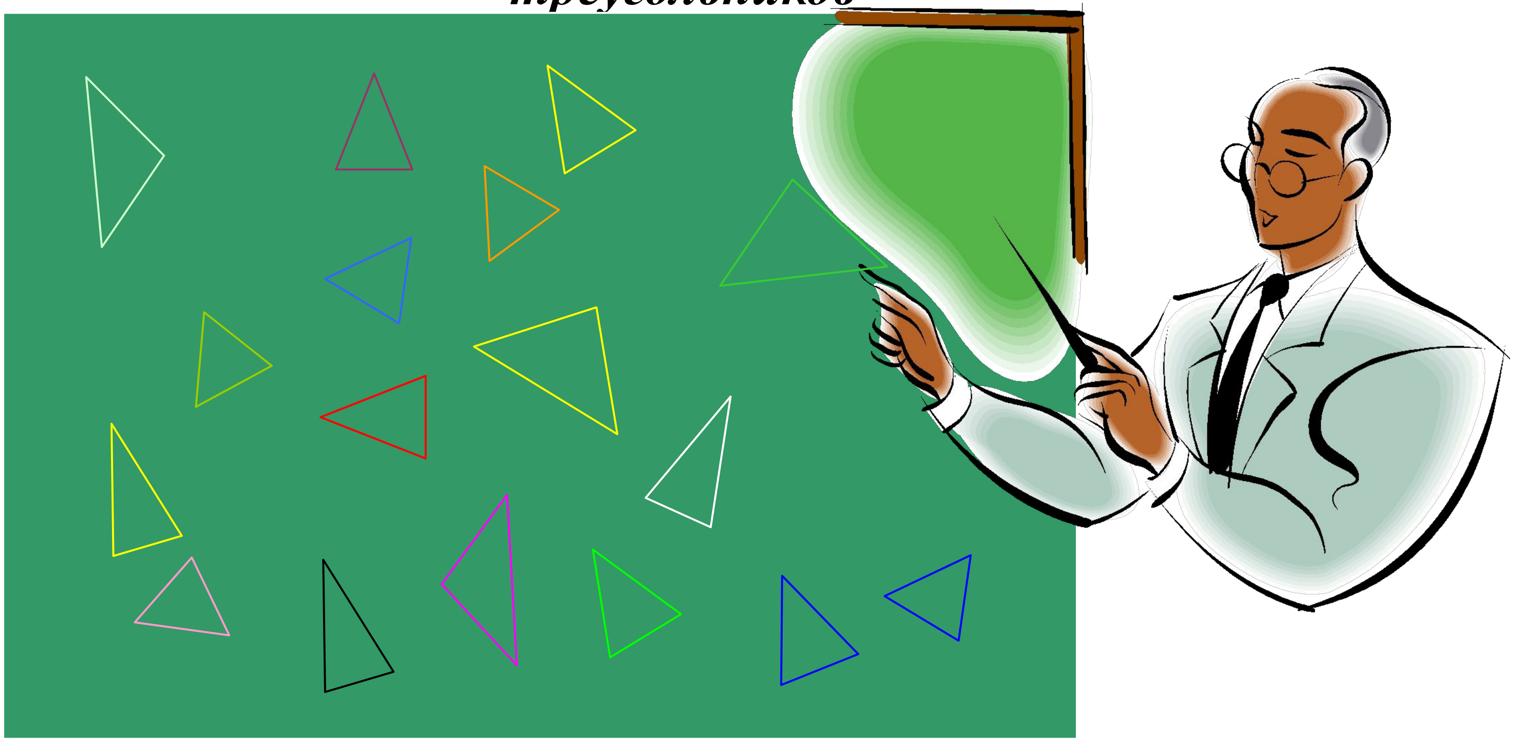
Школьное научное общество
школы №1131

Новые признаки равенства треугольников



Автор: Жабин Виктор, Бобков Сергей.
Научный руководитель: Кузнецова Т. Н.

2004 г.

г. Москва

Содержание:

