

МОУ «Средняя общеобразовательная школа с. Погорелка  
Шадринский район Курганская область

# ОБЪЕМ ТЕЛ

Учитель математики  
первой квалификационной  
категории Кощев М.М.

# Объем пирамиды.



# Цели :

- *Научиться применять интегрирование функций в качестве одного из способов решения задач на нахождение объёмов геометрических тел.*
- *Развитие логического мышления, пространственного воображения, умений действовать по алгоритму, составлять алгоритмы действий.*
- *Воспитание познавательной активности, самостоятельности.*

# Объем пирамиды

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту

## 1. Дана треугольная пирамида

$OX \perp (ABC)$ ,  $OX \cap (ABC) = M$ ;  $OX \cap (A_1B_1C_1) = M_1$

$X$  - абсцисса точки  $M$ ;  $S(x)$  - площадь

сечения;  $S$  - площадь основания

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  так, как  $AB \parallel A_1B_1$ ;  $AC \parallel A_1C_1$ ;  
 $BC \parallel B_1C_1$

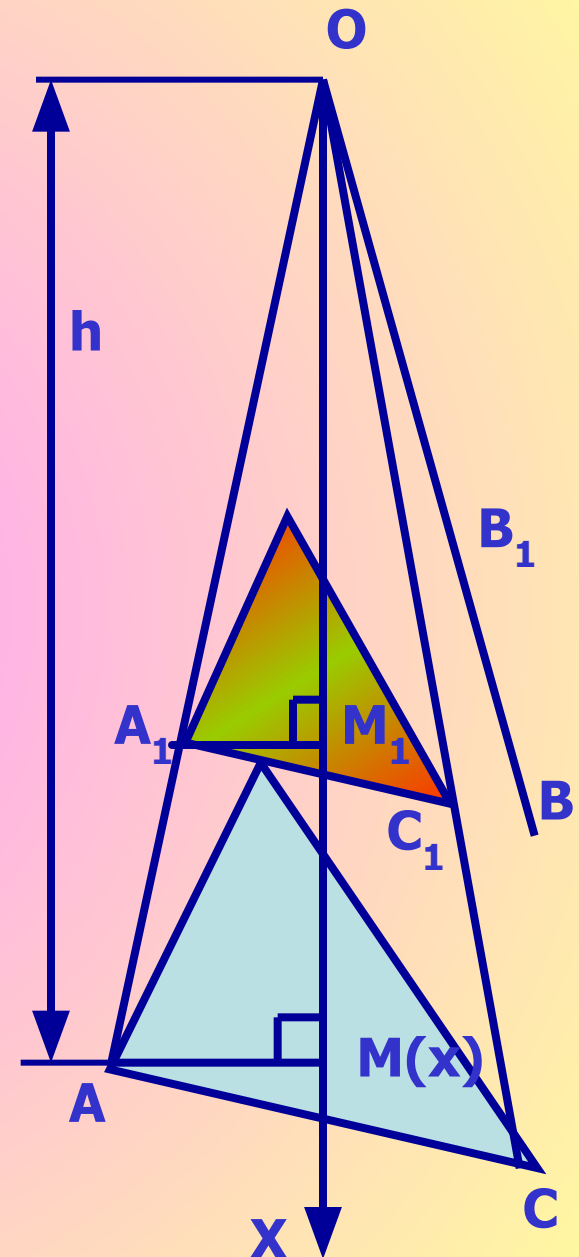
$AB:A_1B_1 = k \rightarrow OA:OA_1 = k$ ; аналогично

$BC:B_1C_1 = AC:A_1C_1 = k$ ;  $S:S(x) = k^2$ ;

$\triangle AMO \sim \triangle M_1A_1O_1 \rightarrow OM:OM_1 = k$ ;  $OM_1:OM = X:h$

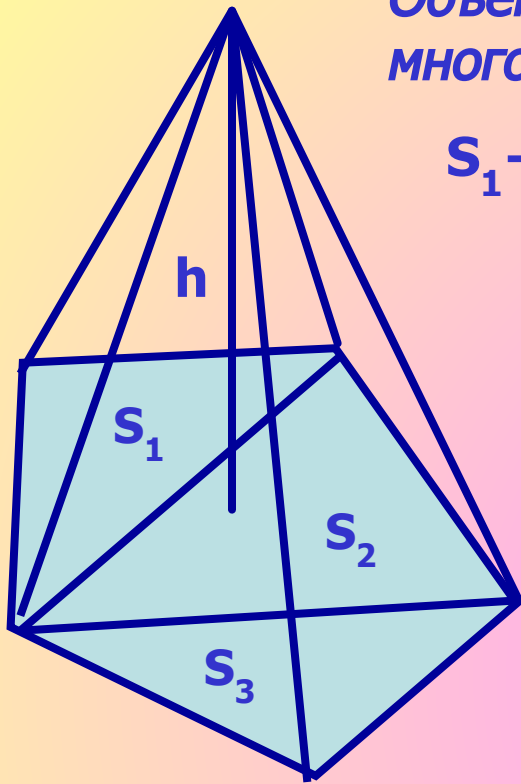
$k = X:h$ ;  $S:S(x) = (X:h)^2 = k^2$   $S(x) = (S * x^2):h^2$

$$V = \int_0^h \frac{Sx^2}{h^2} dx = \frac{S}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{S}{h^2} * \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} S * h$$



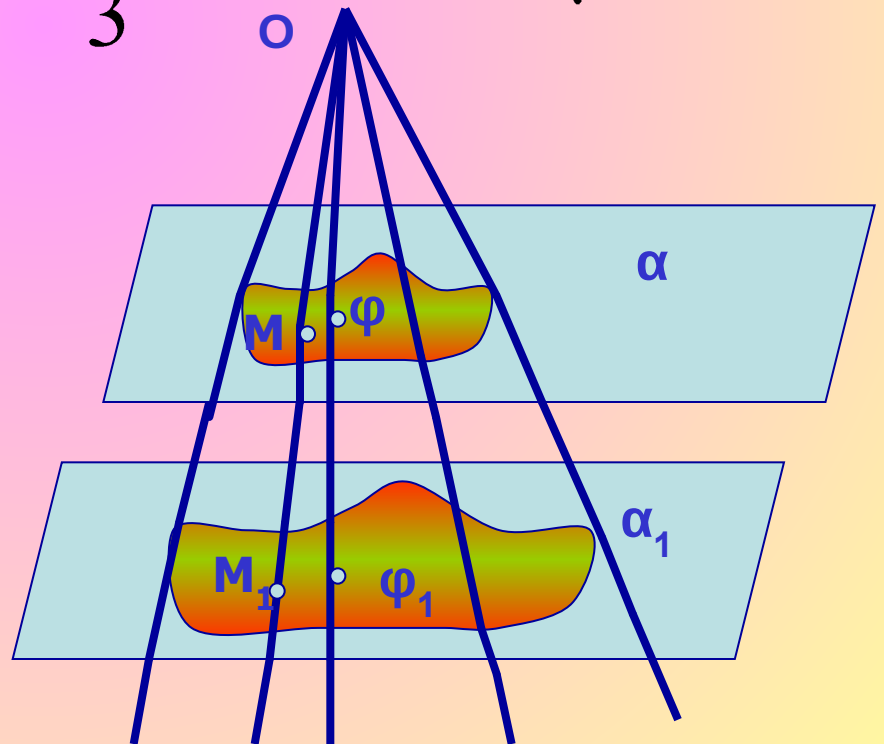
Объем пирамиды, имеющей в основании многоугольник.

