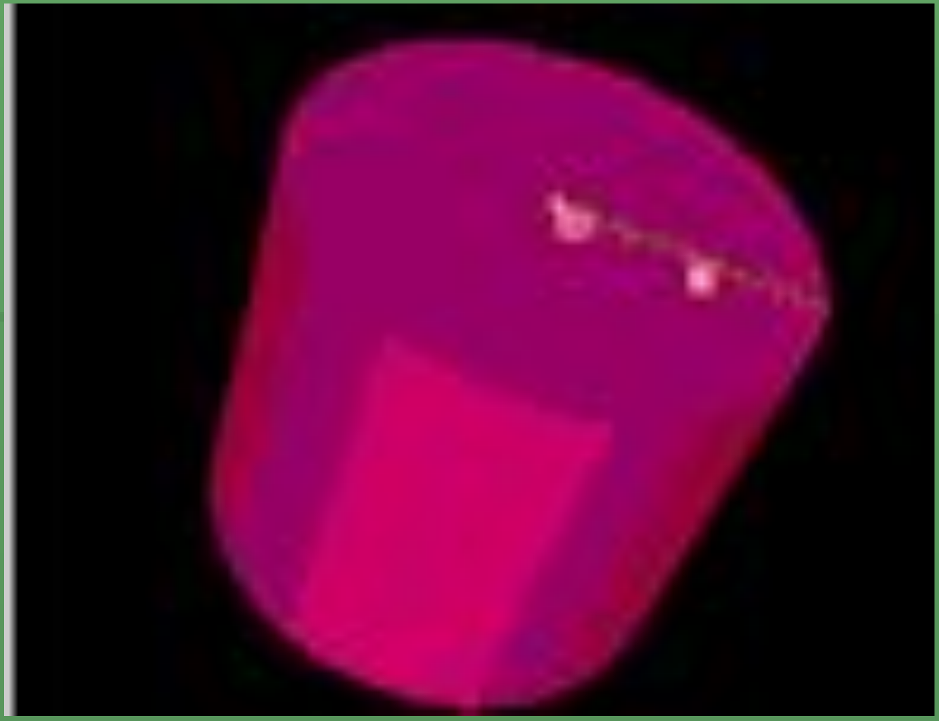
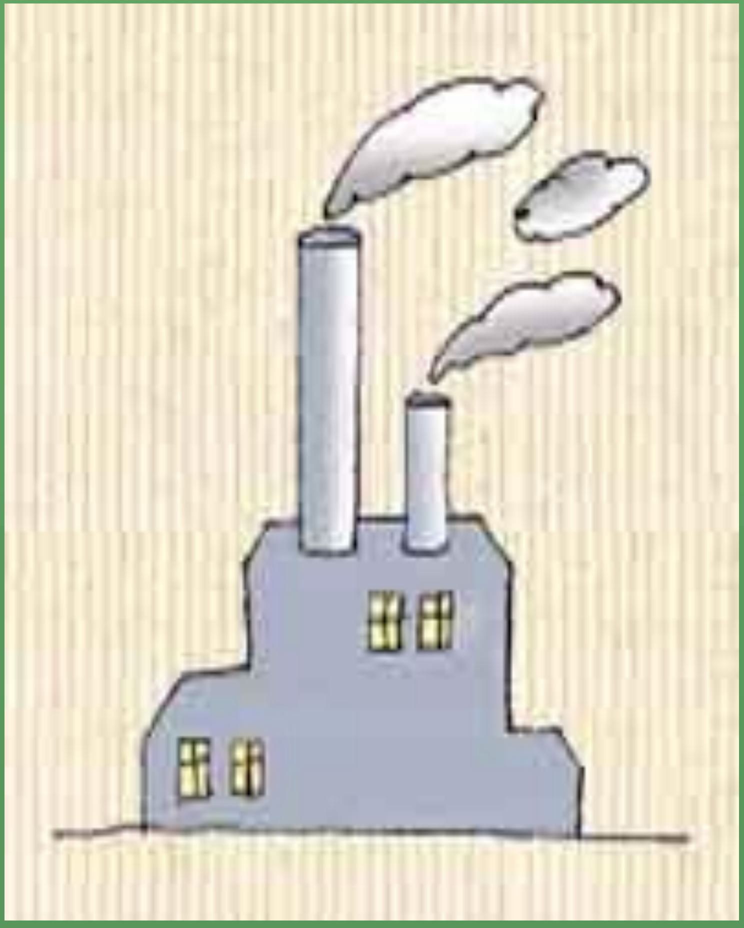
Объем цилиндра

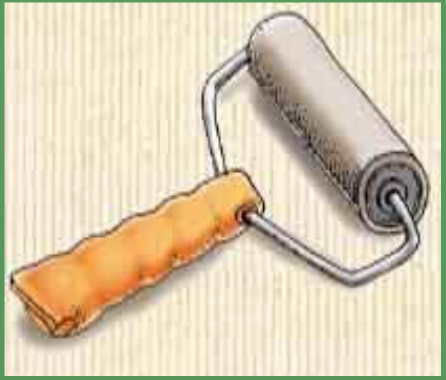
Цилиндр: история

- Слово "цилиндр" происходит от греческого kylindros, что означает "валик", "каток " …



