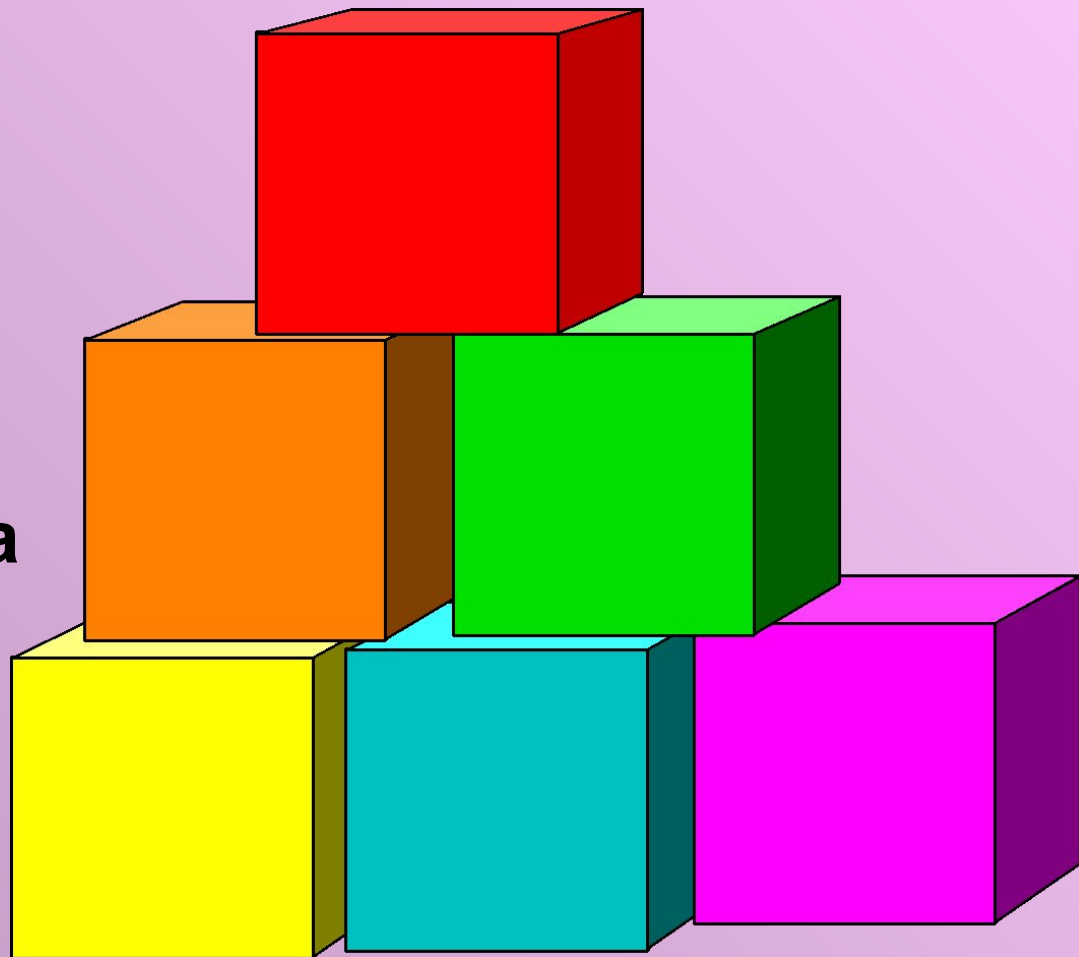


Тема 7. Объемы тел

Тема урока:

Объем
прямоугольного
параллелепипеда



**Величина части
пространства,
занимаемого
геометрическим
телом , называется
объемом этого тела**

Английские меры объема



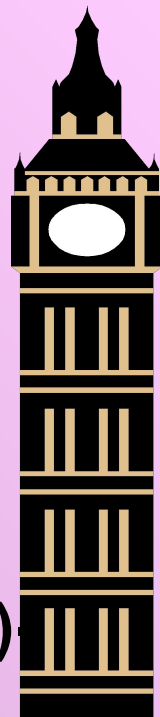
Бушель - $36,4 \text{ дм}^3$

Галлон - $4,5 \text{ дм}^3$

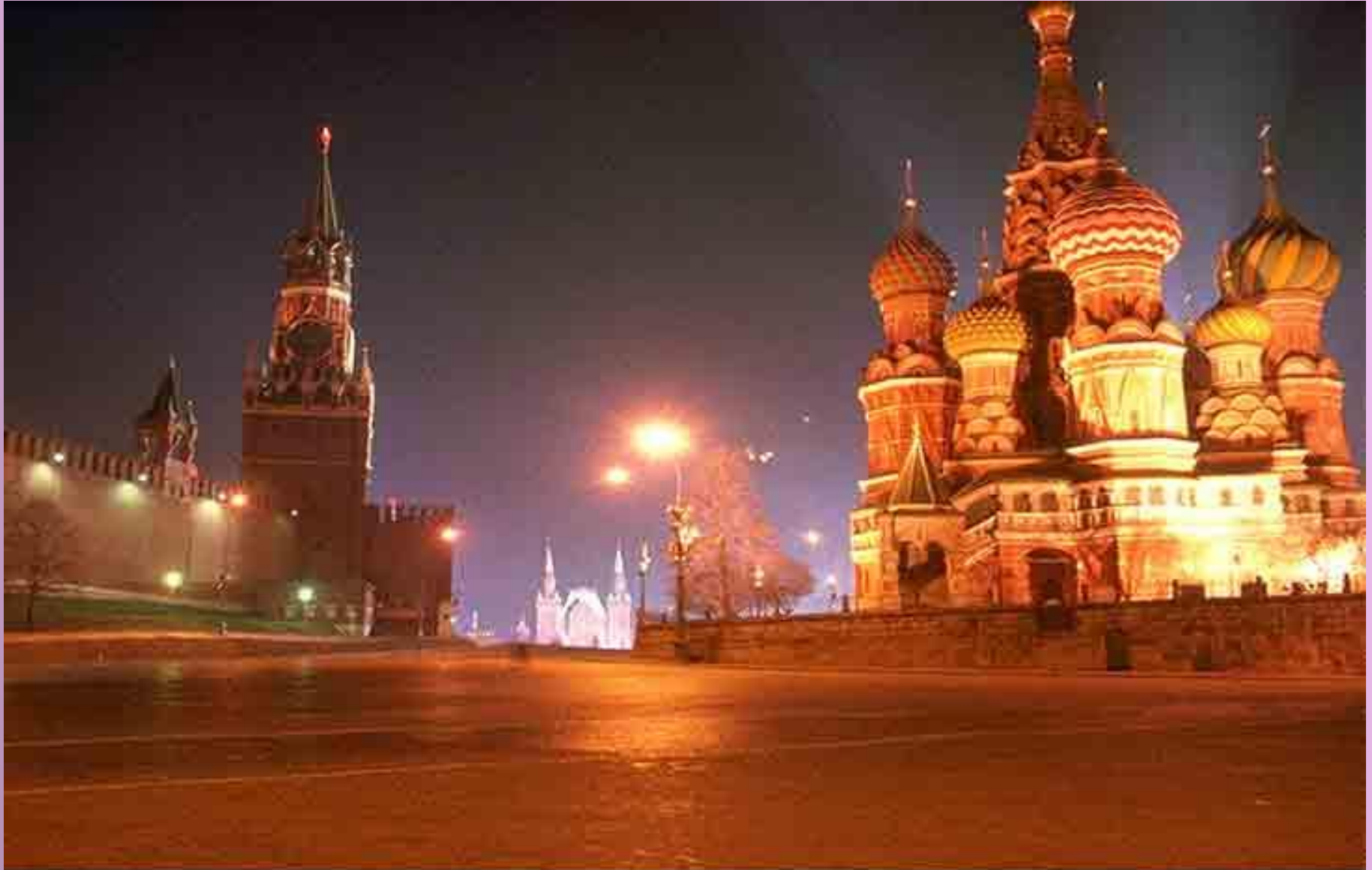
Баррель (сухой)-
 $115,628 \text{ дм}^3$