ВВЕДЕНИЕ

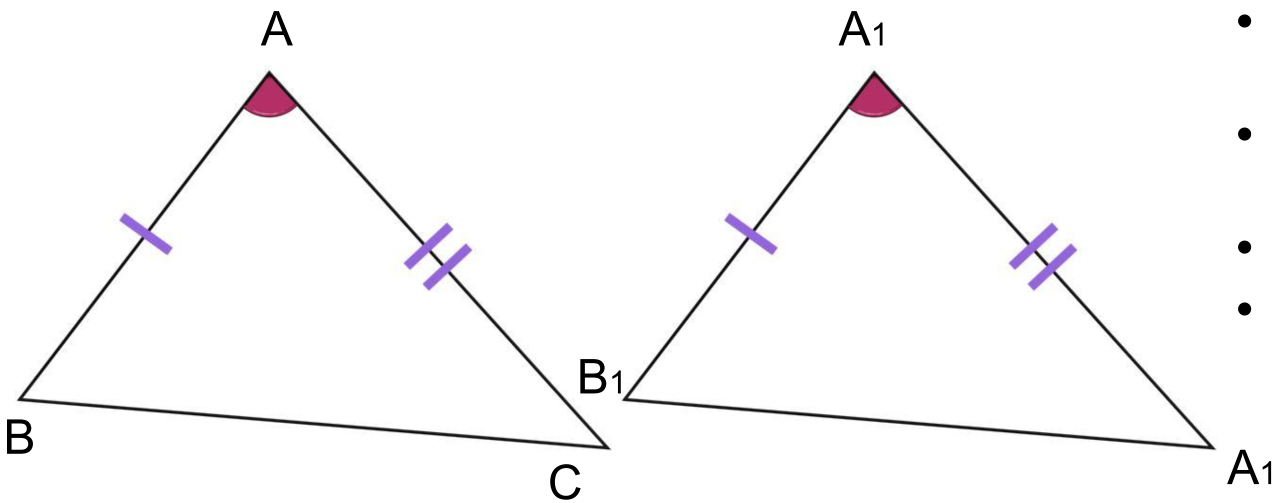
В начало

- В курсе геометрии 7 класса изучаются 3 признака равенства треугольников, которые позволяют решать определённый тип задач. Мы решили расширить теоретическую базу по признакам равенства треугольников, добавив к сторонам и углам, используемым в классических признаках равенства треугольников, другие компоненты: биссектрису, медиану и высоту.
- Таким образом, целями нашей работы является:
- 1. Сформулировать новые признаки равенства треугольников, используя понятия: биссектрисы, медианы и высоты.
- 2. Доказать новые признаки равенства треугольников.
- 3. Продемонстрировать другим учащимся существование в математике «белых пятен» и возможности их доказательства.

ТЕОРИЯ

В начало

Теорема: Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



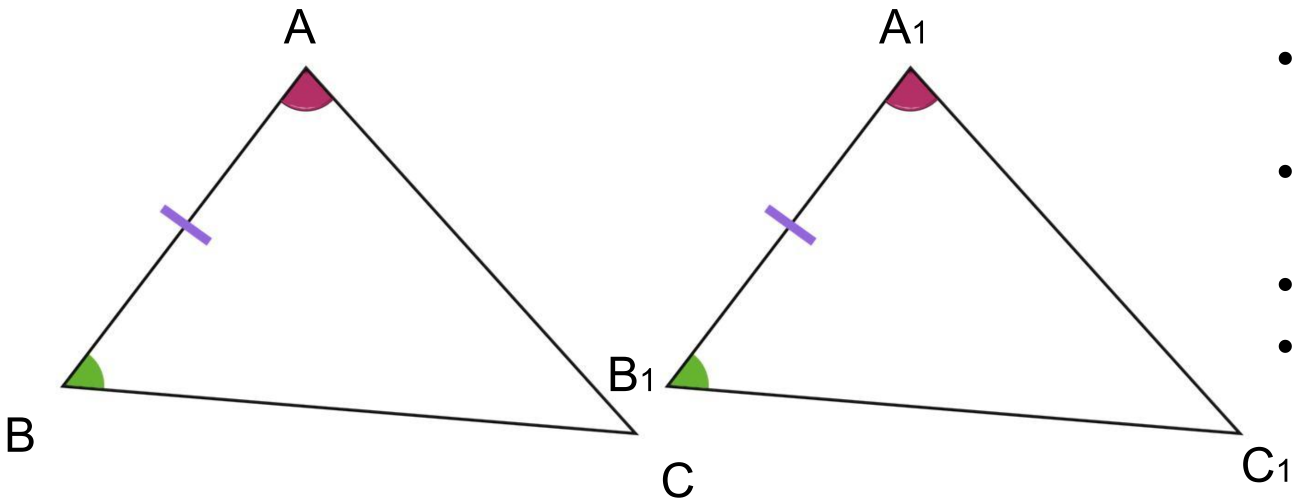
- Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$
- $\angle A=\angle A_1$; $AC=A_1C_1$;
- $AB=A_1B_1$
- Доказать: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

1) т. к. $\angle A=\angle A_1$, то ΔABC можно наложить на $\Delta A_1B_1C_1$ так, что вершина A совместится с вершиной A_1, а AB и AC наложатся соответственно на лучи A_1B_1 и A_1C_1. Поскольку $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, то AB совместится с A_1B_1, а AC – с A_1C_1; совместятся точки B и B_1, C и C_1=> $BC=B_1C_1$=> $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$

В начало

Теорема: Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



- Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$
- $\angle B=\angle B_1$; $\angle A=\angle A_1$;
- $AB=A_1B_1$
- Доказать: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

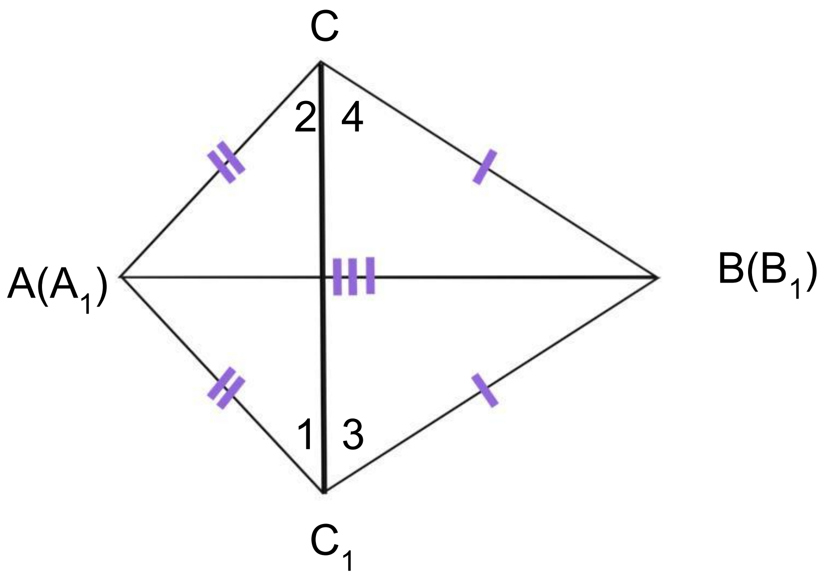
1) наложим ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, что вершина A совместилась с вершиной A_1, AB с A_1B_1, а вершины C и C_1 оказались по одну сторону от A_1B_1

2) так как $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, то сторона AC наложится на луч A_1C_1=>вершина C – общая точка сторон AC и BC – окажется лежащей на луче A_1C_1 и луче B_1C_1=>$\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$

ч. т. д.

