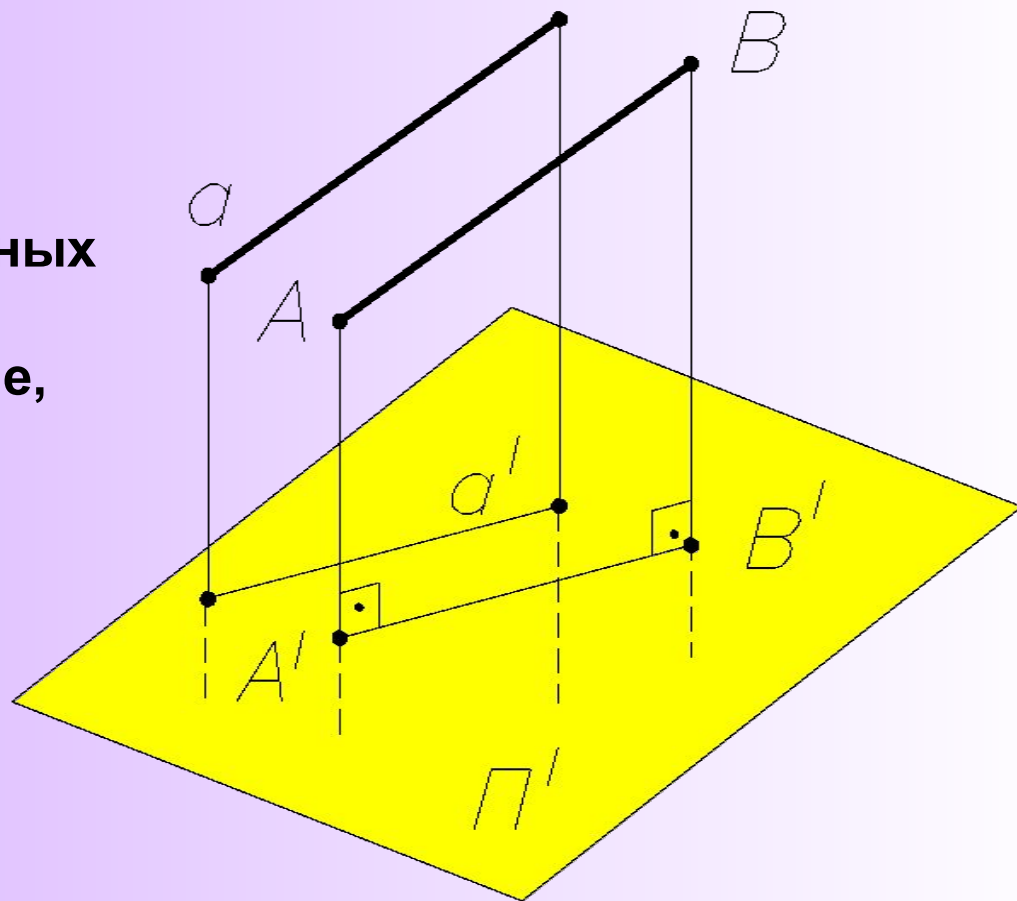
$$D = AB \times e \Rightarrow D' = A'B' \times e';$$

# Основные позиционные свойства ортогонального проецирования:

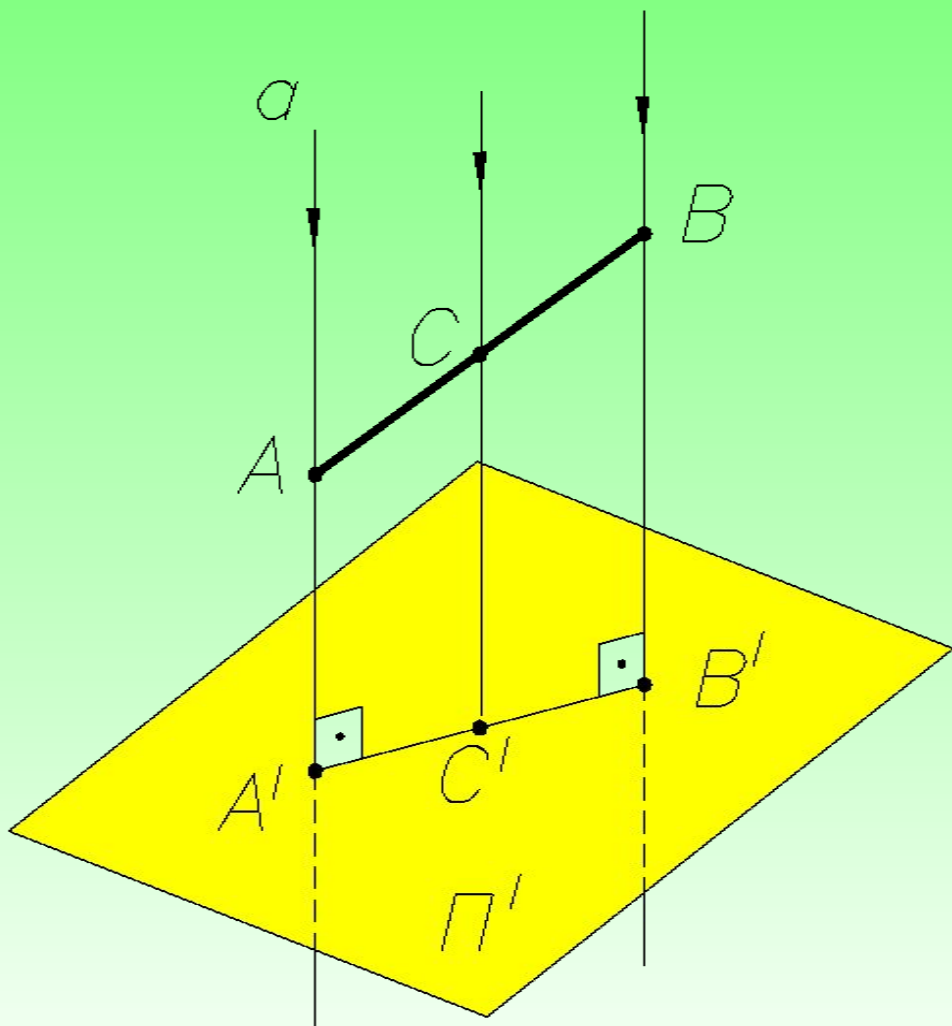
5.

проекциями двух параллельных  
прямых являются  
две параллельные прямые,

$$a \parallel AB \Rightarrow a' \parallel A'B';$$



# Метрические свойства ортогонального проецирования:



1.

Отношения между отрезками прямой равны соответствующим отношениям между их проекциями.

$$|AC| : |CB| = |A'C'| : |C'B'|$$

$$|AC| : |AB| = |A'C'| : |A'B'|$$

и т.д.

# Метрические свойства ортогонального проецирования:

## 2.

Длина отрезка равна длине его проекции, делённой на косинус угла наклона отрезка к плоскости проекций.