Баррель (нефтяной)
 $158,988 \text{ дм}^3$

Английский баррель
для сыпучих веществ
 $163,65 \text{ дм}^3$

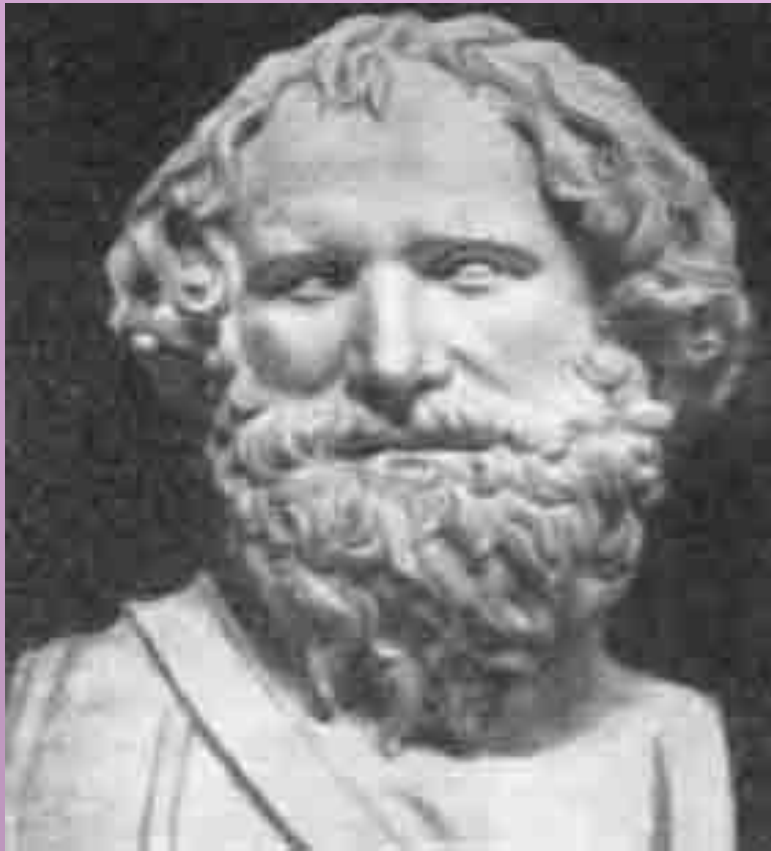


Русские меры объема



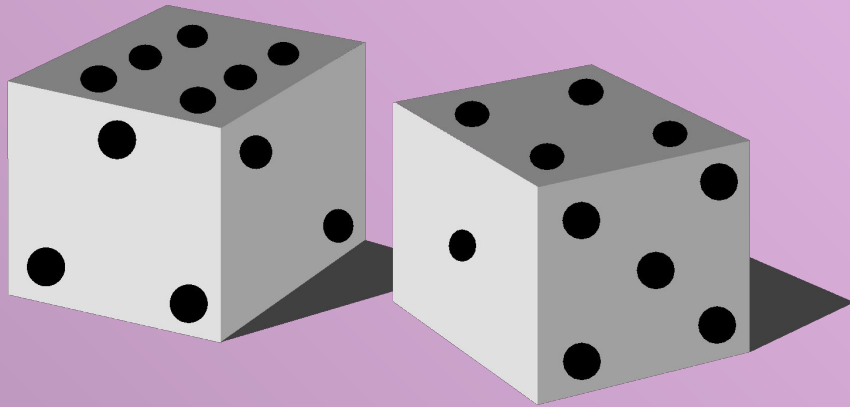


АРХИМЕД (ок. 287-212 гг. до н.э.)