$$S_1 + S_2 + S_3 \quad V = 1/3 * (S_1 + S_2 + S_3) * h$$



Следствие : Объем усеченной пирамиды, высота которой  $h$ , а площади оснований  $S$  и  $S_1$ , вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{3} h (S + S_1 + \sqrt{S * S_1})$$



Рассмотрим произвольную треугольную пирамиду  $SABC$  с высотой  $SO=H$ .

Построим сечение пирамиды, параллельное плоскости основания и находящееся на расстоянии  $h$  от её вершины.

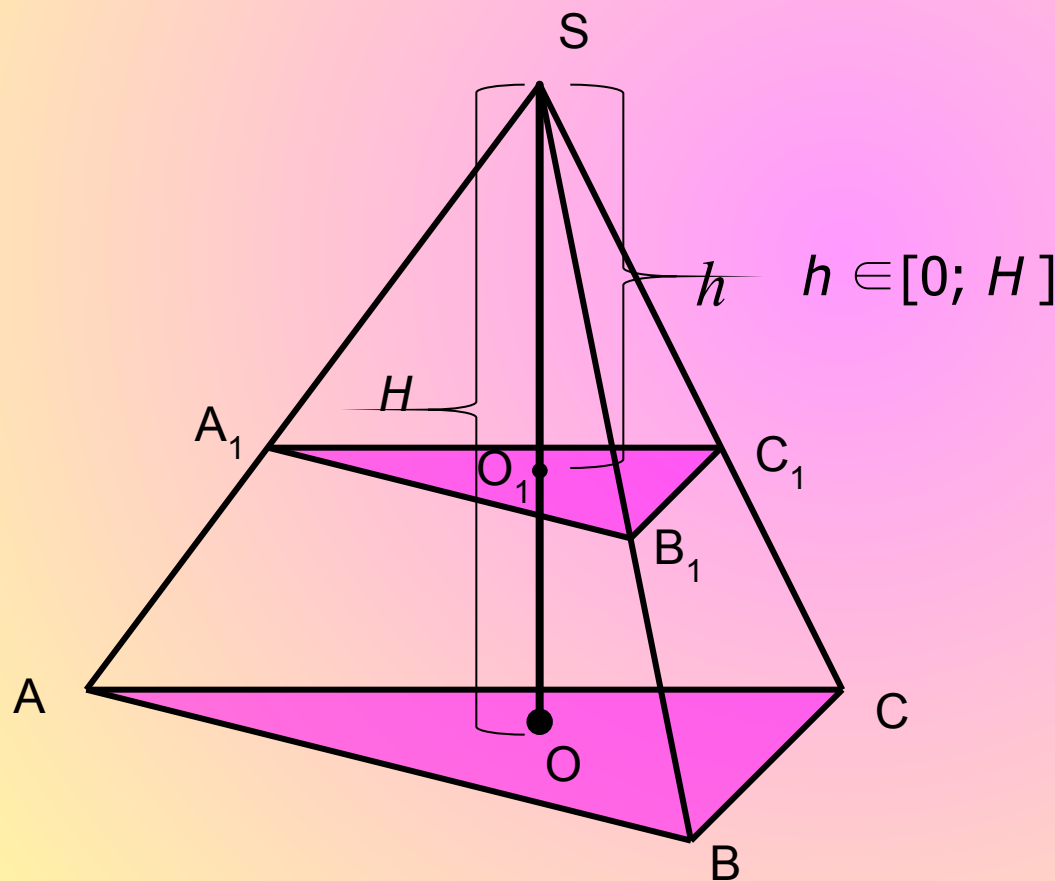
Т.к.  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , то по свойству площадей подобных фигур

$$\frac{S_{\hat{A}_1B_1C_1}}{S_{\hat{ABC}}} = \frac{H^2}{h^2}$$

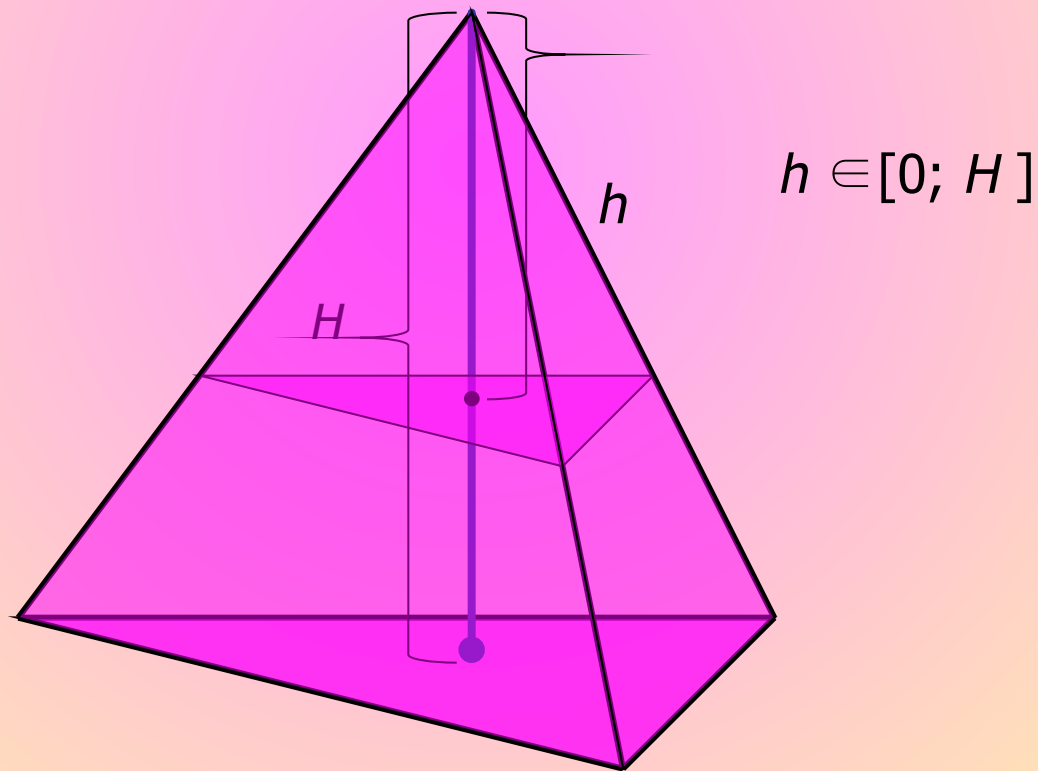


$$S_{\hat{A}_1B_1C_1} = \frac{S_{\hat{ABC}} \cdot h^2}{H^2}$$

Т.к.  $h$  – изменяющаяся величина, то площадь сечения можно рассматривать как функцию от переменной  $h$ , где  $h$  – расстояние от вершины пирамиды до плоскости основания.