В начало

Теорема: Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.



- Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$
- $CB=C_1B_1$; $AC=A_1C_1$; $AB=A_1B_1$
- Доказать: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

1) Приложим ΔABC к $\Delta A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилася с вершиной A_1, а вершина B – с B_1, а вершины C и C_1 окзались по разные стороны от прямой A_1B_1

2) Так как $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$=> ΔA_1C_1C и ΔB_1C_1C р/б => $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$ (по признаку р/б Δ)=> $\angle A_1CB_1=\angle A_1C_1B_1$

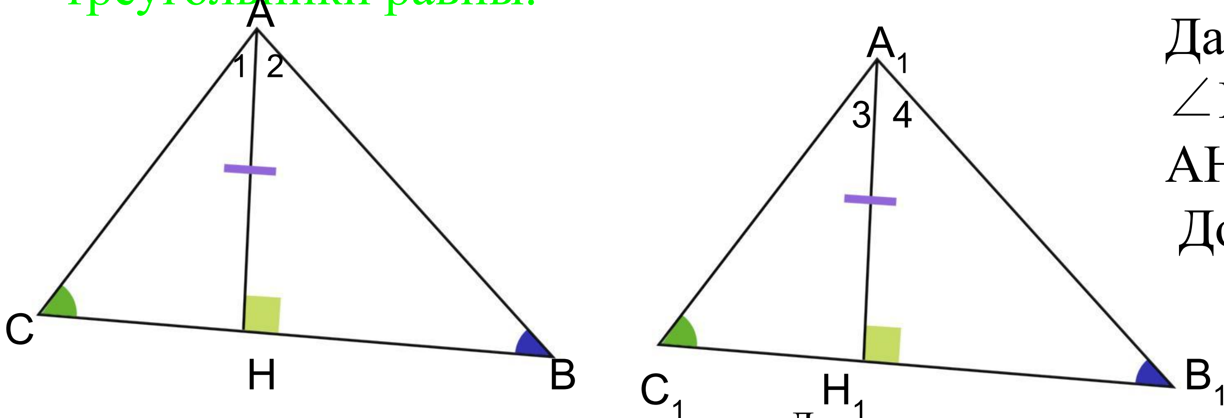
3) Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$:

$$\left.\begin{array}{l} A_1C_1=AC \text{ (по усл.)} \\ C_1B_1=CB \text{ (по усл.)} \\ \angle C=\angle C_1 \text{ (п.2)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1 \text{ (по двум сторонам и углу между ними)}$$

В начало

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ СВЯЗАННЫЕ С ВЫСОТОЙ

Теорема: Если два угла и высота, проведённая из вершины третьего угла, одного треугольника соответственно равны двум углам и высоте, проведённой из вершины третьего угла, другого треугольника, то такие треугольники равны.



Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$

$\angle B=\angle B_1$; $\angle C=\angle C_1$;

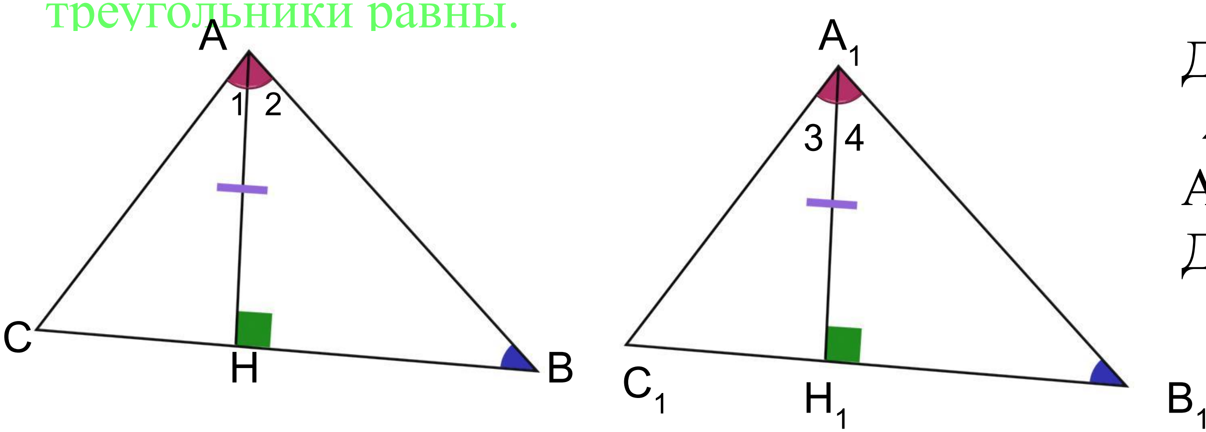
$AH=A_1H_1$ (высота)

Доказать: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$

- Доказательство:

- 1) Рассмотрим ΔABH и $\Delta A_1B_1H_1$:
- $\angle B=\angle B_1$ (по усл.)
- $\angle H=\angle H_1=90^0$ (по усл.) $\Rightarrow \Delta ABH=\Delta A_1B_1H_1$ (кпу) $\Rightarrow AB=A_1B_1$; $\angle 1=\angle 3$
- $AH=A_1H_1$ (по усл.)
- 2) Рассмотрим ΔAHC и $\Delta A_1H_1C_1$:
- $AH=A_1H_1$ (по усл.)
- $\angle C=\angle C_1$ (по усл.) $\Rightarrow \Delta AHC=\Delta A_1H_1C_1$ (кпу) $\Rightarrow AC=A_1C_1$; $\angle 2=\angle 4$
- $\angle H=\angle H_1=90^0$ (по усл.)
- 3) $\angle 1=\angle 3$ (п.1)
- $\angle 2=\angle 4$ (п.2) $\Rightarrow \angle A=\angle A_1$
- 4) Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$:
- $AB=A_1B_1$ (п.1)
- $AC=A_1C_1$ (п.2) $\Rightarrow \Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними)
- $\angle A=\angle A_1$ (п.3)

Теорема: Если два угла и высота, проведённая из вершины одного из них, одного треугольника соответственно равны двум углам и высоте, проведённой из вершины одного из них, другого треугольника, то такие треугольники равны.



Дано: ΔABC и $\Delta A1B1C1$

$\angle B=\angle B_1$; $\angle A=\angle A_1$;

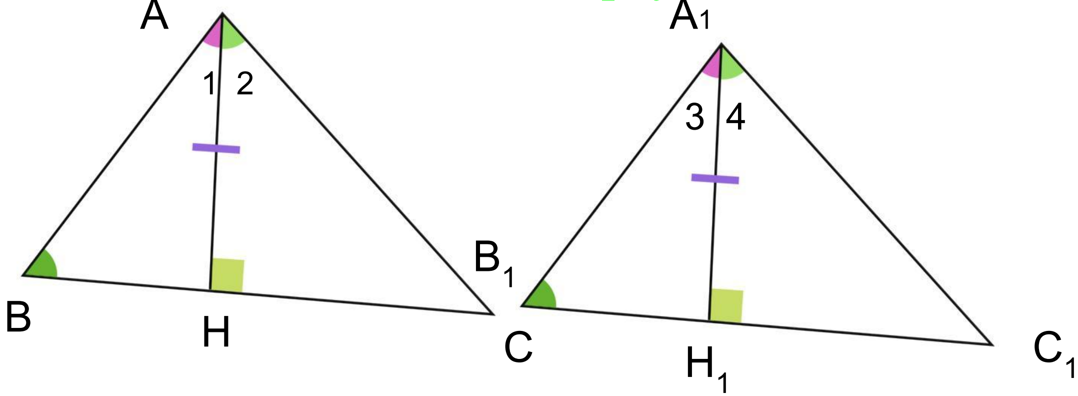
$AH=A_1H_1$ (высота)

Доказать: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$

- Доказательство:

- 1) Рассмотрим ΔABH и $\Delta A_1B_1H_1$:
- $\angle B=\angle B_1$ (по усл.)
- $\angle H=\angle H1=900$ (по усл.) $\Rightarrow \Delta ABH=\Delta A_1B_1H_1$ (кпу) $\Rightarrow AB=A_1B_1$; $\angle 1=\angle 3$
- $AH=A_1H_1$ (по усл.)
- $\Rightarrow \angle 2=\angle 4$
- $\angle A=\angle A_1$ (по усл.)
- $\angle 1=\angle 3$ (п.1)
- Рассмотрим ΔAHC и $\Delta A_1H_1C_1$:
- $AH=A_1H_1$(по усл.)
- $\angle 2=\angle 4$ (по п.2) $\Rightarrow \Delta AHC=\Delta A_1H_1C_1$(кпу) $\Rightarrow AC=A_1C_1$
- $\angle H=\angle H1=900$ (по усл.)
- Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$:
- $AB=A_1B_1$(п.1)
- $AC=A_1C_1$ (п.2) $\Rightarrow \Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними)
- $\angle A=\angle A_1$ (по усл.)

Теорема: Если высота и два прилежащих к ней острых угла одного треугольника соответственно равны высоте и двум прилежащим к ней острым углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



- Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$
- $\angle 1 = \angle 3$; $\angle 2 = \angle 3$;
- $AH = A_1H_1$ (высота)
- Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

1) Рассмотрим ΔABH и $\Delta A_1B_1H_1$:

$\angle 1 = \angle 3$ (по усл.)
$\angle H = \angle H_1 = 90^0$ (по усл.)
$AH = A_1H_1$ (по усл.)
$\Rightarrow \Delta ABH = \Delta A_1B_1H_1$ (кпу) $\Rightarrow AB = A_1B_1$

2) Рассмотрим ΔAHC и $\Delta A_1H_1C_1$:

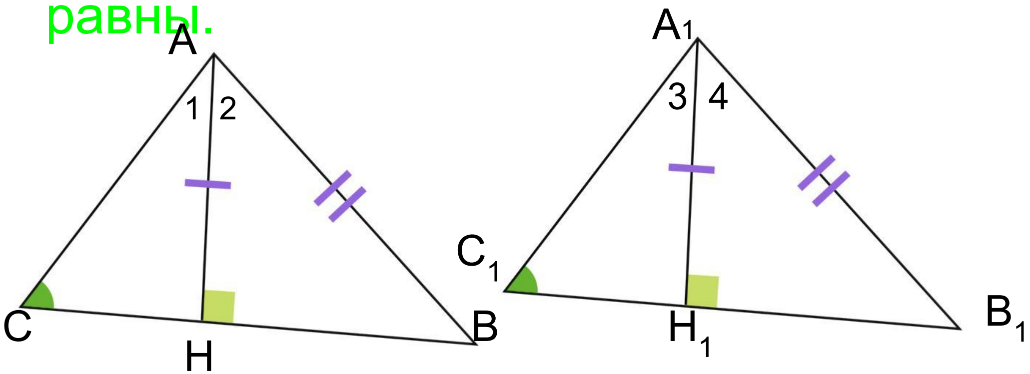
$AH = A_1H_1$ (по усл.)
$\angle 2 = \angle 4$ (по усл.)
$\angle H = \angle H_1 = 90^0$ (по усл.)
$\Rightarrow \Delta AHC = \Delta A_1H_1C_1$ (кпу) $\Rightarrow AC = A_1C_1$