- На могильной плите Архимеда, как завещал ученый, был изображен цилиндр с вписанным шаром, а эпитафия говорила о величайшем открытии Архимеда - о том, что объемы этих тел относятся как 3: 2.
- *Когда Римский оратор и общественный деятель Цицерон, живший в 1 в. до н.э., был в Сицилии, он еще видел этот заросший кустами и терновником памятник с шаром и цилиндром.*

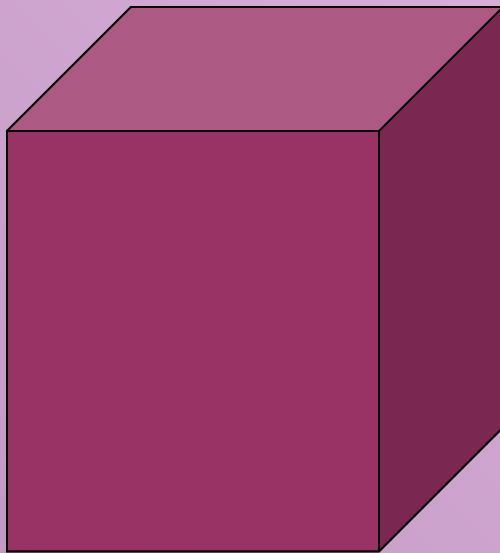
Понятие объема



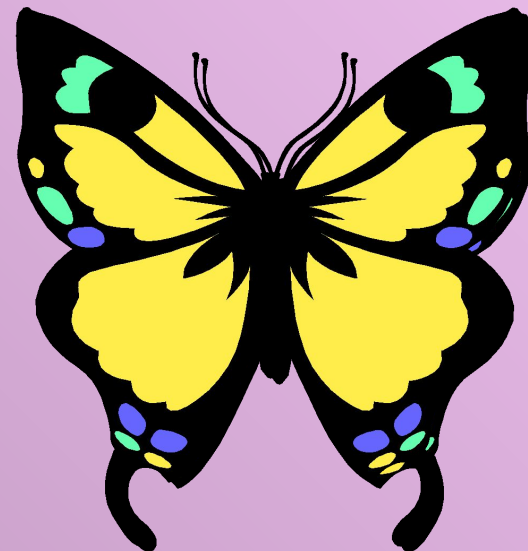
За единицу измерения объемов примем куб, ребро которого равно единице измерения отрезков.

Куб с ребром 1 см называют кубическим сантиметром и обозначают см^3 .

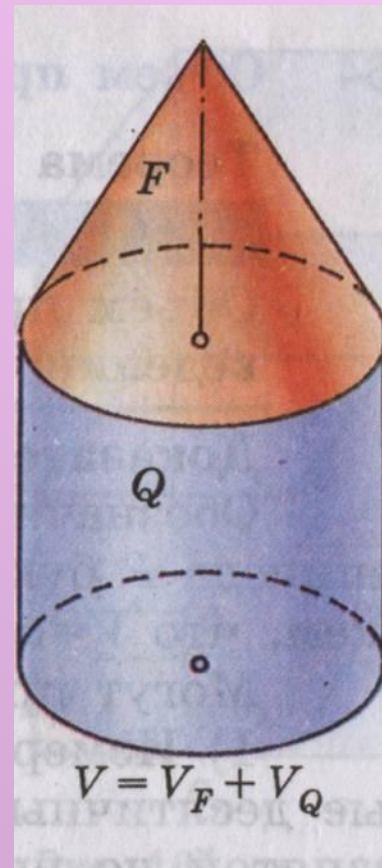
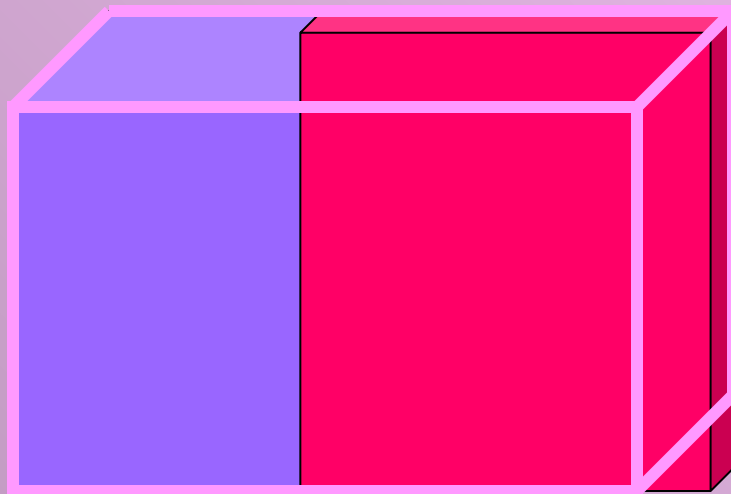
Равенство двух тел, в стереометрии определяется так же, как и в планиметрии:



- Два тела называют равными, если их можно совместить наложением.



2⁰. Если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел.



Объем прямоугольного параллелепипеда.

Теорема. **Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.**

Дано: параллелепипед, a, b, c его измерения. V - объем

Доказать: $V = abc$.

• Доказательство:

1 сл. Пусть a, b, c - конечные десятичные дроби ($n \geq 1$). Числа $a \cdot 10^n, b \cdot 10^n, c \cdot 10^n$ - целые.

Разобьем каждое ребро параллелепипеда на равные части длины $\frac{1}{10^n}$ и через точки разбиения

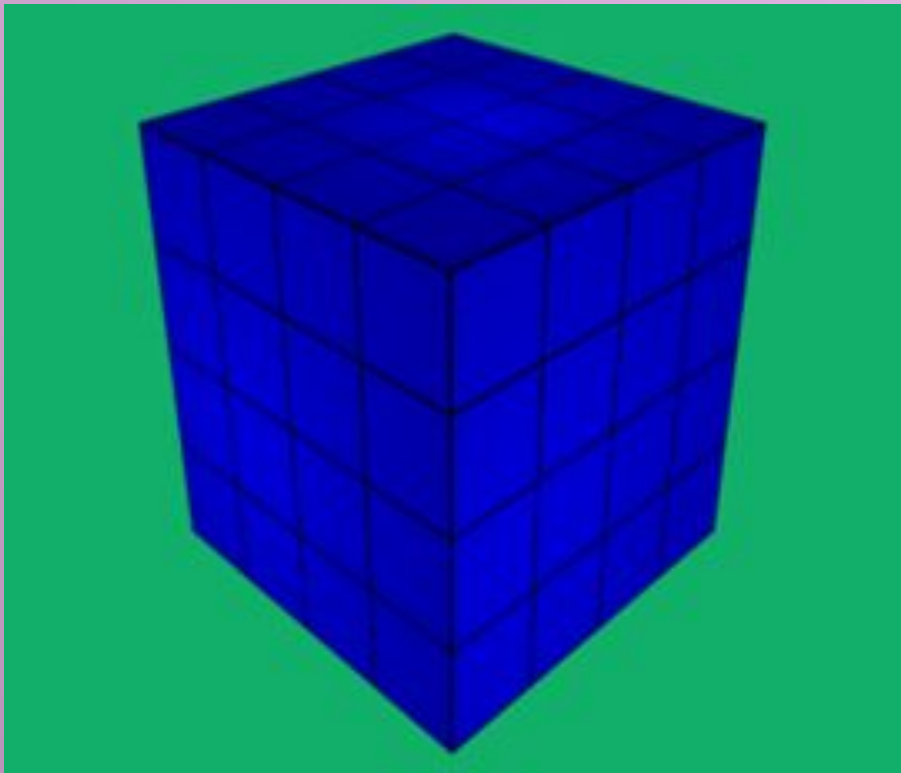
проведем плоскости, перпендикулярные к этому ребру. Параллелепипед разобьется

на $abc \cdot 10^{3n}$ равных кубов с ребром $\frac{1}{10^n}$.