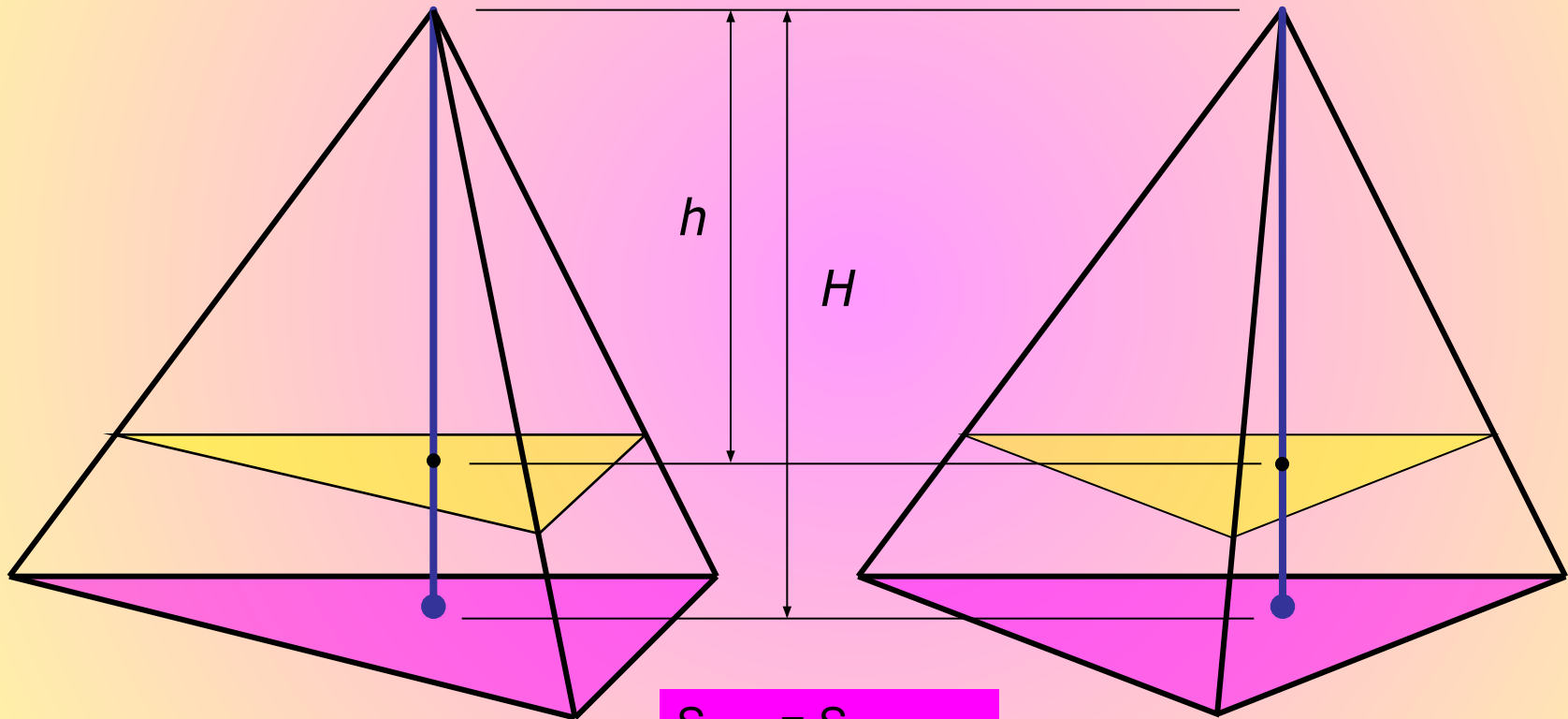


Используя понятие бесконечной интегральной суммы, объем данной пирамиды можно получить как бесконечную сумму площадей таких сечений, построенных вдоль высоты.



На основании предыдущих рассуждений можно сделать вывод о том, что пирамиды с равными площадями оснований и равными высотами, имеют равные объемы.