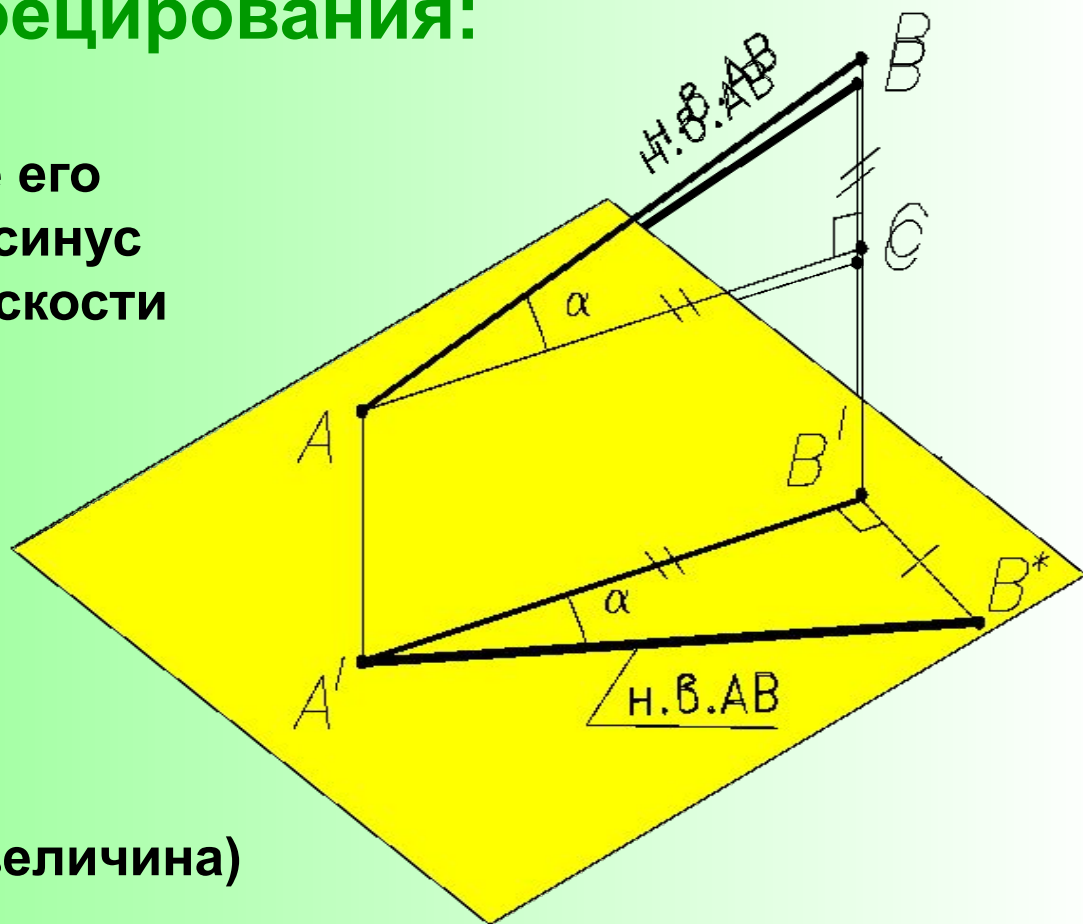
$$|AC| : |AB| = \cos a$$

или

$$|AB| = |A'B'| : \cos a,$$

$$\text{т. к. } |A'B'| = |AC|.$$

Отрезок  $AB$  (натуральная величина) является гипотенузой прямоугольного треугольника  $ABC$ , один катет которого является проекцией этого отрезка, а второй — приращением координат точек  $A$  и  $B$ .



Примечания:

если  $\alpha = 0^\circ$ , то  $|AB| = |A'B'|$ ;

если  $\alpha = 90^\circ$ , то  $|A'B'| = 0$ .

# Метрические свойства ортогонального проецирования:

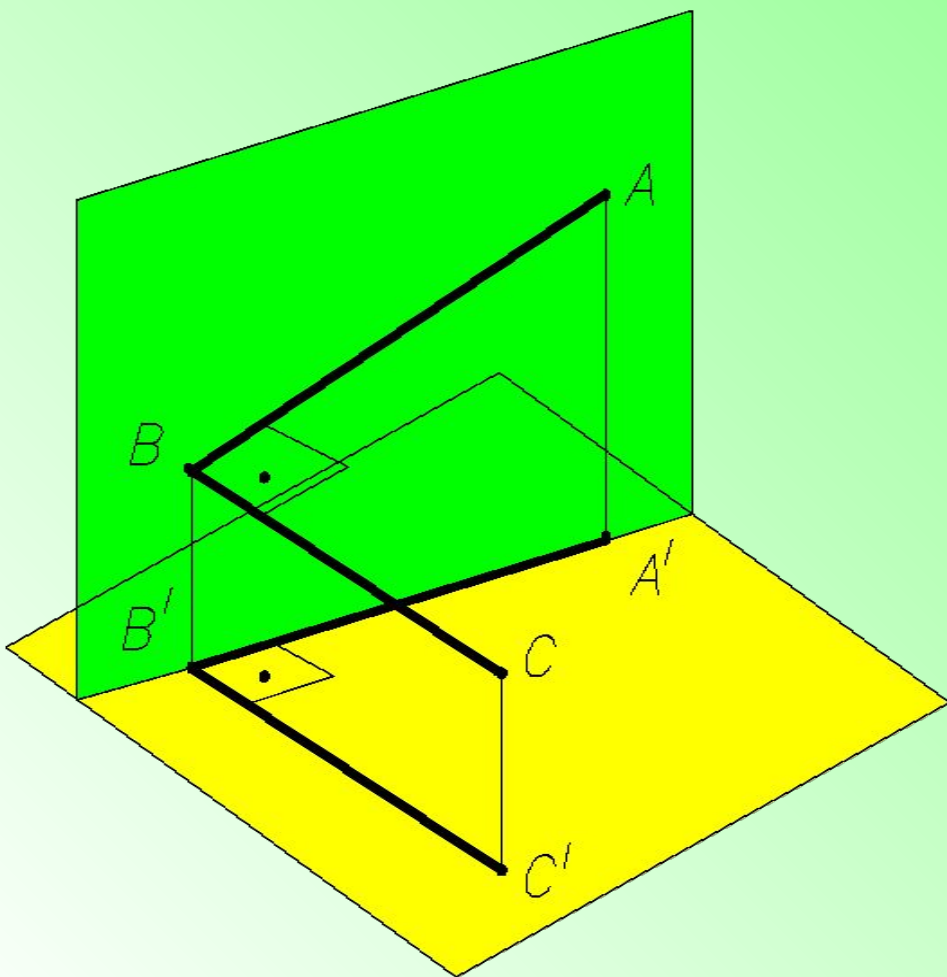
## 3.

Теорема о проецировании прямого угла:

Если хотя бы одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а вторая ей не перпендикулярна, то угол на эту плоскость проецируется в натуральную величину.

Обратная теорема:

Если прямой угол проецируется ортогонально в виде прямого угла, то он имеет сторону, расположенную параллельно плоскости проекций.



# Обратимость чертежа

Вышеприведенные чертежи называются **однокартинными**.