3) $\angle 1 = \angle 3$ (по усл.)
$\angle 2 = \angle 4$ (по усл.)
$\Rightarrow \angle A = \angle A$

4) Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$:

$AB = A_1B_1$ (п.1)
$AC = A_1C_1$ (п.2)
$\angle A = \angle A_1$ (п.3)
$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними)

Теорема: Если сторона, противолежащий угол и высота, проведённая не из вершины данного угла, одного треугольника соответственно равны стороне, противолежащему углу и высоте, проведённой не из вершины данного угла, то такие треугольники равны.



- Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$
- $\angle 1=\angle 3$; $\angle 2=\angle 3$;
- $AH=A_1H_1$ (высота)
- Доказать: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

1) Рассмотрим ΔABH и $\Delta A_1B_1H_1$:

$AB=A_1B_1$ (по усл.)
$\angle H=\angle H_1=90^0$ (по усл.)
$AH=A_1H_1$ (по усл.)
$\Rightarrow \Delta ABH=\Delta A_1B_1H_1$ (гик) $\Rightarrow \angle 1=\angle 3$

2) Рассмотрим ΔAHC и $\Delta A_1H_1C_1$:

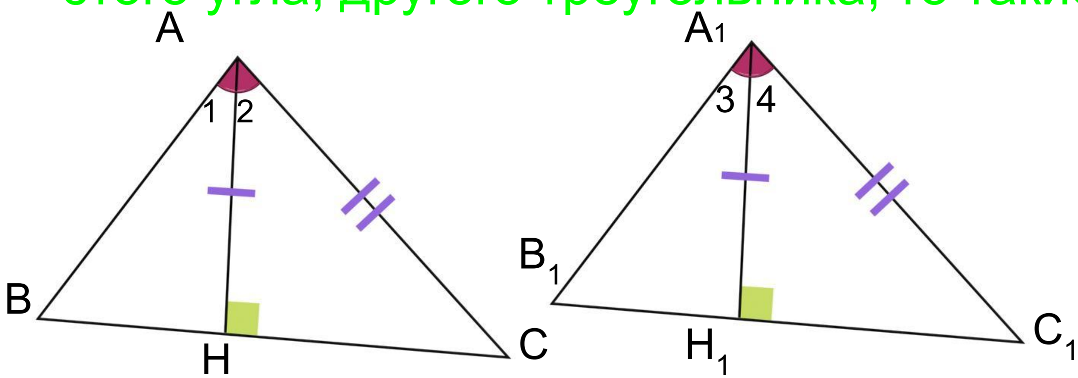
$AH=A_1H_1$ (по усл.)
$\angle C=\angle C_1$ (по усл.)
$\angle H=\angle H_1=90^0$ (по усл.)
$\Rightarrow \Delta AHC=\Delta A_1H_1C_1$ (кпу) $\Rightarrow AC=A_1C_1$; $\angle 2=\angle 4$

3) $\angle 1=\angle 3$ (п.1)
$\angle 2=\angle 4$ (п.2)
$\Rightarrow \angle A=\angle A$

4) Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$:

$AB=A_1B_1$ (по усл.)
$AC=A_1C_1$ (п.2)
$\angle A=\angle A_1$ (п.3)
$\Rightarrow \Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними)

Теорема: Если сторона, прилежащий угол и высота, проведённая из вершины этого угла, одного треугольника соответственно равны стороне, прилежащему углу и высоте, проведённой из вершины этого угла, другого треугольника, то такие треугольники равны.



- Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$
- $AB=A_1B_1$; $\angle A=\angle A_1$;
- $AH=A_1H_1$ (высота)
- Доказать: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

1) Рассмотрим ΔABH и $\Delta A_1B_1H_1$:

$AB=A_1B_1$ (по усл.)
$\angle H=\angle H_1=90^0$ (по усл.) $\Rightarrow \Delta ABH=\Delta A_1B_1H_1$ (гик) $\Rightarrow \angle 1=\angle 3$
$AH=A_1H_1$ (по усл.)

2) $\angle A=\angle A_1$ (по усл.)
$\angle 1=\angle 3$ (п.1) $\Rightarrow \angle 2=\angle 4$

3) Рассмотрим ΔAHC и $\Delta A_1H_1C_1$:

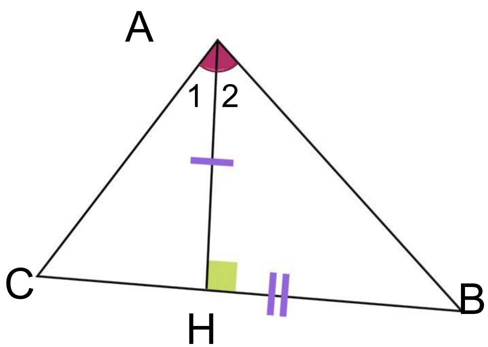
$AH=A_1H_1$ (по усл.)
$\angle 2=\angle 4$ (п.2) $\Rightarrow \Delta AHC=\Delta A_1H_1C_1$ (кпу) $\Rightarrow AC=A_1C_1$
$\angle H=\angle H_1=90^0$ (по усл.)