$$V_1 = V_2$$



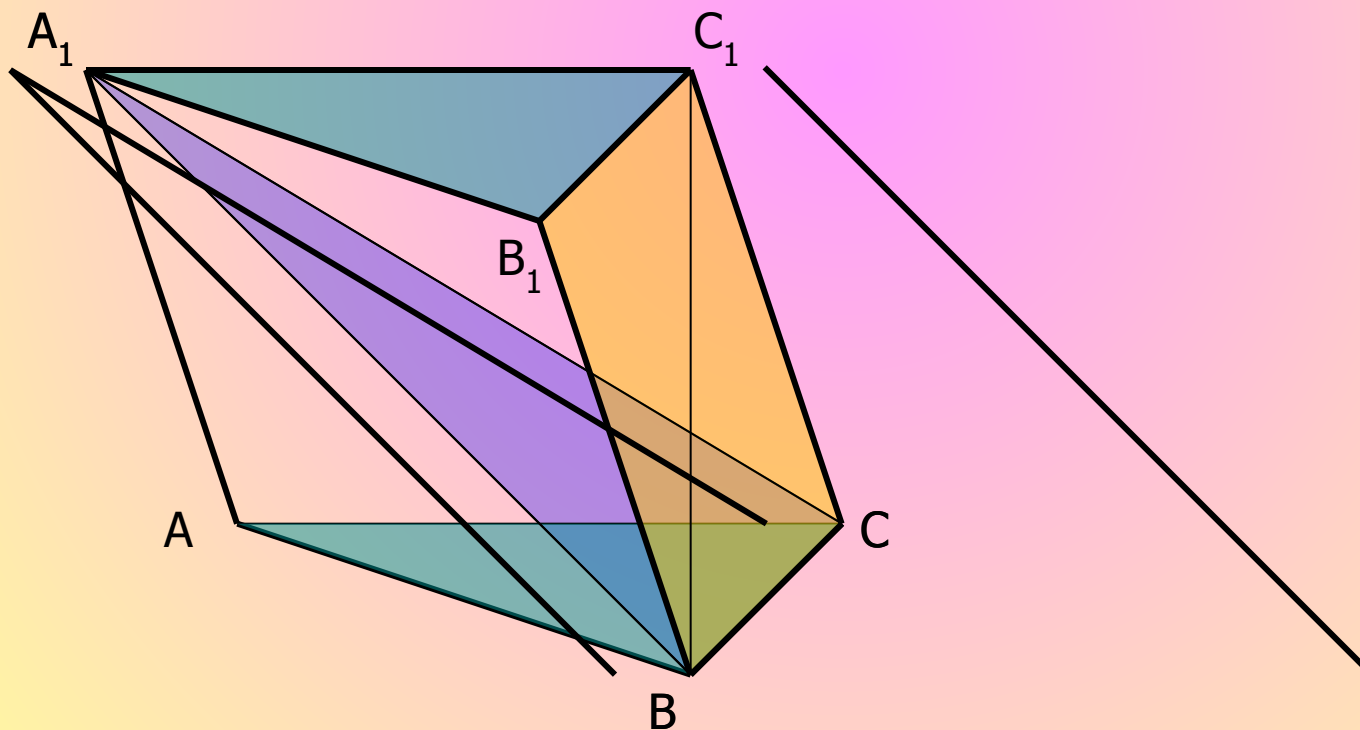
$$S_{\text{осн.1}} = S_{\text{осн.2}}$$

$$S_{\text{сеч.1}} = S_{\text{сеч.2}}$$

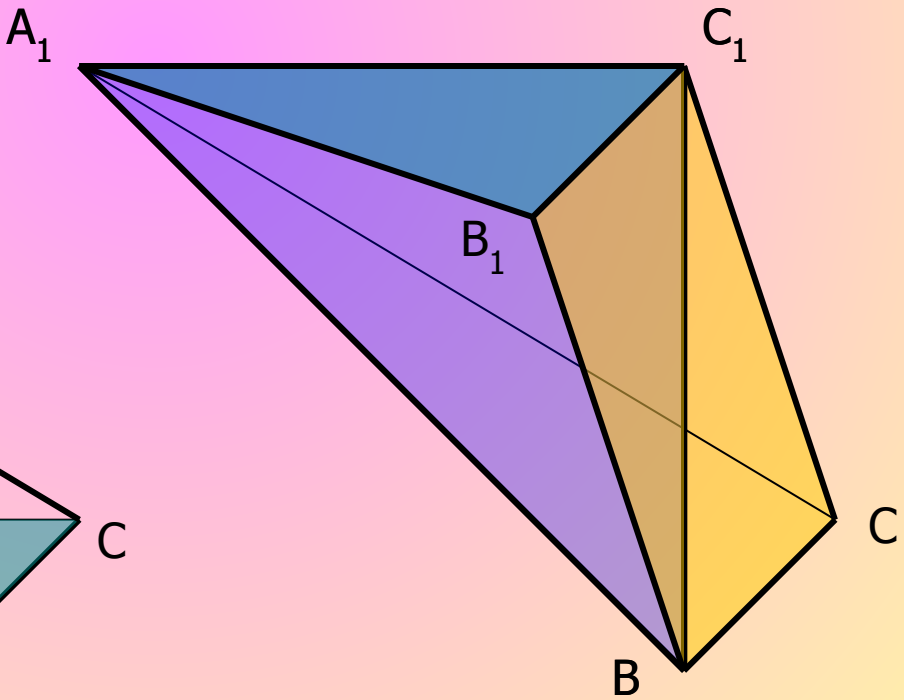
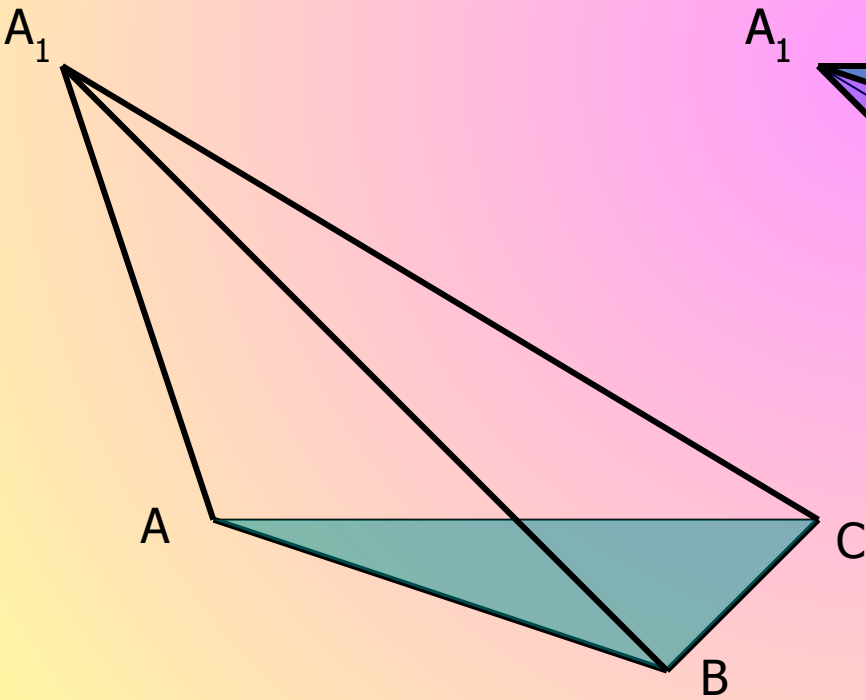


Рассмотрим произвольную треугольную призму  $ABCA_1B_1C_1$ .

- 1) Разобьем её на две части секущей плоскостью  $(A_1BC)$ .
- 2) Получились две пространственные фигуры: треугольная пирамида  $A_1ABC$  и четырехугольная пирамида  $A_1BCC_1B_1$  (обе пирамиды с вершиной  $A_1$ ).