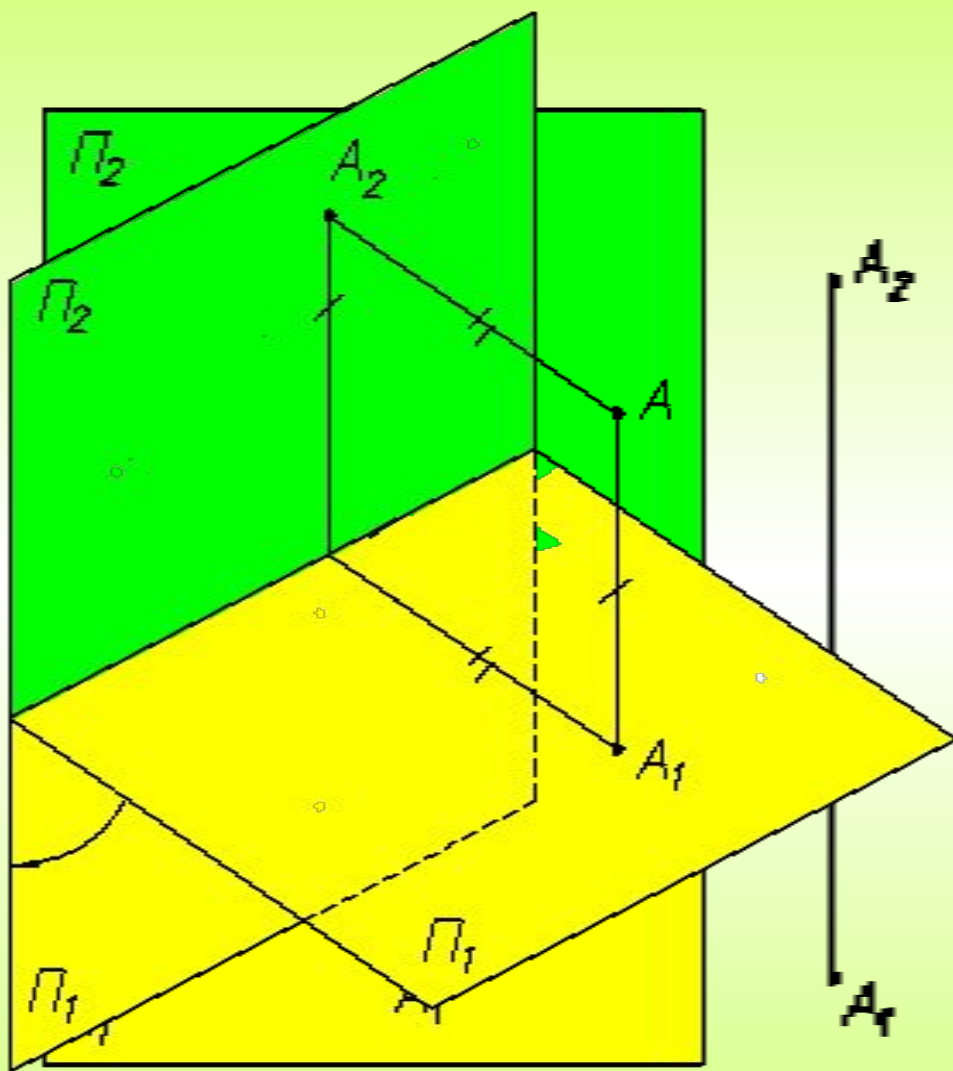
Рассмотренные методы проецирования позволяют однозначно решить прямую задачу – построить проекцию (чертеж) геометрического образа.

Обратная задача начертательной геометрии – по данному чертежу реконструировать геометрический образ – решается неоднозначно (может быть несколько или бесчисленное множество решений).

Из этого следует, что **однокартинный чертеж не обладает свойством обратимости**.

Проекционный чертеж становится обратимым при добавлении дополнительной информации (**введение второй плоскости проекции или числовой отметки, указывающей расстояние от точки в пространстве до плоскости проекций**).

# Образование комплексного чертежа точки.



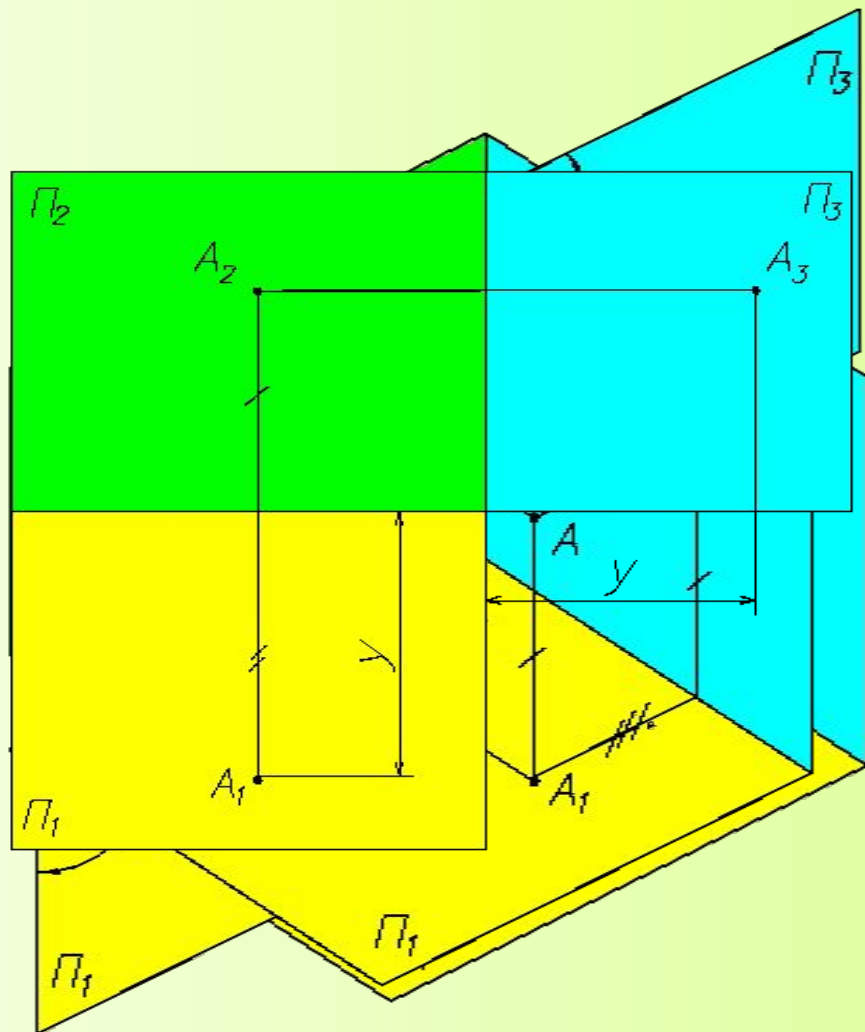
Данный чертеж называется **комплексным чертежом (К.Ч.)** точки  $A$ .

Комплексным чертежом называется чертеж, составленный из двух или более связанных между собой **ортогональных проекций** изображаемого геометрического образа.

Принцип образования: геометрический образ ортогонально проецируется минимум на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций, которые затем соответствующим образом совмещаются с одной плоскостью.

Если на К.Ч. заданы две проекции точки, можно утверждать, что **точка однозначно задана на К.Ч.**