Т.к. объем каждого такого куба равен $\frac{1}{10^{3n}}$, то объем всего параллелепипеда равен

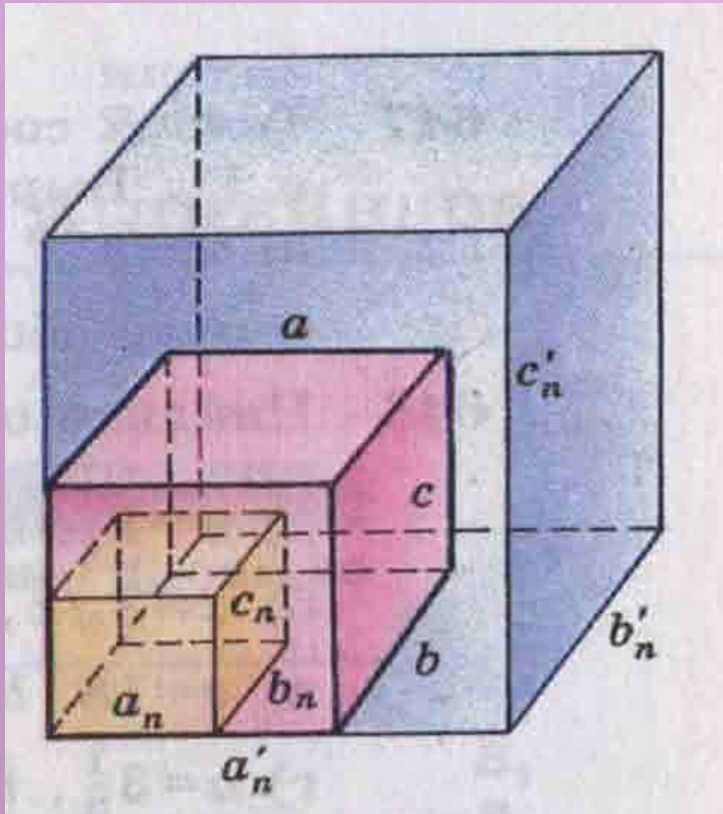
$$V = abc \cdot 10^{3n} \cdot \frac{1}{10^{3n}} = abc$$

Итак, $V = abc$.



2 сл. Пусть a, b, c – бесконечные десятичные дроби.

Рассмотрим конечные десятичные дроби a_n, b_n, c_n



$$a_n b_n c_n \leq abc \leq a'_n b'_n c'_n, \text{ где}$$

Объем V параллелепипеда P заключен между

$$V_n = a_n b_n c_n \text{ и } V' = a'_n b'_n c'_n \text{ т.е.}$$

$$a_n b_n c_n \leq V \leq a'_n b'_n c'_n$$

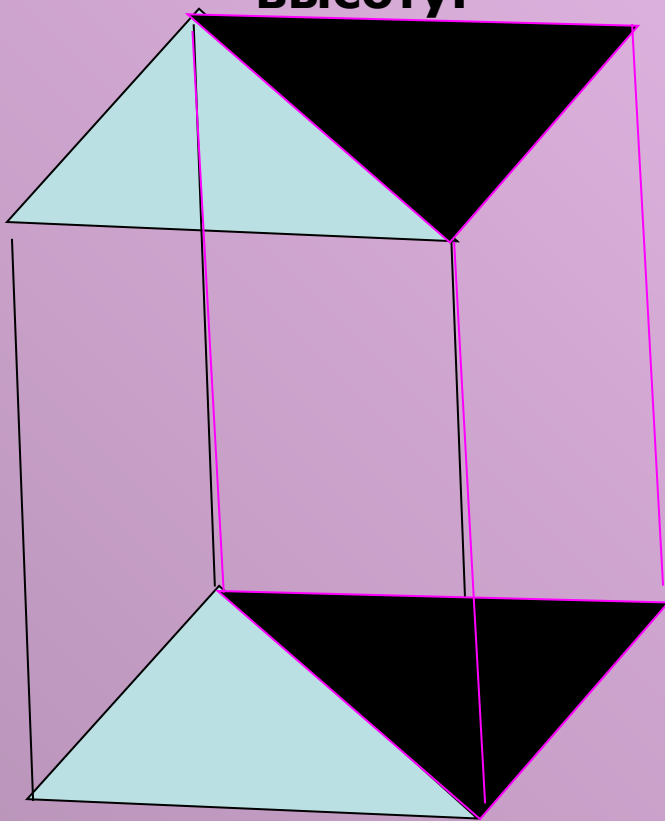
Неограниченно увеличим n .

