

Геометрия Лобачевского

Подготовил ученик
4 класса «Б»
Габель Сергей

Геометрия Лобачевского

Геометрия Лобачевского (гиперболическая геометрия) — одна из неевклидовых геометрий, геометрическая теория, основанная на тех же основных посылаках, что и обычная евклидова геометрия, за исключением аксиомы о параллельных, которая заменяется на аксиому о параллельных Лобачевского.

- Евклидова аксиома о параллельных (точнее, одно из эквивалентных ей утверждений) гласит:
- Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не более одной прямой, лежащей с данной прямой в одной плоскости и не пересекающей её.
- В геометрии Лобачевского, вместо неё принимается следующая аксиома:
- Через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие её.
- Широко распространено заблуждение, что в геометрии Лобачевского параллельные прямые пересекаются. Геометрия Лобачевского имеет обширные применения как в математике, так и в физике. Историческое и философское её значение состоит в том, что её построением Лобачевский показал возможность геометрии, отличной от евклидовой, что знаменовало новую эпоху в развитии геометрии, математики и науки вообще.

История



Попытки доказательства пятого постулата

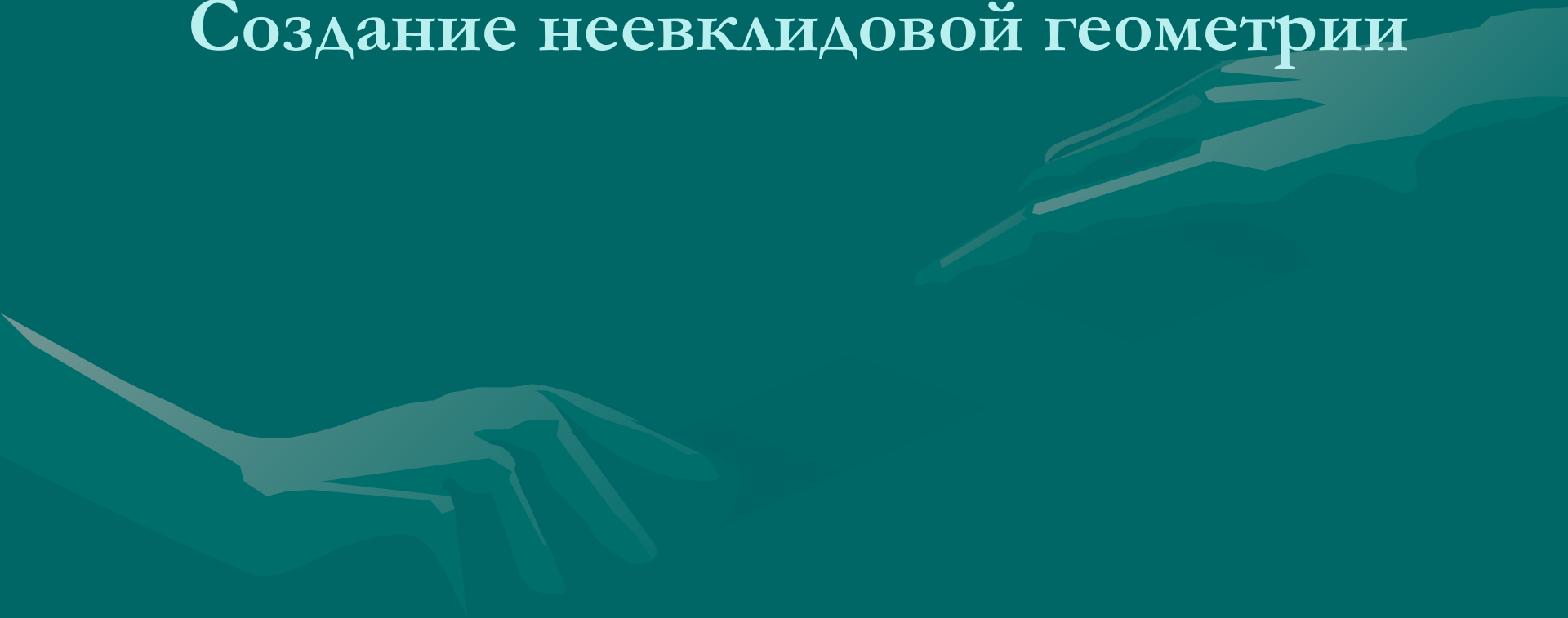


- Отправным пунктом геометрии Лобачевского послужил V постулат Евклида — аксиома, эквивалентная аксиоме о параллельных. Он входил в список постулатов в «Началах» Евклида. Относительная сложность и неинтуитивность его формулировки вызвала ощущение его вторичности и порождала попытки вывести его как теорему из остальных постулатов Евклида.
- Среди многих пытавшихся доказать пятый постулат были, в частности, следующие крупные учёные.
- Древнегреческие математики Птолемей (II в.) и Прокл (V в.) (основывался на предположении о конечности расстояния между двумя параллельными).
- Ибн аль-Хайсам из Ирака (конец X — начало XI вв.) (основывался на предположении, что конец движущегося перпендикуляра к прямой описывает прямую линию).
- Иранские математики Омар Хайям (2-я половина XI — начало XII вв.) и Насир ад-Дин ат-Туси (XIII в.) (основывались на предположении, что две сходящиеся прямые не могут при продолжении стать расходящимися без пересечения).
- Первую в Европе известную нам попытку доказательства аксиомы параллельности Евклида предложил живший в Провансе (Франция) Герсонид (он же Леви бен Гершом, XIV век). Его доказательство опиралось на утверждение о существовании прямоугольника

- Немецкий математик Клавиус (1574).
- Итальянские математики
 - Катальди (впервые в 1603 году напечатал работу, целиком посвященную вопросу о параллельных).
 - Борелли (1658), Дж. Витале (1680).
- Английский математик Валлис (1663, опубликовано в 1693) (основывался на предположении, что для всякой фигуры существует ей подобная, но не равная фигура).
- Французский математик Лежандр (1800) (основывался на допущении, что через каждую точку внутри острого угла можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла; у него также были другие попытки доказательства).

- При этих попытках доказательства пятого постулата математики вводили (явно или неявно) некоторое новое утверждение, казавшееся им более очевидным.
- Были предприняты попытки использовать доказательство от противного:
- итальянский математик Саккери (1733) (сформулировав противоречащее постулату утверждение, он вывел ряд следствий и, ошибочно признав часть из них противоречивыми, он счёл постулат доказанным),
- немецкий математик Ламберт (около 1766, опубликовано в 1786) (проведя исследования, он признал, что не смог обнаружить в построенной им системе противоречия). Наконец, стало возникать понимание о том, что возможно построение теории, основанной на противоположном постулате:
- немецкие математики Швейкарт (1818) и Тауринус (1825) (однако они не осознали, что такая теория будет логически столь же стройной).