# Образование комплексного чертежа точки.

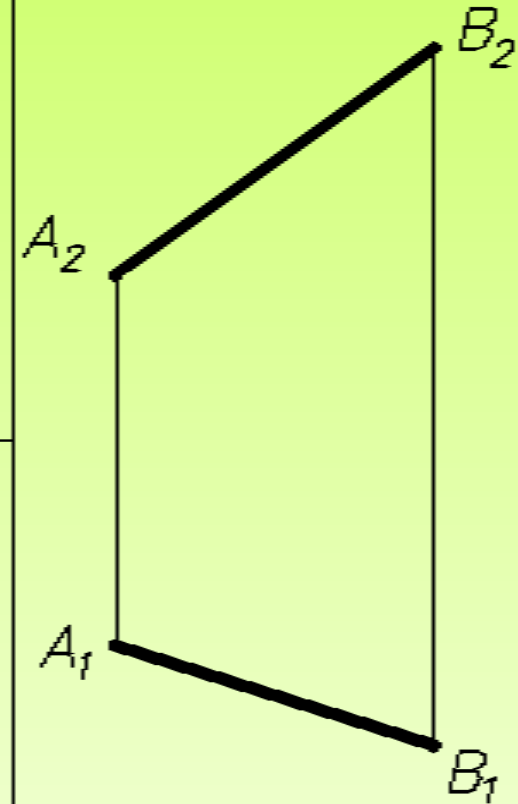
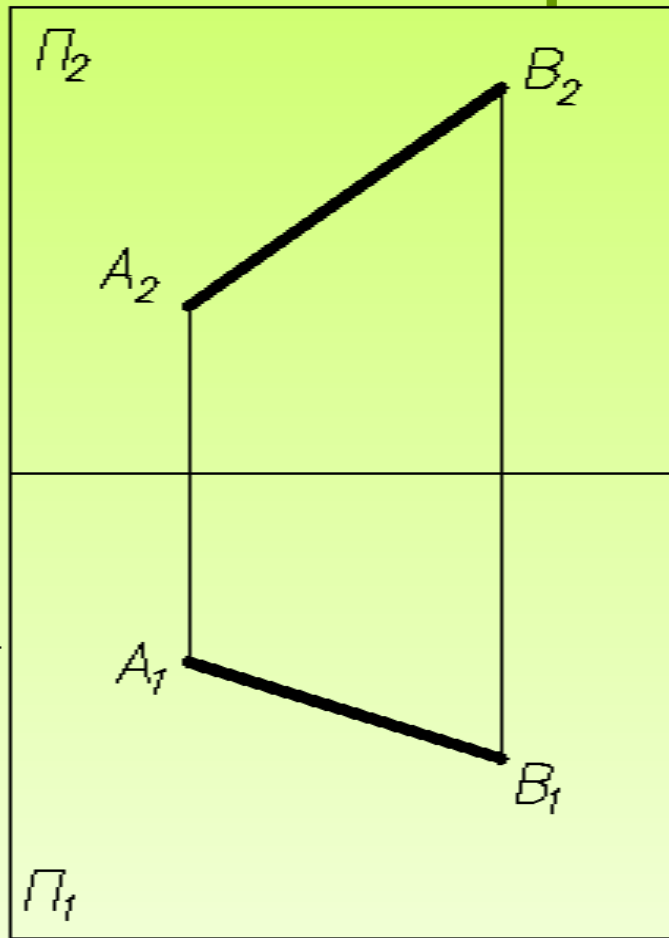
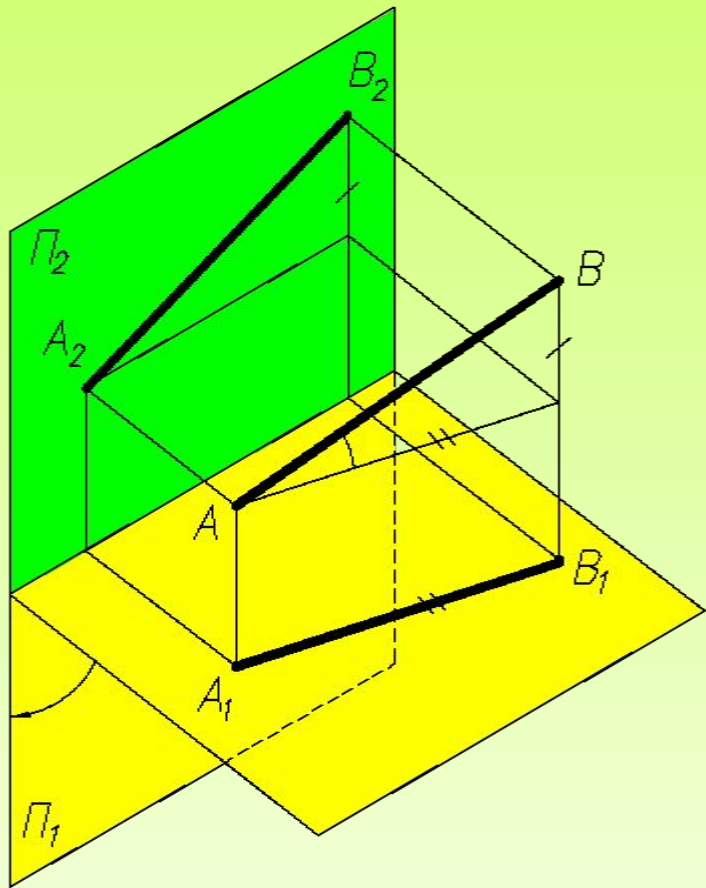


Условные обозначения:  
 $A, B, C, D, \dots$   $1, 2, 3, \dots$  и т.д. – точки в пространстве;  
 $\Pi_1$  ( $XOY$ ) – горизонтальная плоскость проекции;  
 $\Pi_2$  ( $XOZ$ ) – вертикальная (фронтальная) плоскость проекции;  
 $\Pi_3$  ( $YOZ$ ) – вертикальная (профильная) плоскость проекции;  
 $A_1$  – горизонтальная проекция точки  $A$  на плоскость  $\Pi_1$ ;  
 $A_2$  – фронтальная проекция точки  $A$  на плоскость  $\Pi_2$ .  
 $A_3$  – профильная проекция точки  $A$  на плоскость  $\Pi_3$ .  
 $A_1A_2, A_2A_3$  - линии связи.

Иногда проецирование осуществляется на три взаимно перпендикулярных плоскости проекций, и тогда они все совмещаются с одной.



# Образование комплексного чертежа линии.



Линия - это геометрический образ, сформированный последовательным перемещением точки.

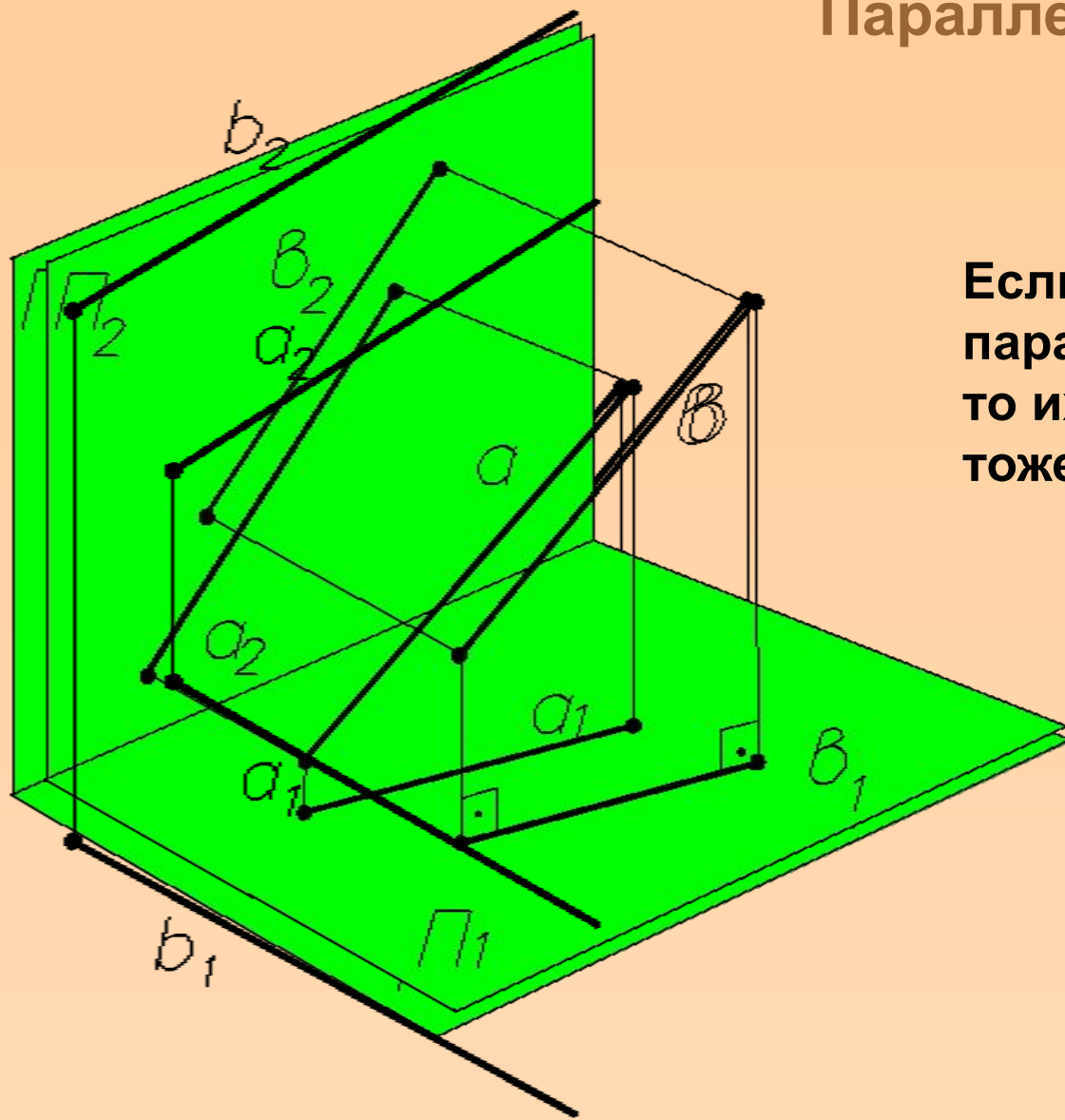
Линия – одномерный геометрический образ.