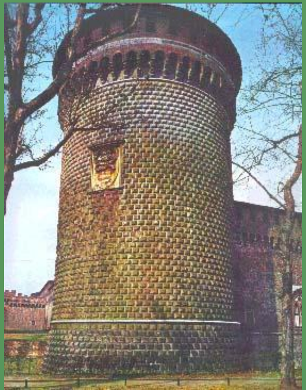
Цилиндры из жизни





Цилиндры-башни

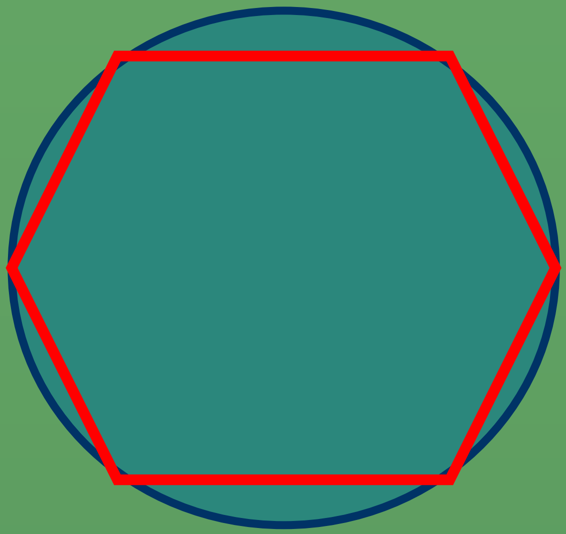
- Водовзводная башня (Москва)
- Собственный дом архитектора К. Мельникова (Москва)
- Замок Сфорца (Милан)