Создание неевклидовой геометрии

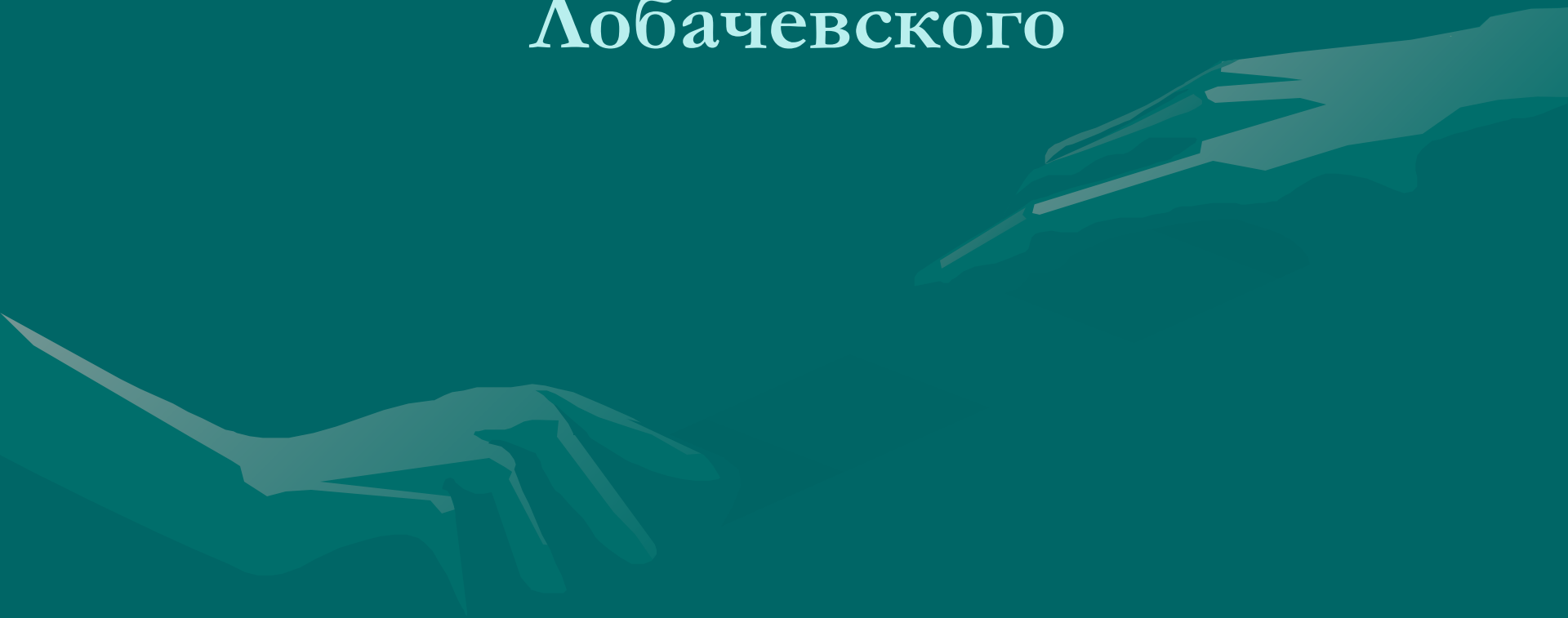


- Лобачевский в работе «О началах геометрии» ([1829](#)), первой его печатной работе по неевклидовой геометрии, ясно заявил, что V постулат не может быть доказан на основе других посылок евклидовой геометрии, и что допущение постулата, противоположного постулату Евклида, позволяет построить геометрию столь же содержательную, как и евклидова, и свободную от противоречий.
- Одновременно и независимо к аналогичным выводам пришёл [Янош Бойяи](#), а [Карл Фридрих Гаусс](#) пришёл к таким выводам ещё раньше. Однако труды Бойяи не привлекли внимания, и он вскоре оставил эту тему, а Гаусс вообще воздерживался от публикаций, и о его взглядах можно судить лишь по нескольким письмам и дневниковым записям. Например, в письме [1846 года](#) астроному [Г. Х. Шумахеру](#) Гаусс так отозвался о работе Лобачевского:

- Это сочинение содержит в себе основания той геометрии, которая должна была бы иметь место и притом составляла бы строго последовательное целое, если бы евклидова геометрия не была бы истинной... Лобачевский называет ее «воображаемой геометрией»; Вы знаете, что уже 54 года (с 1792 г.) я разделяю те же взгляды с некоторым развитием их, о котором не хочу здесь упоминать; таким образом, я не нашёл для себя в сочинении Лобачевского ничего фактически нового. Но в развитии предмета автор следовал не по тому пути, по которому шёл я сам; оно выполнено Лобачевским мастерски в истинно геометрическом духе. Я считаю себя обязанным обратить Ваше внимание на это сочинение, которое, наверное, доставит Вам совершенно исключительное наслаждение. [3]

- В итоге Лобачевский выступил как первый наиболее яркий и последовательный пропагандист новой геометрии. Хотя геометрия Лобачевского развивалась как умозрительная теория, и сам Лобачевский называл её «воображаемой геометрией», тем не менее именно он впервые открыто предложил её не как игру ума, а как возможную и полезную теорию пространственных отношений. Однако доказательство её непротиворечивости было дано позже, когда были указаны её интерпретации (модели).