Обозначение линий – а, b, с, d ... и т.д.

Прямая однозначно задана на комплексном чертеже, если заданы две ее проекции.

# Взаимное расположение двух прямых.

## Параллельные прямые.

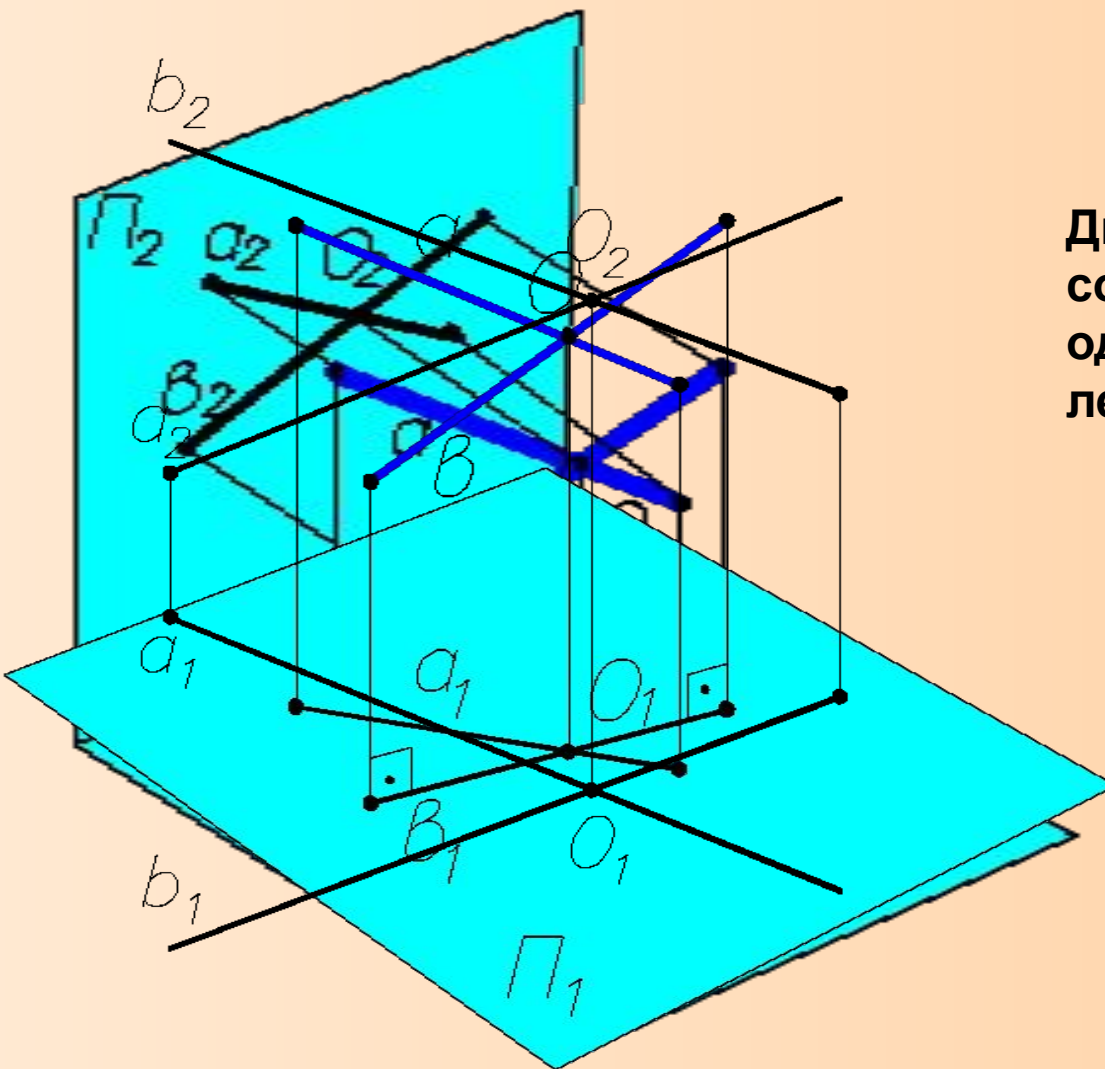


Если две прямые параллельны между собой, то их одноименные проекции тоже параллельны.

Если  $a \parallel b$ ,  
то  $a_1 \parallel b_1$  и  $a_2 \parallel b_2$ .

# Взаимное расположение двух прямых.

Пересекающиеся прямые.



Две прямые пересекаются между собой, если точки пересечения одноименных проекций прямых лежат на одной линии связи .

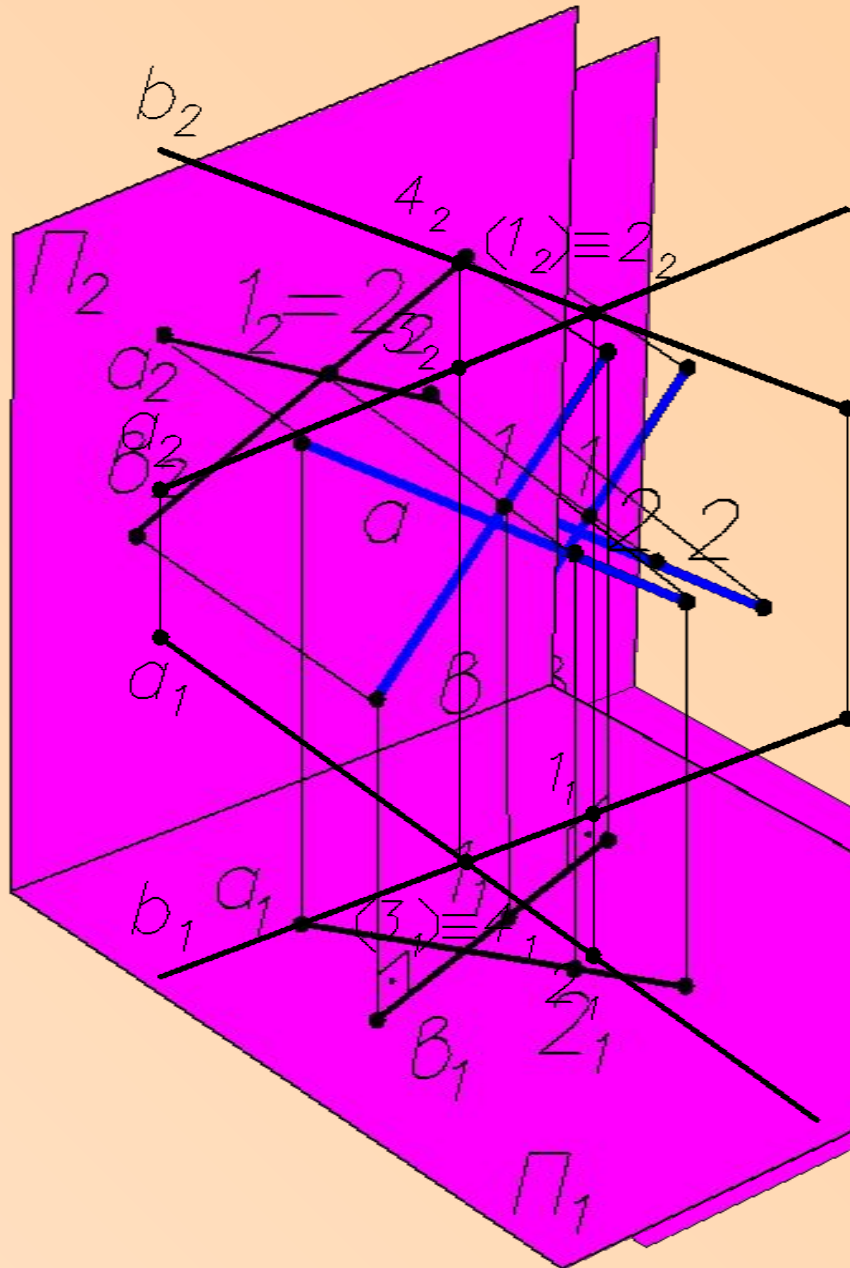
Если  $a \times b = O$ ,

то  $a_1 \times b_1 = O_1$

и  $a_2 \times b_2 = O_2$

# Взаимное расположение двух прямых.

Скрещивающиеся прямые  
(не имеют общих точек).