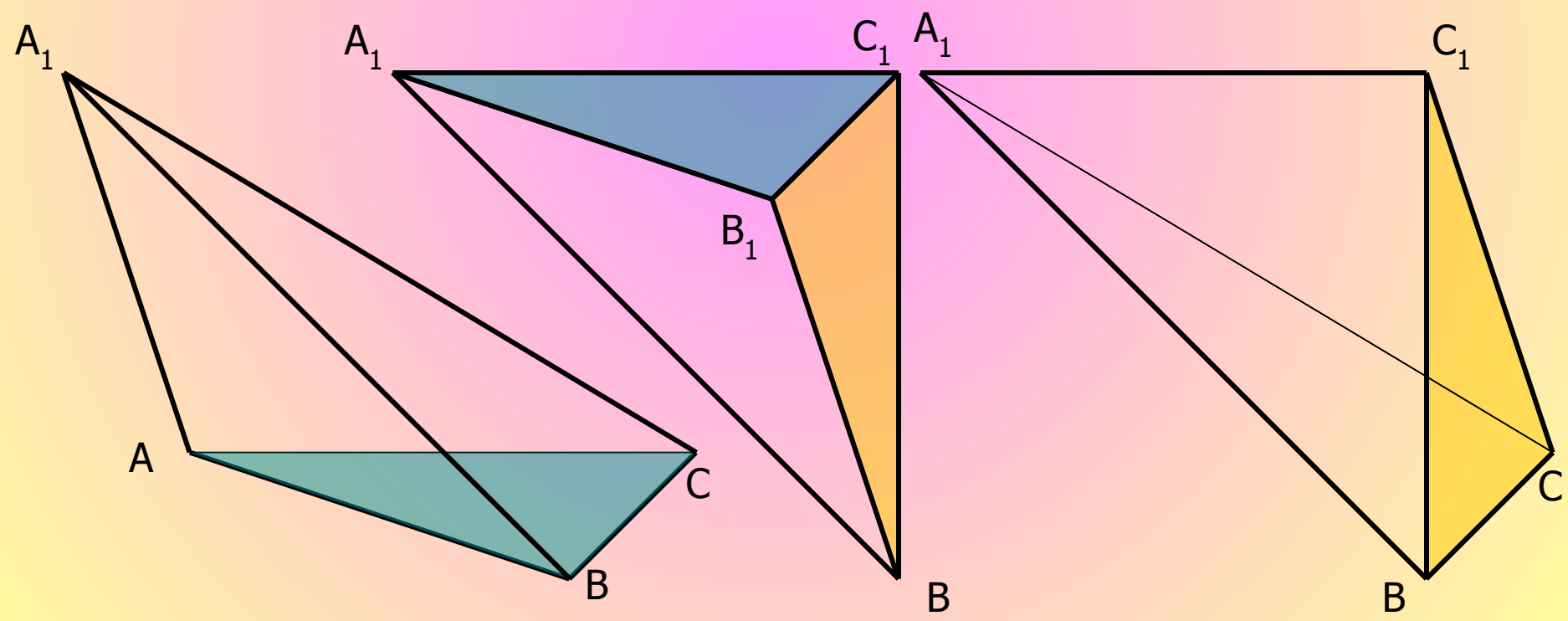
Теперь разобьём четырёхугольную пирамиду  $A_1BCC_1B_1$  секущей плоскостью  $(A_1C_1B)$  на две треугольные пирамиды:  $A_1BB_1C_1$  и  $A_1BCC_1$  (обе пирамиды с вершиной  $A_1$ ).



У треугольных пирамид  $A_1ABC$  и  $BA_1B_1C_1$  основания равны (как противоположные основания призмы) и их высотами является высота призмы. Значит, их объемы также равны.

У треугольных пирамид  $A_1BB_1C_1$  и  $A_1BCC_1$  основания равны (объясните самостоятельно) и у них общая высота, проведенная из вершины  $A_1$ . Значит, их объемы также равны.

$$V_{A_1ABC} = V_{BA_1B_1C_1} \quad V_{A_1BB_1C_1} = V_{A_1BCC_1}$$

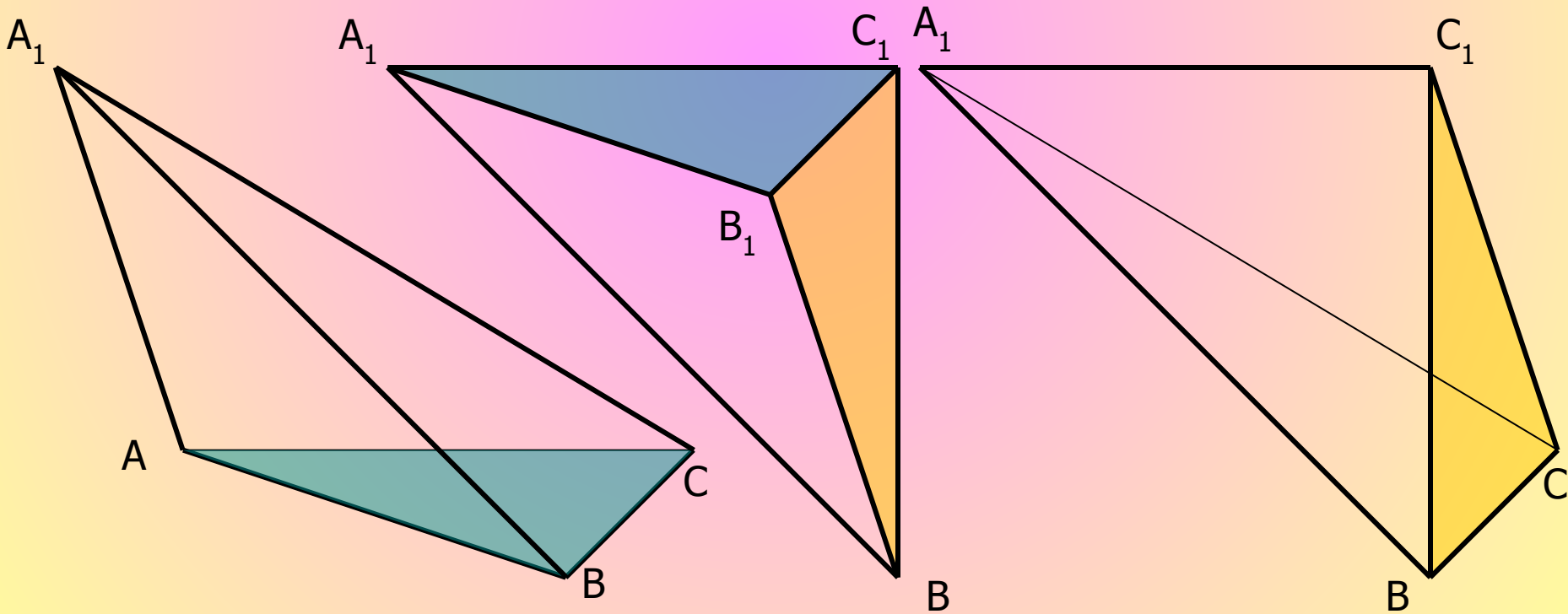


Тогда, по свойству транзитивности, объемы всех трех пирамид равны:

$$V_{A_1ABC} = V_{BA_1B_1C_1} = V_{A_1BCC_1}$$

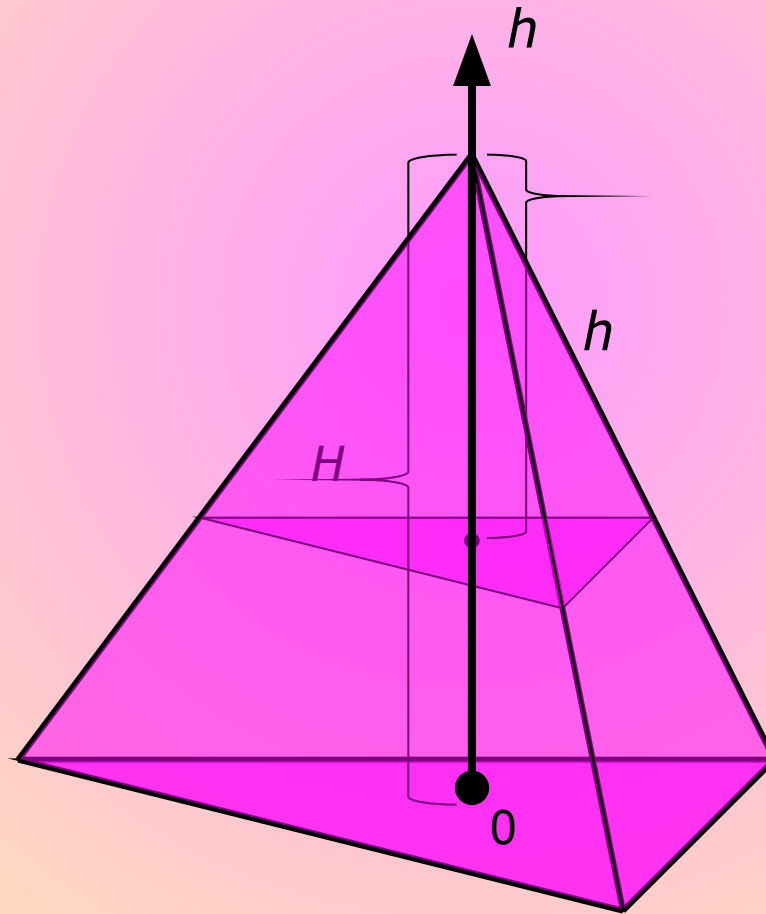
Значит, объем пирамиды в три раза меньше объема призмы с такими же основанием и высотой, т.е.

$$V = \frac{1}{3} S_{\hat{m}} \cdot H$$



Эту же формулу можно было получить непосредственным интегрированием площади сечения, как функции, зависящей от расстояния  $h$ :

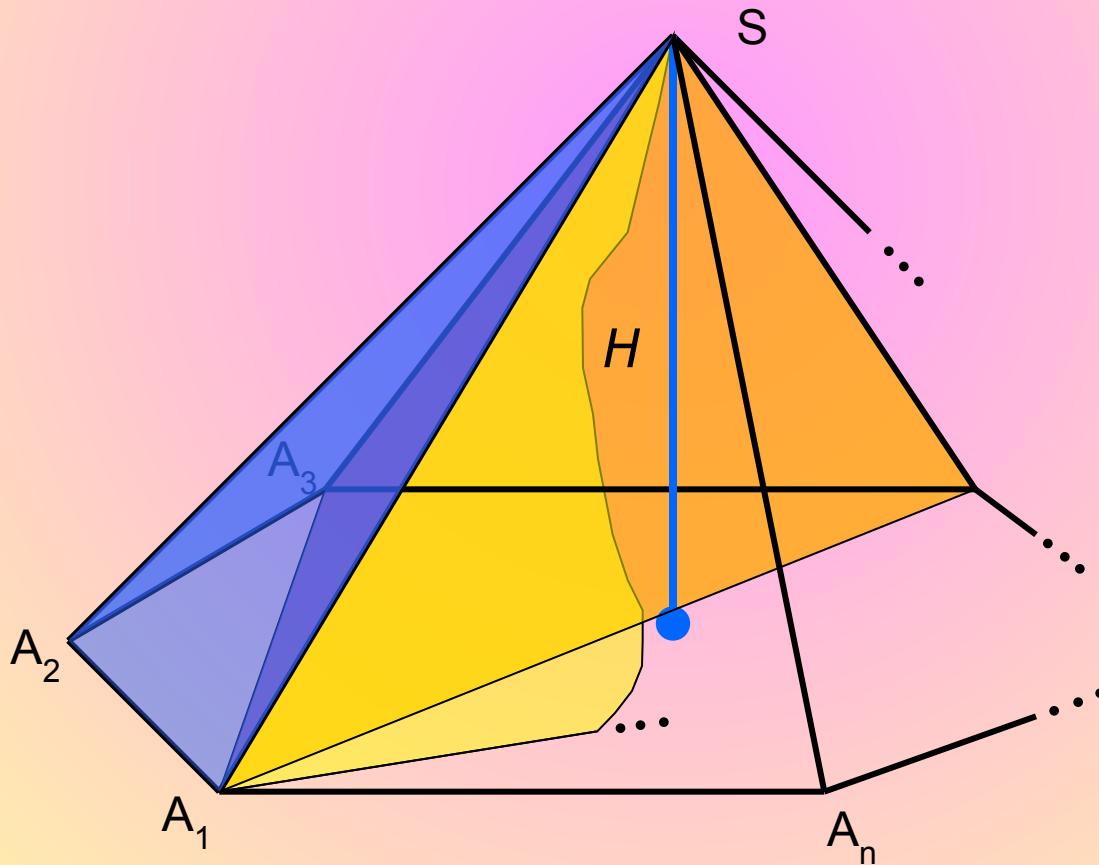
$$V = \int_0^H S_{\text{сеч.}} dh = \int_0^H \frac{S_{\text{сеч.}} \cdot h^2}{H^2} dh = \frac{S_{\text{сеч.}}}{H^2} \int_0^H h^2 dh = \frac{S_{\text{сеч.}}}{H^2} \frac{h^3}{3} \Big|_0^H = \frac{1}{3} S_{\text{сеч.}} \cdot H$$



$$h \in [0; H]$$

Рассматривая произвольную  $n$ -угольную пирамиду  $SA_1A_2\dots A_n$  как сумму треугольных пирамид с общей вершиной и высотой, получим формулу для нахождения объема любой пирамиды:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{дѣлѣнїи}} &= V_{SA_1A_2A_3} + V_{SA_1A_3A_4} + \dots + V_{SA_1A_{n-1}A_n} = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1A_2A_3} \cdot H + \frac{1}{3} S_{\Delta A_1A_3A_4} \cdot H + \dots + \frac{1}{3} S_{\Delta A_1A_{n-1}A_n} \cdot H = \\
 &= \frac{1}{3} H \cdot (S_{\Delta A_1A_2A_3} + S_{\Delta A_1A_3A_4} + \dots + S_{\Delta A_1A_{n-1}A_n}) = \frac{1}{3} S_{A_1A_2\dots A_n} \cdot H = \frac{1}{3} S \cdot H
 \end{aligned}$$



Итак, для любой  $n$ -угольной пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$$

,где  $S_{\text{осн.}}$  – площадь основания пирамиды,  $H$  – высота пирамиды.