Утверждение геометрии Лобачевского



- Лобачевский умер в 1856 году. Спустя несколько лет была опубликована переписка Гаусса, в том числе несколько восторженных отзывов о геометрии Лобачевского, и это привлекло внимание к трудам Лобачевского. Появляются переводы их на французский и итальянский языки, комментарии видных геометров. Публикуется и труд Бойяи.
- В 1868 году выходит статья Э. Бельтрами об интерпретациях геометрии Лобачевского. Бельтрами определил метрику плоскости Лобачевского и доказал, что она имеет всюду постоянную отрицательную кривизну. Такая поверхность тогда уже была известна — это псевдосфера Миндинга. Бельтрами сделал вывод, что локально плоскость Лобачевского изометрична участку псевдосферы (см. ниже). Окончательно непротиворечивость геометрии Лобачевского была доказана в 1871 году, после появления модели Клейна.
- Вейерштрасс посвящает геометрии Лобачевского специальный семинар в Берлинском университете (1870). Казанское физико-математическое общество организует издание полного собрания сочинений Лобачевского, а в 1893 году столетие русского математика отмечается в международном масштабе.

Модели



- Итальянский математик Э. Бельтрами в 1868 году заметил, что геометрия на куске плоскости Лобачевского совпадает с геометрией на поверхностях постоянной отрицательной кривизны, простейший пример которых представляет псевдосфера. Если точкам и прямым на конечном куске плоскости Лобачевского сопоставлять точки и кратчайшие линии (геодезические) на псевдосфере и движению в плоскости Лобачевского сопоставлять перемещение фигуры по псевдосфере с изгибанием, то есть деформацией, сохраняющей длины, то всякой теореме геометрии Лобачевского будет отвечать факт, имеющий место на псевдосфере. При этом длины, углы, площади понимаются в смысле естественного измерения их на псевдосфере.
- Однако здесь даётся только локальная интерпретация геометрии, то есть на ограниченном участке, а не на всей плоскости Лобачевского.



KOHEU