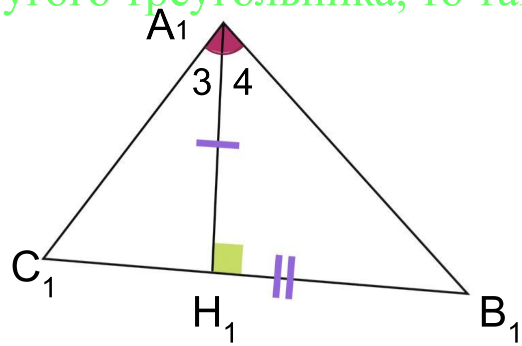
4) Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$:

$AB=A_1B_1$ (по усл.)
$AC=A_1C_1$ (п.3) $\Rightarrow \Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними)
$\angle A=\angle A_1$ (по усл.)

В начало

Теорема: Если угол, высота, проведённая из вершины этого угла, и проекция прилежащей к этому углу стороны одного треугольника соответственно равны углу, высоте, проведённой из вершины этого угла, и проекции прилежащей к этому углу стороны другого треугольника, то такие треугольники равны.





- Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$
- $BH=B_1H_1$; $\angle A=\angle A1$;
- $AH=A_1H_1$ (высота)
- Доказать: $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

1) Рассмотрим ΔABH и $\Delta A_1B_1H_1$:

$BH=B_1H_1$ (по усл.)
$\angle H=\angle H_1=90^0$ (по усл.)
$AH=A_1H_1$ (по усл.)
$\Rightarrow \Delta ABH=\Delta A_1B_1H_1$ (гик) $\Rightarrow AB=A_1B_1$; $\angle 1=\angle 3$

2) $\angle A=\angle A_1$ (по усл.)
$\angle 1=\angle 3$ (п.1)
$\Rightarrow \angle 2=\angle 4$

3) Рассмотрим ΔAHC и $\Delta A_1H_1C_1$:

$AH=A_1H_1$ (по усл.)
$\angle 2=\angle 4$ (п.2)
$\angle H=\angle H_1=90^0$ (по усл.)
$\Rightarrow \Delta AHC=\Delta A_1H_1C_1$ (кпу) $\Rightarrow AC=A_1C_1$

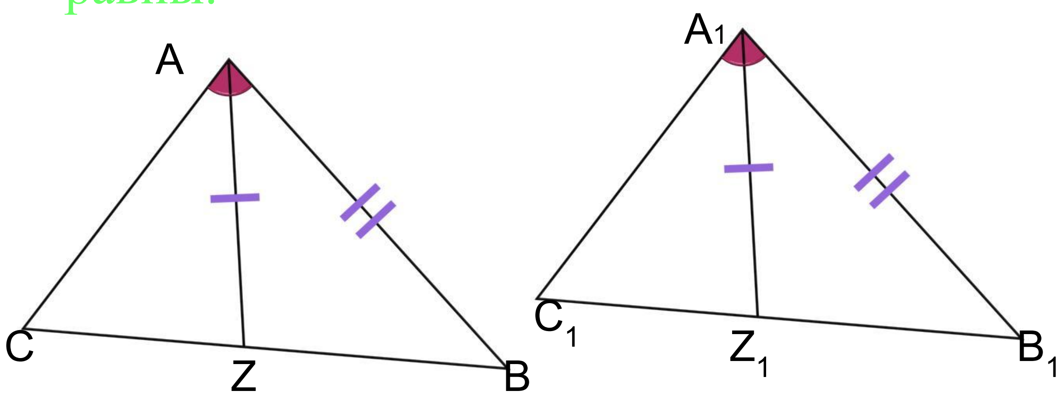
4) Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$:

$AB=A_1B_1$ (п.1)
$AC=A_1C_1$ (п.3)
$\angle A=\angle A_1$ (по усл.)
$\Rightarrow \Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними)

В начало

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ СВЯЗАННЫЕ С БИССЕКТРИСОЙ

Если в одном треугольнике угол, прилежащая сторона и выходящая из него биссектриса соответственно равны углу, прилежащей стороне и выходящей из него биссектрисе в другом треугольнике, то треугольники равны.



- Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$
  $\angle A = \angle A_1$
- $AZ = A_1Z_1$ - биссектрисы
  $AB = A_1B_1$
- Доказать:
- $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

1.Рассмотрим ΔAZB и $\Delta A_1Z_1B_1$:

$AB = A_1B_1$ (по условию)
$AZ = A_1Z_1$ (по условию)
$\angle BAZ = \angle B1A1Z1$ (по условию)

$\Rightarrow \Delta AZB = \Delta A_1Z_1B_1$ (по двум сторонам углу между ними) $\Rightarrow \angle CZA = \angle C_1Z_1A_1$

2.Рассмотрим ΔAZC и $\Delta A_1Z_1C_1$:

$\angle CAZ = \angle C_1A_1Z_1$ (по условию)
$AZ = A_1Z_1$ (по условию)
$\angle CZA = \angle C_1Z_1A_1$ (п.1)