## Решение задач по готовым чертежам (стр184)

Дано: ABCD- правильная пирамида.  $AB=3$ ,  $AD=2\sqrt{3}$

Найти: а)  $S_{\text{осн.}}$ , б)  $AO$ , в)  $DO$ , г)  $V$ -?

Решение:  $S_{\text{осн.}}$ =( используем формулу для вычисления площади правильного  $\Delta$ ) =

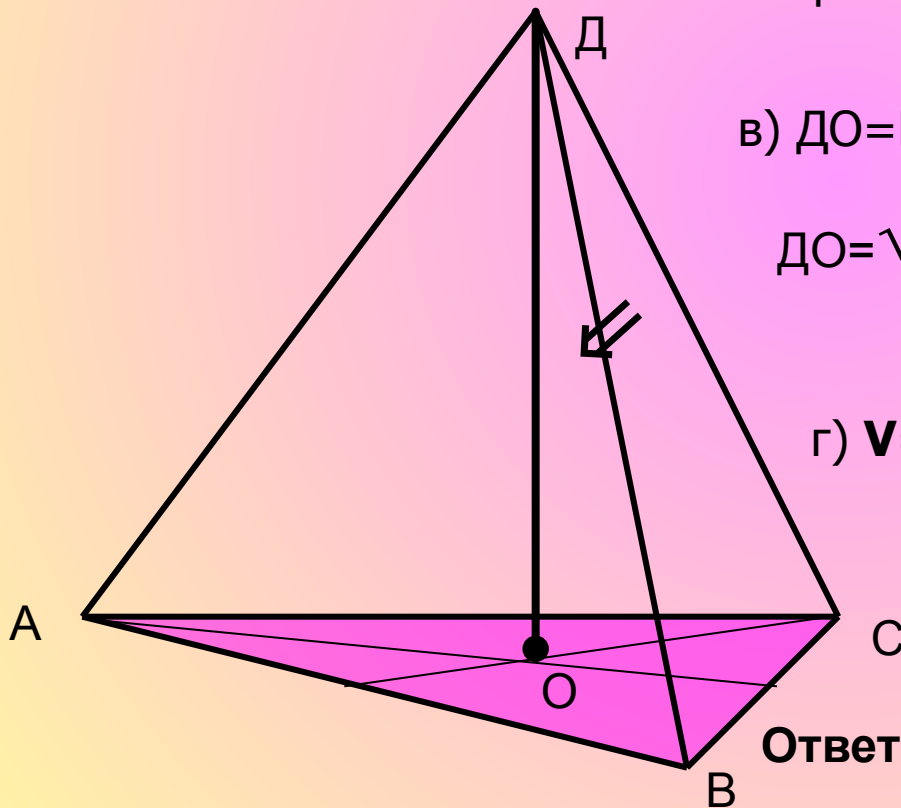
а)  $S_{\text{осн.}} = a^2\sqrt{3}/4 = 9\sqrt{3}/4$  .

б)  $AO=R=h*2/3= a\sqrt{3}/3$ (формула радиуса описанной окружности через сторону правильного  $\Delta$ ).  $AO= 3\sqrt{3}/3=\sqrt{3}$

в)  $DO=H=\sqrt{AD^2-AO^2}$  (по теореме Пифагора)

$$DO=\sqrt{2(\sqrt{3})^2- (3\sqrt{3}/3)^2}=\sqrt{12-9/3}=\sqrt{9}=3$$

г)  $V=1/3 *S_{\text{осн.}} *H^3= 1/3*9\sqrt{3}/4*3=9\sqrt{3}/4$



**Ответ:**  $S_{\text{осн.}}=9\sqrt{3}/4$  ,  $AO=\sqrt{3}$  ,  $DO=3$  ,  $V=9\sqrt{3}/4$



## Решение задач по готовым чертежам(стр 184)

Дано: ABCDF- правильная пирамида.  $\angle FCO=45^\circ$ ,  $FO=2$ .

Найти: а)  $S_{\text{осн.}}$ , б)  $V$ -?

Решение: Рассмотрим  $\triangle FCO$ :

1) Из  $\triangle FCO$ :  $\angle O=90^\circ$ ,  $\angle C=45^\circ$ , значит,  $\angle F=45^\circ$ . Следовательно,  $\triangle FCO$ - равнобедренный,  $OC=FO=2$ .

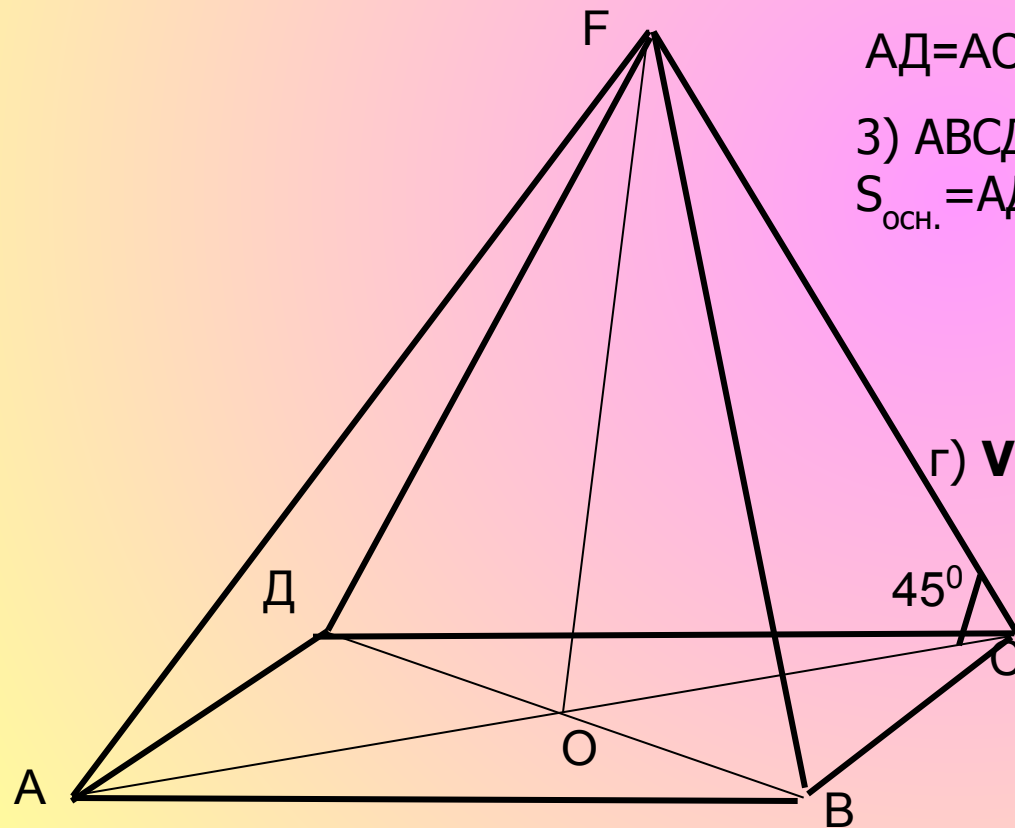
2)  $AC=2OC=4$ ,  $d=AC=AD=\sqrt{2}$  (по свойству диагонали квадрата,  $d^2=2a^2$ ). Тогда