Тогда число $a'_n b'_n c'_n$ будет мало отличаться от числа $a_n b_n c_n$.

$$V = abc.$$

Ч.т.д

Следствие 2. Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.



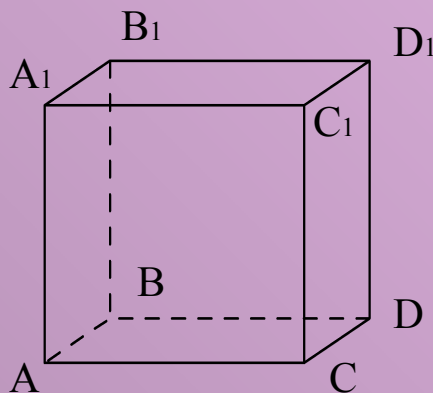
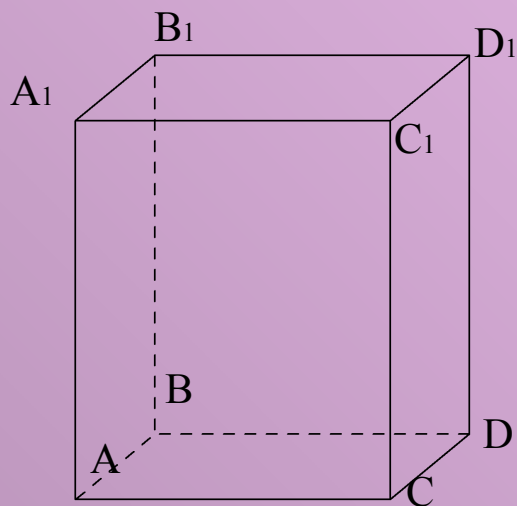
Дано: ABC — треугольная призма.

Доказать: V призмы $= S_{ABC} \cdot h$

Доказательство:

1. Построим треугольную призму до прямоугольного параллелепипеда.
2. По сл.2 $V = 2 S_{ABC} \cdot h$.
3. (B_1BC) разбивает параллелепипед на две равные прямые призмы, одна из которых данная.
4. Следовательно $V_{иск.}$ равен половине объема параллелепипеда, т.е. $V_{призмы} = S_{ABC} \cdot h$ ч.т.д

№ 650. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 8 см, 12 см и 18 см. найдите ребро куба, объем которого равен объему этого параллелепипеда



Дано: прямоугольный параллелепипед.

$$a = 8\text{ см}, b = 12\text{ см}, c = 8\text{ см}$$

$$V_{\text{пар}} = V_{\text{куба}}$$

Найти: d - ребро куба.