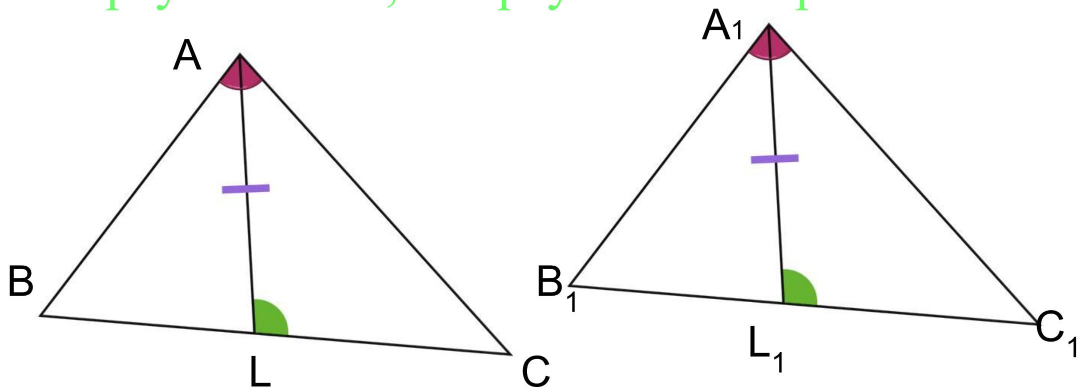
$\Rightarrow \Delta AZC = \Delta A_1Z_1C_1$ (по стороне и двум прилежащим углам)

3. Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$

$\angle A = \angle A_1$ (по условию)
$AB = A_1B_1$ (по условию)
$AC = A_1C_1$ (п.2)

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними)

Если в одном треугольнике угол, выходящая из него биссектриса и угол между биссектрисой и стороной соответственно равны углу, выходящей из него биссектрисе углу между биссектрисой и стороной в другом треугольнике, то треугольники равны.



- Дано:
  ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$
  $AL=A_1L_1$ – биссектрисы
- $\angle A = \angle A_1$
  $\angle ALC = \angle A_1L_1C_1$
- Доказать:
  $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

1. Рассмотрим ΔALC и $\Delta A_1L_1C_1$:

$\left.\begin{array}{l} AL=A_1L_1 \text{ (по условию)} \\ \angle LAC = \angle L_1A_1C_1 \text{ (по условию)} \\ \angle ALC = \angle A_1L_1C_1 \text{ (по условию)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ALC=\Delta A_1L_1C_1 \Rightarrow \angle ALB=\angle A_1L_1B_1$

2. Рассмотрим ΔALB и $\Delta A_1L_1B_1$

$\left.\begin{array}{l} \angle ALB=\angle A_1L_1B_1 \\ \angle BAL=\angle B_1A_1L_1 \text{ (по условию)} \\ AL=A_1L_1 \text{ (по условию)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ALB=\Delta A_1L_1B_1$

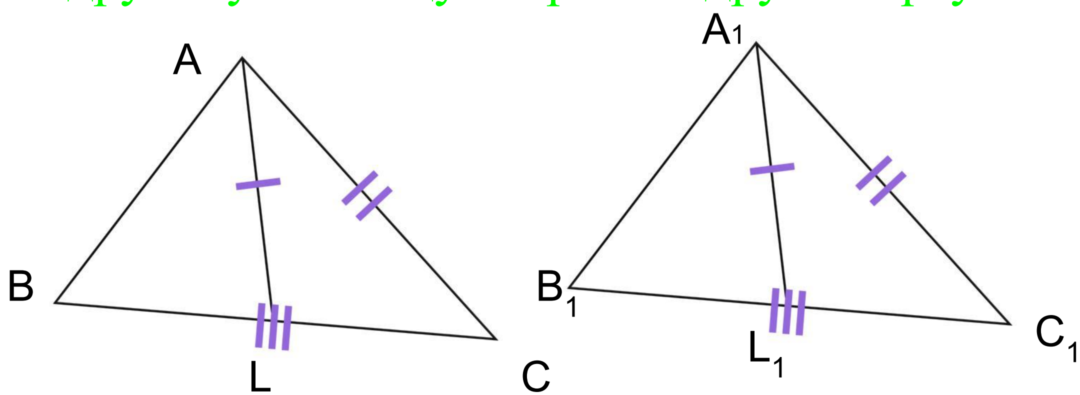
3. Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$

$\left.\begin{array}{l} \angle A=\angle A_1 \text{ (по условию)} \\ AB=A_1B_1 \text{ (по условию)} \\ AC= A_1C_1 \text{ (п.2)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними)

В начало

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ СВЯЗАННЫЕ С МЕДИАНОЙ

Если в одном треугольнике: сторона, выходящая из одного из её концов медиана и прилежащая к другому её концу сторона соответственно равны стороне, выходящей из одного из её концов медиане и прилежащая к другому её концу стороне в другом треугольнике, то треугольники равны.



- Дано:
  ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$
  $AL=A_1L_1$ – Медианы
- $\angle BLA = \angle B_1L_1A_1$
  $AL = A_1L_1$
  $BC=B_1C_1$
  Доказать:
  $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

1. Рассмотрим ΔALC и $\Delta A_1L_1C_1$:

$AL=A_1L_1$ (по условию)
$\angle CLA = \angle C_1L_1A_1$ (по условию) => $\Delta ALC=\Delta A_1L_1C_1$ =>
$LC = L_1C_1$ (по условию) $\angle ALB=\angle A_1L_1B_1$