Две прямые скрещиваются между собой, если точки пересечения их одноименных проекций лежат на разных линиях связи

$$a \div b$$

Точки 1 и 2, 3 и 4 –  
конкурирующие точки.

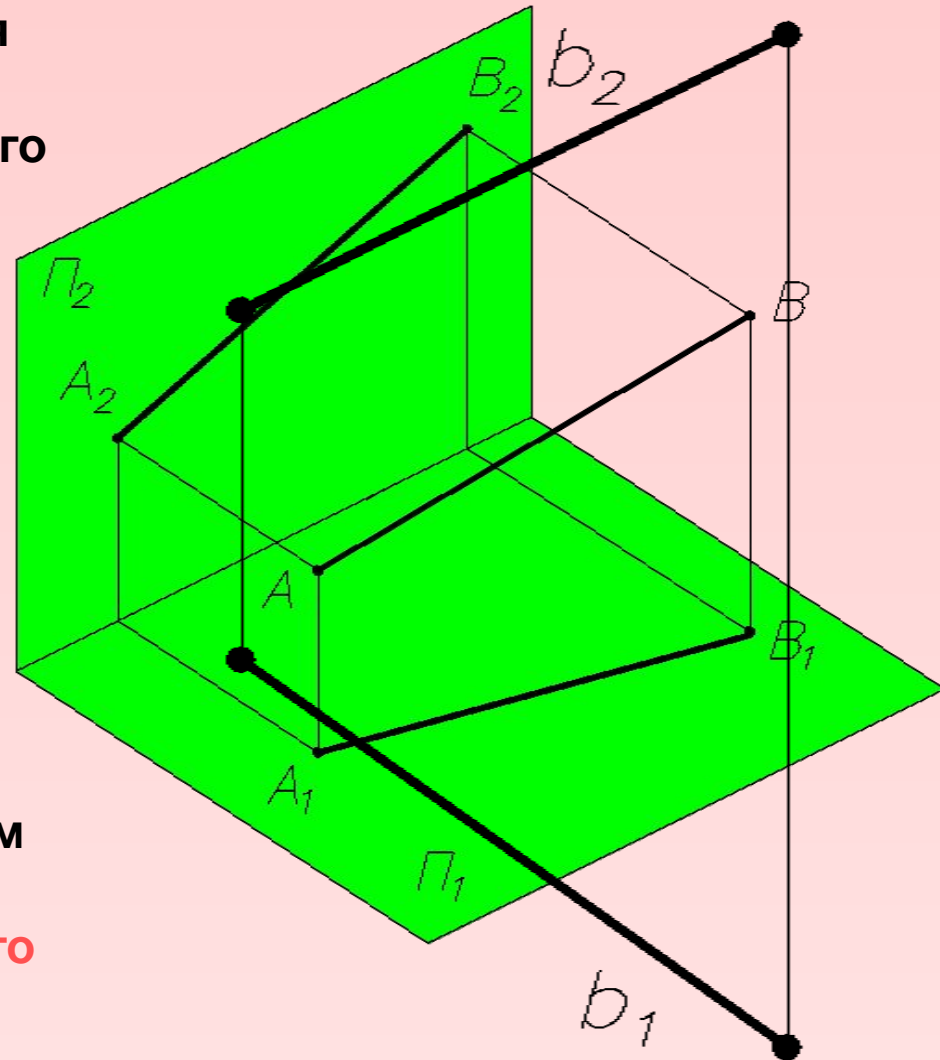
Конкурирующие точки –  
Точки, лежащие на одной  
Проецирующей прямой.

# Положение прямых линий относительно плоскостей проекций.

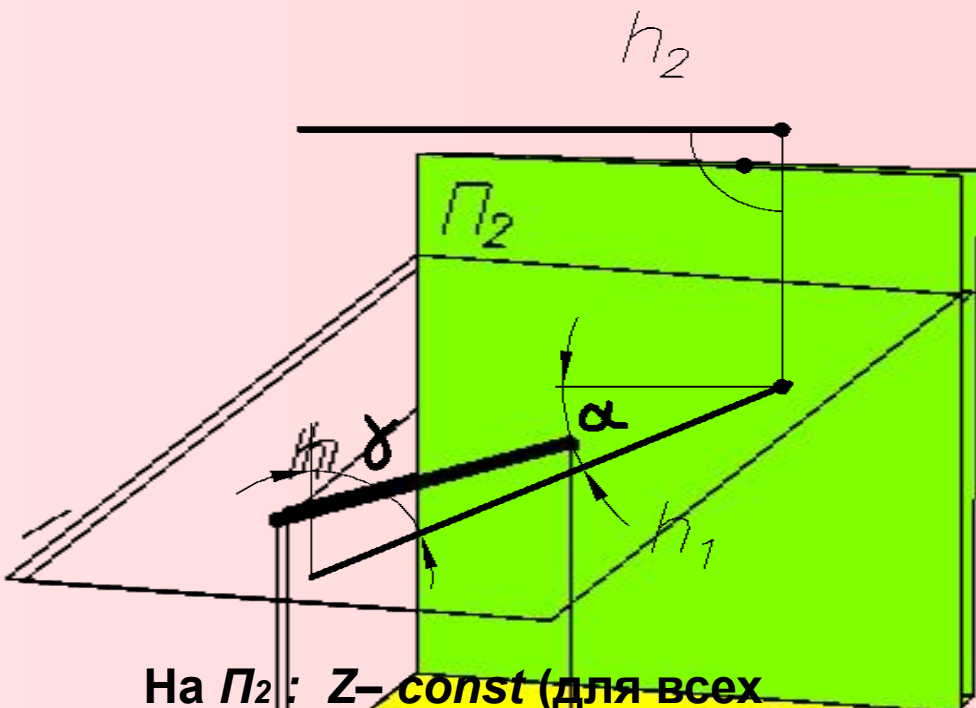
В зависимости от своего положения относительно плоскостей проекций прямые разделяют на прямые общего положения и прямые частного положения.

**Прямая общего положения** – прямая, которая имеет углы, отличные от  $0^\circ$  и  $90^\circ$  одновременно со всеми тремя плоскостями проекции ( $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$ ).

Прямые, параллельные плоскостям проекций или перпендикулярные к ним, называются **прямыми частного положения**.



## Прямые частного положения. Линии уровня.



На  $\Pi_2$ :  $Z = \text{const}$  (для всех точек линии).

На  $\Pi_1$ :  $h_1 = h$ ,  $h_1$  - натуральная величина прямой  $h$ .