$$AD=AC/\sqrt{2} = 4/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

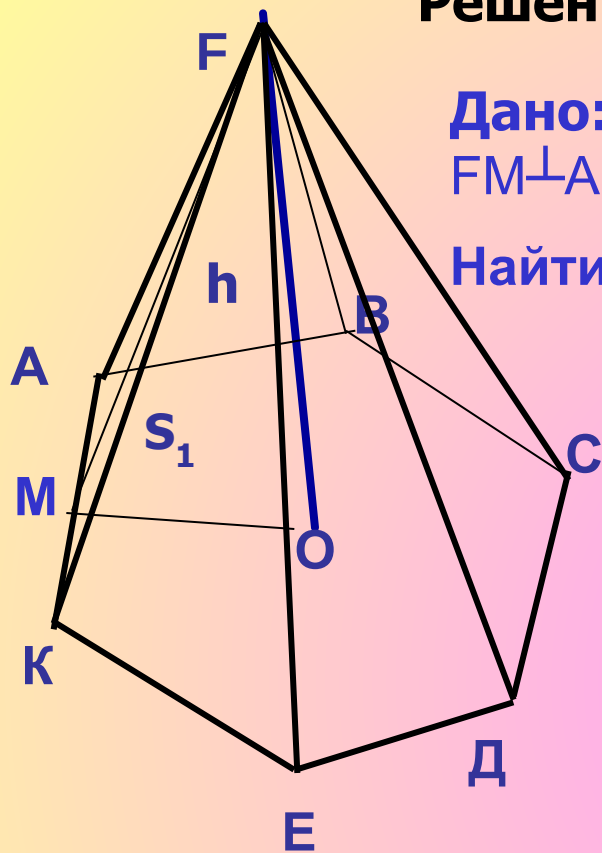
3) ABCD- квадрат (пирамида правильная).  
 $S_{\text{осн.}}=AD^2=(2\sqrt{2})^2=8$

$$\text{г) } V=1/3*S_{\text{осн.}}*h=1/3*8*2=16/3=5*1/3.$$

$$\text{Ответ: } S_{\text{осн.}}=8, V=5*1/3$$



## Решение задач по готовым чертежам (стр185)



**Дано:** ABCDEF-правильная пирамида.  $FO \perp (ABC)$ ,  $FM \perp AK$ ,  $FO=4$ ,  $FM=5$ .

**Найти:** а)  $S_{\text{осн.}}=?$  б)  $V=?$

**Решение:**

1. Рассмотрим треугольник FOM:  $\angle O=90^\circ$

(так как  $FO \perp (ABC)$ , значит  $FO \perp OM$ ),  $FO=4$ ,

$FM=5$ ,  $OM=\sqrt{MF^2-FO^2}$  (по теореме Пифагора)

$OM=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$ ,  $OM=r$  (радиус окружности вписанной в правильный шестиугольник).

$AK=2r \cdot \tan \frac{\pi}{6} = 2 \cdot 3 \cdot \tan \frac{\pi}{6} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ .

2.  $S_{\text{осн.}} = 6 \cdot S_{\text{AOK}} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$ .  $S_{\text{осн.}} = 6 \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ .

3.  $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн.}} \cdot H$ ,  $V = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{3} \cdot 4 = 24\sqrt{3}$ .

**Ответ:**  $S_{\text{осн.}} = 18\sqrt{3}$  ед<sup>2</sup>,  $V = 24\sqrt{3}$  ед<sup>3</sup>.

## **Свойство объемов №1**

**Равные тела имеют равные объемы**

## **Свойство объемов №2**

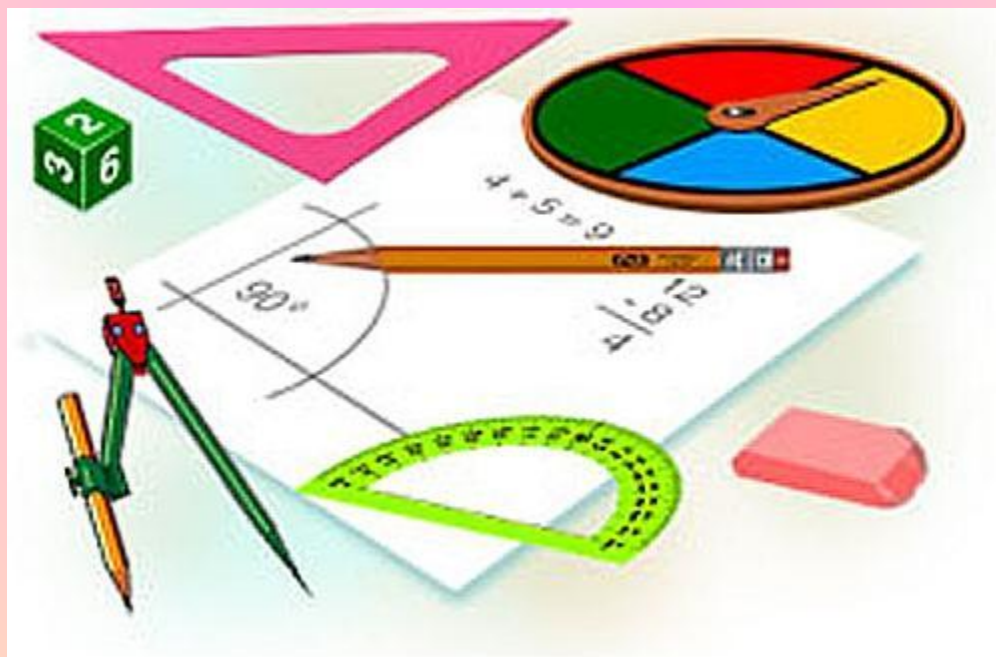
**Если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел.**

## **Свойство объемов №3**

**Если одно тело содержит другое, то объем первого тела не меньше объема второго.**

# Домашнее задание

П. 69, № 684а, 686а, 687.



# Библиография

- ❖ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев  
«Геометрия, 10-11», М., Просвещение, 2007
- ❖ В.Я. Яровенко «Поурочные разработки по  
геометрии», Москва, «ВАКО», 2006



**УЧЕНИКОВИ!**