• *Решение:*

$$V_{\text{пар}} = abc = 8 \cdot 12 \cdot 18 = 1728 \text{ см}^3.$$

$$V_{\text{пар}} = V_{\text{куба}} = 1728 \text{ см}^3 = d^3,$$

$$d^3 = 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 2 = 2^6 \cdot 3^3,$$

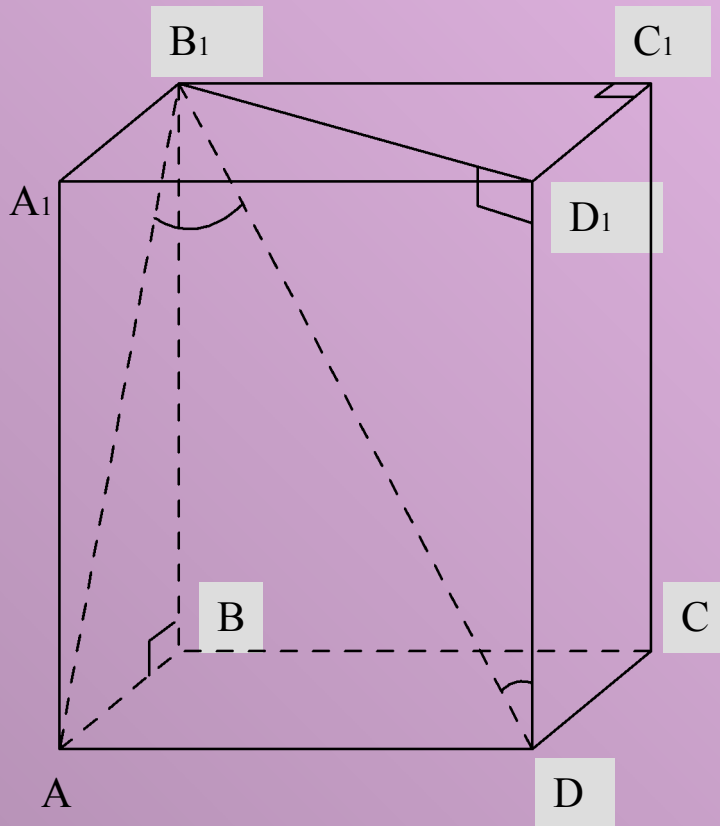
$$d = 12 \text{ см.}$$

Ответ: 12 см.

№ 653. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 18 см и составляет угол в 30° с плоскостью боковой грани и угол в 45° с боковым ребром. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда.

Дано: $AB_1C_1D_1$ - прямоугольный параллелепипед,
 B_1D_1 - диагональ, $B_1D_1 = 18$ см, $\angle (B_1D_1; (ABB_1)) = 30^\circ$,
 $\angle B_1D_1D_1 = 45^\circ$

Найти: V параллелепипеда



Решение

1) ΔB_1BA – прямоугольный, т.к. $B_1B \perp AB$ (по условию $AB_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед).

$$\left(\begin{array}{l} AB \perp AD \\ B_1B \perp AB \end{array} \right) \Rightarrow (AB_1 \perp AD)$$

$\Rightarrow \Delta B_1AD$ -прямоульный, т.е. $B_1A = \text{ПР}_{(AA_1B)} B_1D_1$,
 $\angle (B_1D_1; (AA_1B_1)) = \angle DB_1A = 30^\circ$.

2) ΔB_1AD - прямоугольный с углом в 30° : $AD = \frac{1}{2} B_1D_1$
 $AD = 9$ см.

3) ΔB_1D_1D – прямоугольный, т.к.

$$\left(\begin{array}{l} DD_1 \perp (A_1B_1C_1) \\ B_1D_1 \perp (A_1B_1C_1) \end{array} \right) \Rightarrow (B_1D_1 \perp DD_1), \quad DD_1 = \frac{18}{\sqrt{2}} = 9\sqrt{2}$$

4) По свойству диагонали прямоугольного параллелепипеда $B_1D_1^2 = AD^2 + DC^2 + DD_1^2$.

$$18^2 = 9^2 + (9\sqrt{2})^2 + DC^2, \quad DC = 9$$

$$V = AD \cdot DC \cdot D_1D = 9 \cdot 9 \cdot 9\sqrt{2} = 729\sqrt{2}$$

Ответ:

$$729\sqrt{2} \text{ см}^3$$

Домашнее задание

- п. 63, п. 64

УЧИТЬ

- №654, №656