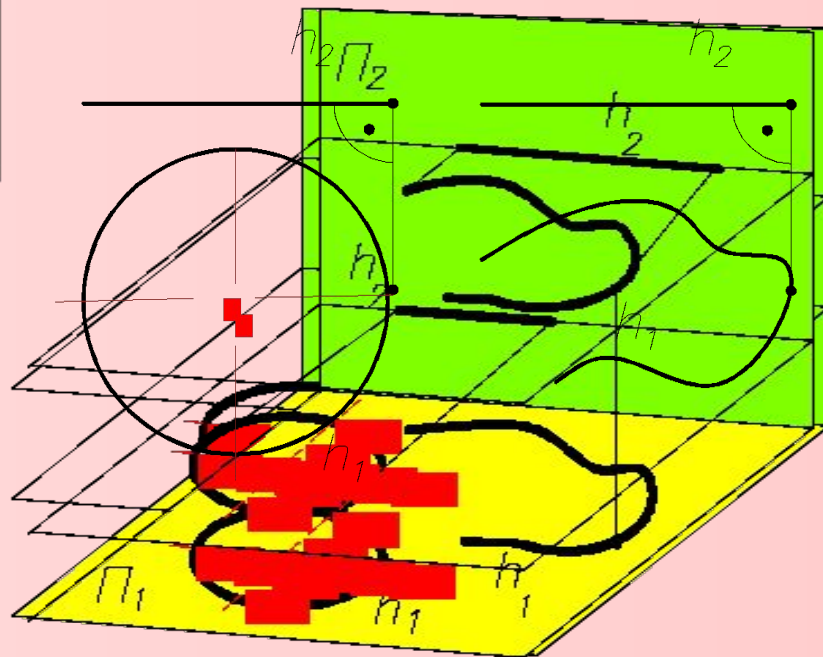
$\alpha$  - угол наклона прямой  $h$  к плоскости  $\Pi_2$ ,  $h_1$

$\gamma$  - угол наклона прямой  $h$  к плоскости  $\Pi_1$ .

**Горизонталь** – линия, все точки которой имеют одинаковую координату  $Z$  (аппликата).

Горизонталь параллельна горизонтальной плоскости проекций.

Обозначение горизонтали  $h$  ( $h \parallel \Pi_1$ ).

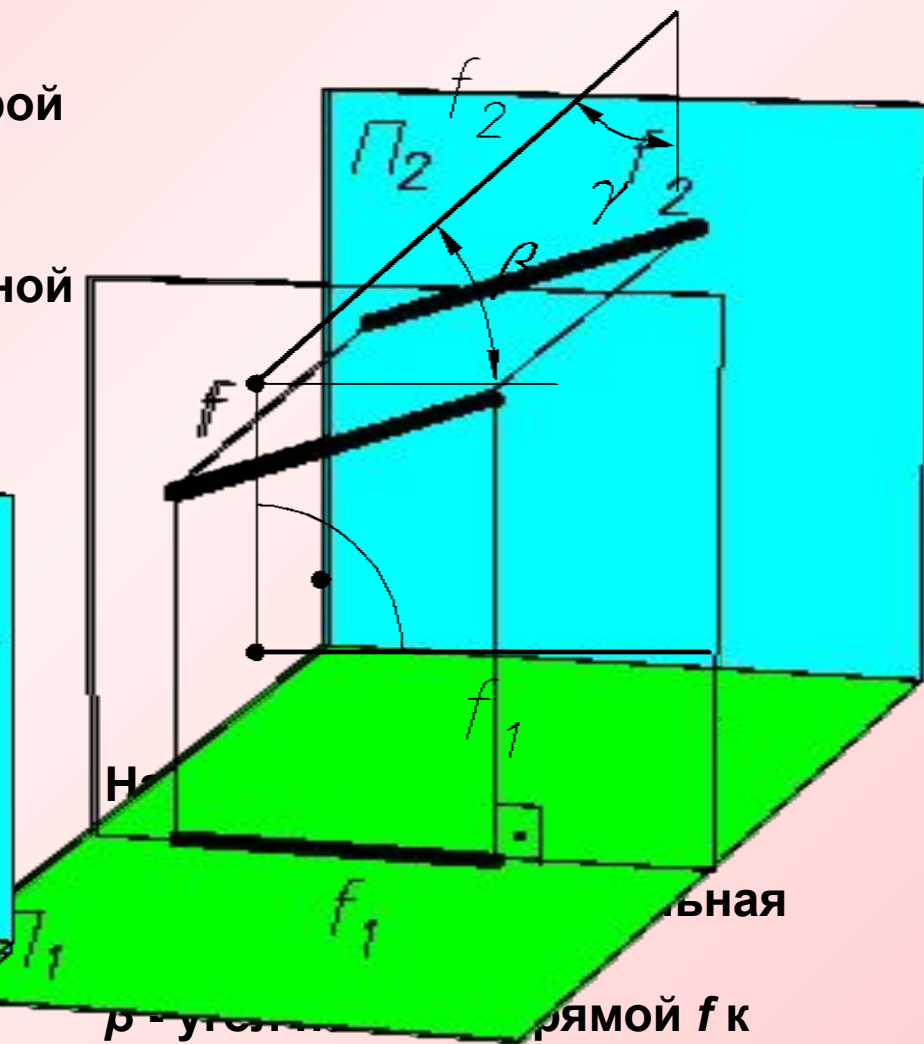
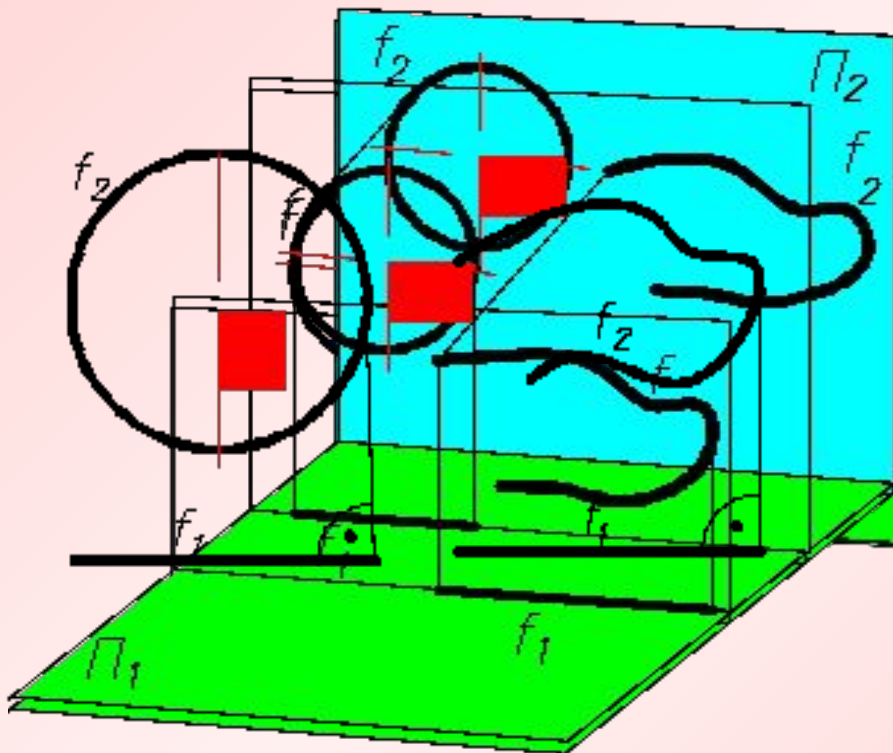


## Прямые частного положения. Линии уровня.

**Фронталь** – линия, все точки которой имеют одинаковую координату  $Y$  (ордината).

Фронталь параллельна фронтальной плоскости проекций.

Обозначение фронтали  $f$  ( $f \parallel \Pi_2$ ).



$\rho$  – угол наклона прямой  $f$  к плоскости  $\Pi_1$ ,  
 $\gamma$  – угол наклона прямой  $f$  к плоскости  $\Pi_3$ .