2. Рассмотрим ΔALB и $\Delta A_1L_1B_1$

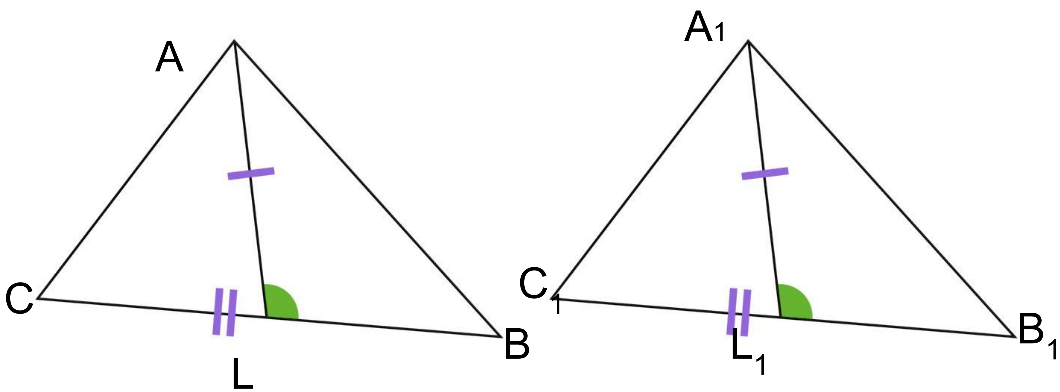
$\angle ALB=\angle A_1L_1B_1$
$BL=B_1L_1$ (по условию) => $\Delta ALB=\Delta A_1L_1B_1$
$AL=A_1L_1$ (по условию)

3. Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$

$BC = B_1C_1$ (по условию)
$AC=A_1C_1$ (п.1) => $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними)
$AB= A_1B_1$ (п.2)

В начало

Если в одном треугольнике медиана, сторона угол между медианой и стороной соответственно равны медиане, стороне углу между медианой и стороной в другом треугольнике, то треугольники равны.



- Дано:

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$

$AL=A_1L_1$ – Медианы

- $\angle BLA = \angle B_1L_1A_1$

$AL = A_1L_1$

$BC=B_1C_1$

Доказать:

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

1. Рассмотрим ΔALC и $\Delta A_1L_1C_1$:

$AL=A_1L_1$ (по условию)
$\angle CLA = \angle C_1L_1A_1$ (по условию)
$LC = L_1C_1$ (по условию)
=> $\Delta ALC=\Delta A_1L_1C_1$ => $\angle ALB=\angle A_1L_1B_1$

2. Рассмотрим ΔALB и $\Delta A_1L_1B_1$

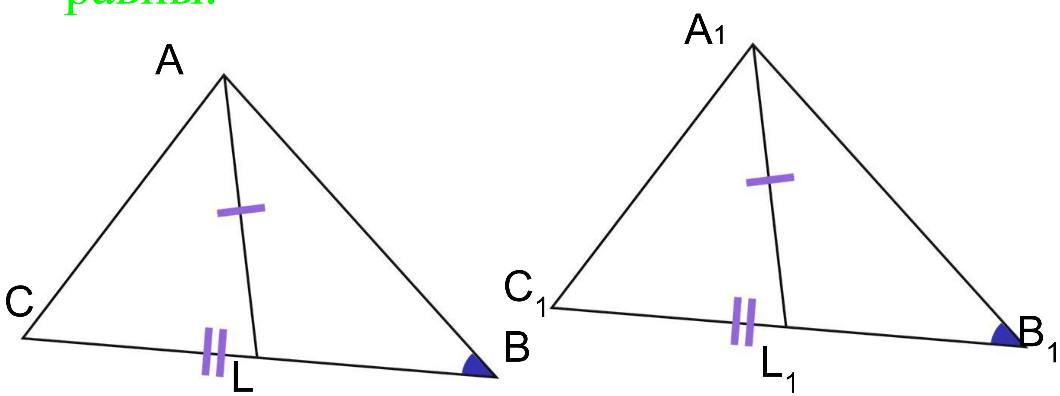
$\angle ALB=\angle A_1L_1B_1$
$BL=B_1L_1$ (по условию)
$AL=A_1L_1$ (по условию)
=> $\Delta ALB=\Delta A_1L_1B_1$

3. Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$

$BC = B_1C_1$ (по условию)
$AC=A_1C_1$ (п.1)
$AB= A_1B_1$ (п.2)
=> $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними)

В начало

Если в одном треугольнике угол прилежащая сторона и проведённая к ней медиана соответственно равны углу, прилежащей стороне и проведённой к ней медиане в другом треугольнике, то треугольники равны.



- Дано:
  ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$
  $AL=A_1L_1$ – Медианы
- $\angle ABL = \angle A_1B_1L_1$
  $BC=B_1C_1$
  Доказать:
  $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

1. Рассмотрим ΔALB и $\Delta A_1L_1B_1$
   $\angle ALB=\angle A_1L_1B_1$ (по условию)
   $BL=B_1L_1$ (по условию)
   $AL=A_1L_1$ (по условию)
   $\Rightarrow \Delta ALB=\Delta A_1L_1B_1 \Rightarrow \angle ALC=\angle A_1L_1C_1$
2. Рассмотрим ΔALC и $\Delta A_1L_1C_1$:
   $AL=A_1L_1$ (по условию)
   $\angle CLA = \angle C_1L_1A_1$
   $LC = L_1C_1$(по условию)
   $\Rightarrow \Delta ALC=\Delta A_1L_1C_1$
3. Рассмотрим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$
   $BC = B_1C_1$ (по условию)
   $AC=A_1C_1$ (п.2)
   $AB= A_1B_1$ (п.1)
   $\Rightarrow \Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними)

ЛИТЕРАТУРА

1. Геометрия 7-9 кл. Авторы: Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов.

РЕЦЕНЗИЯ