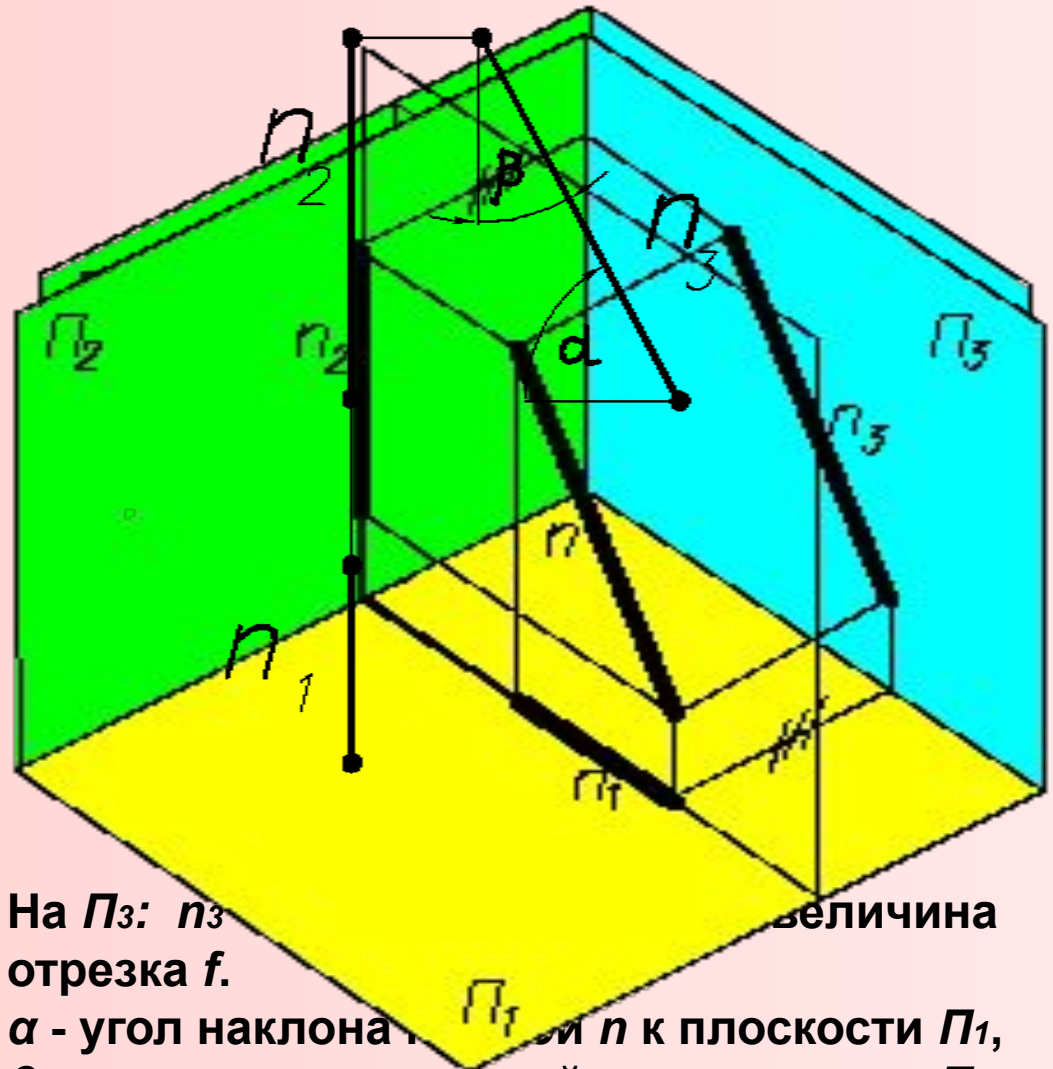
## Прямые частного положения. Линии уровня.

Профильная линия – линия, все точки которой имеют одинаковую координату  $X$  (абсцисса)

Профильная линия параллельна профильной плоскости проекций.

Обозначим профильную линию буквой  $n$  ( $n \parallel \Pi_3$ ).

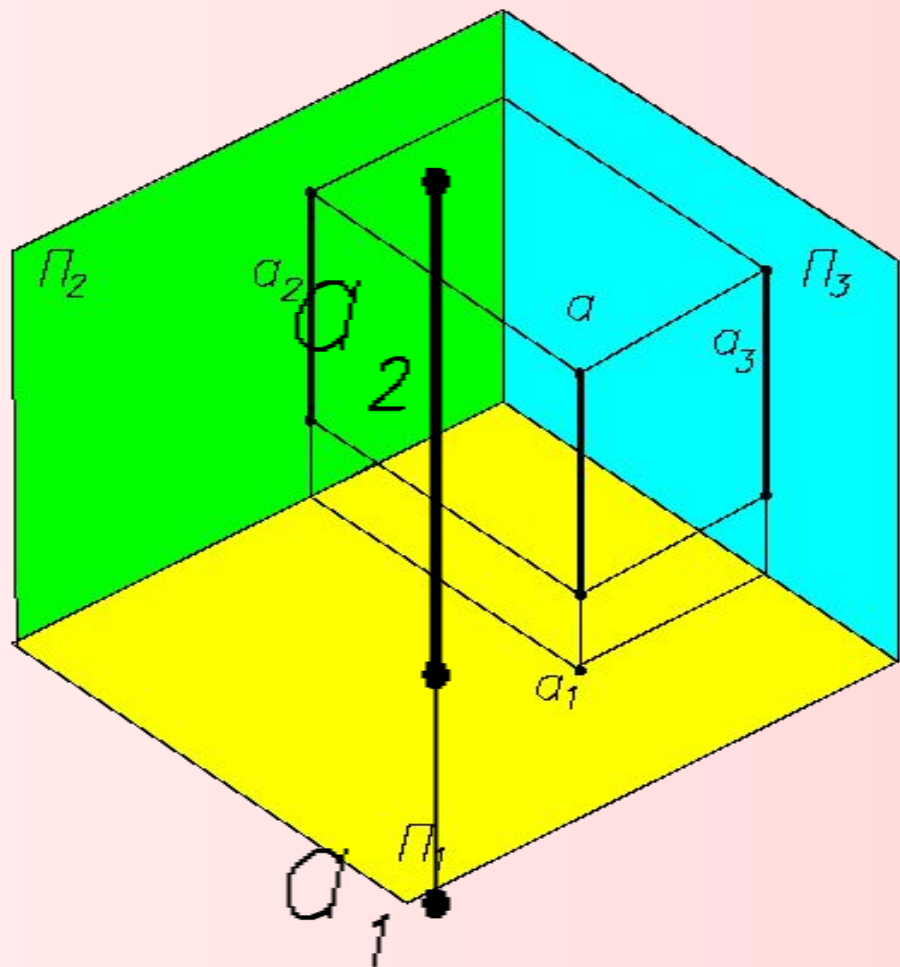
На  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  проекции профильной прямой  $n$  совпадают с линией связи. Для описания профильной линии (прямой) на комплексном чертеже необходимо вводить профильную плоскость проекций  $\Pi_3$ .



На  $\Pi_3$ :  $n_3$  – проекция прямой  $n$  на плоскости  $\Pi_3$ ,  $f$  – величина отрезка  $f$ .  
 $\alpha$  – угол наклона прямой  $n$  к плоскости  $\Pi_1$ ,  
 $\beta$  – угол наклона прямой  $n$  к плоскости  $\Pi_2$ .



## Прямые частного положения. Проецирующие прямые.



**Горизонтально-проецирующая прямая** – линия, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций.

Горизонтально-проецирующая прямая параллельна фронтальной и профильной плоскостям проекций.

Обозначим горизонтально-проецирующую прямую  $a$  ( $a \perp \Pi_1$ ).

На  $\Pi_1$  горизонтально-проецирующая прямая проецируется в точку (теряет одно измерение).

На  $\Pi_2$ :  $a_2 = a$ ,  
 $a_2$  – натуральная величина.

# Прямые частного положения. Проецирующие прямые.

## Фронтально-проецирующая прямая

– линия, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций

Фронтально-проецирующая прямая параллельна горизонтальной и профильной плоскости проекций.

Обозначим фронтально-проецирующую прямую  $b$  ( $b \perp \Pi_1$ ).

На  $\Pi_2$  фронтально-проецирующая прямая проецируется в точку (теряет одно измерение).

На  $\Pi_1$ :  $b_1 = b$ ,  
 $b_1$  – натуральная величина.