Объём цилиндра

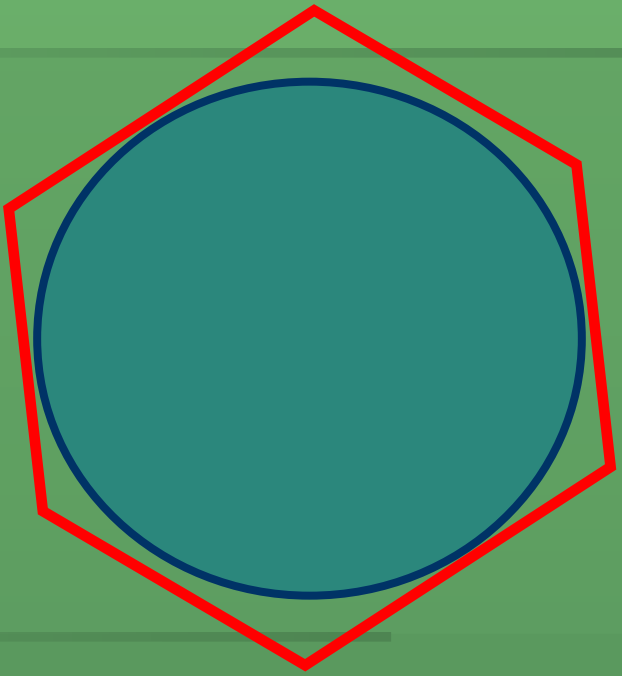
Основание цилиндра - круг

Объём цилиндра



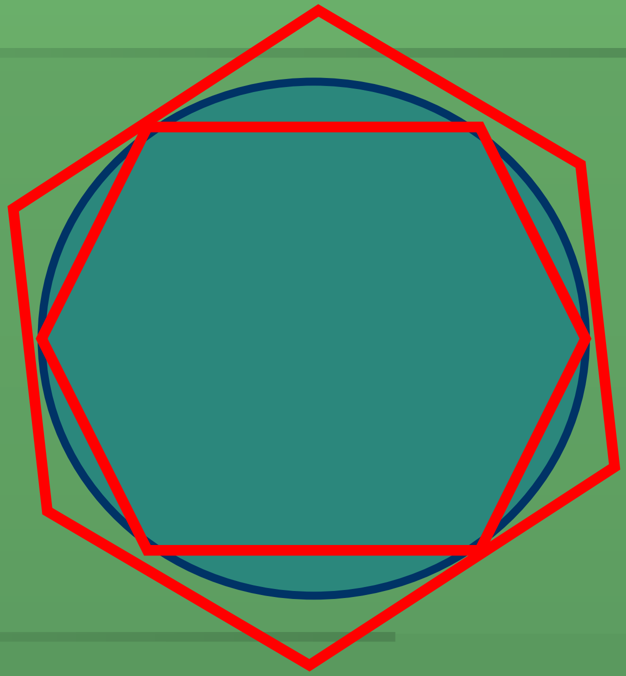
Многоугольник P_1

Объём цилиндра



Многоугольник P_2

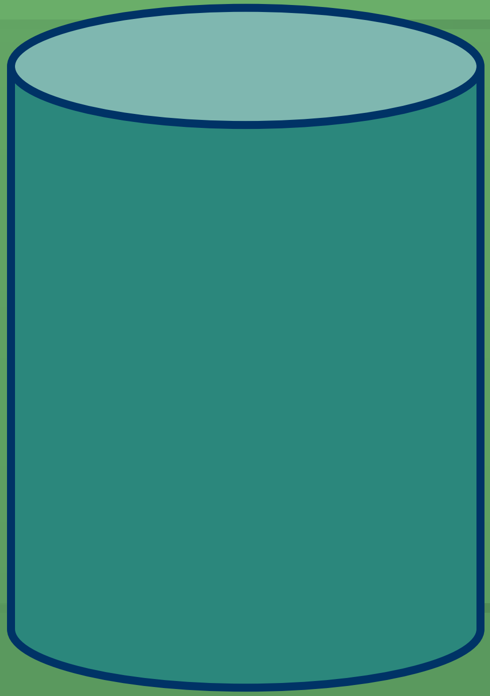
Объём цилиндра



$$При\ n \to \infty$$

$$S_{P_1} \to S_{осн},\ S_{P_2} \to S_{осн}.$$

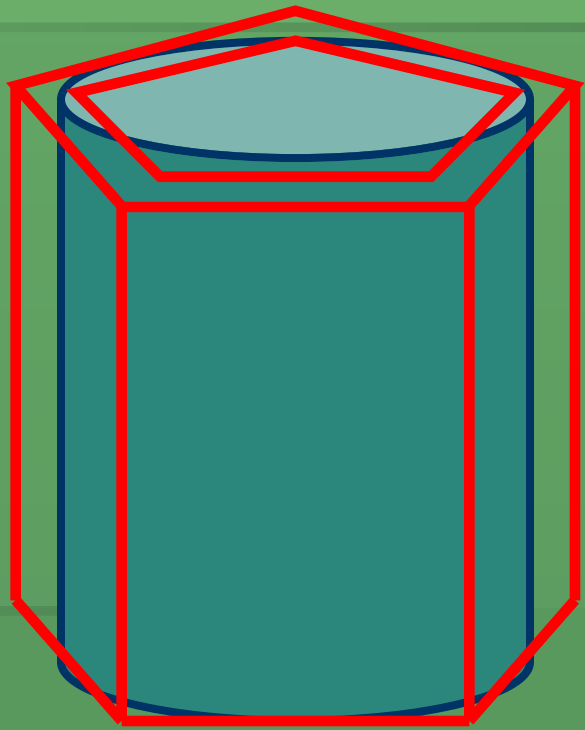
Объём цилиндра



Призма называется вписанной в цилиндр, если ее вершины лежат на окружностях, ограничивающих основания цилиндра

Призма называется описанной около цилиндра, если ее основания - многоугольники, вписанные в основания цилиндра

Объём цилиндра



$$\textit{При } n \to \infty \quad S_{P_1} \to S_{осн}, S_{P_2} \to S_{осн},$$

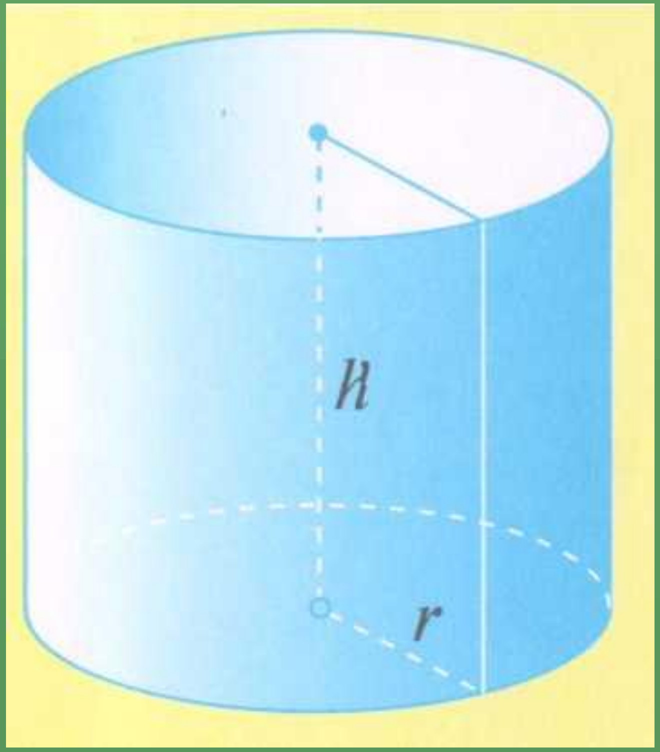
$$V_{P_1} \to V_{ц}, V_{P_2} \to V_{ц}.$$

Объём цилиндра

- Объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

$$V = SH$$

$$V = \pi r^2 H$$



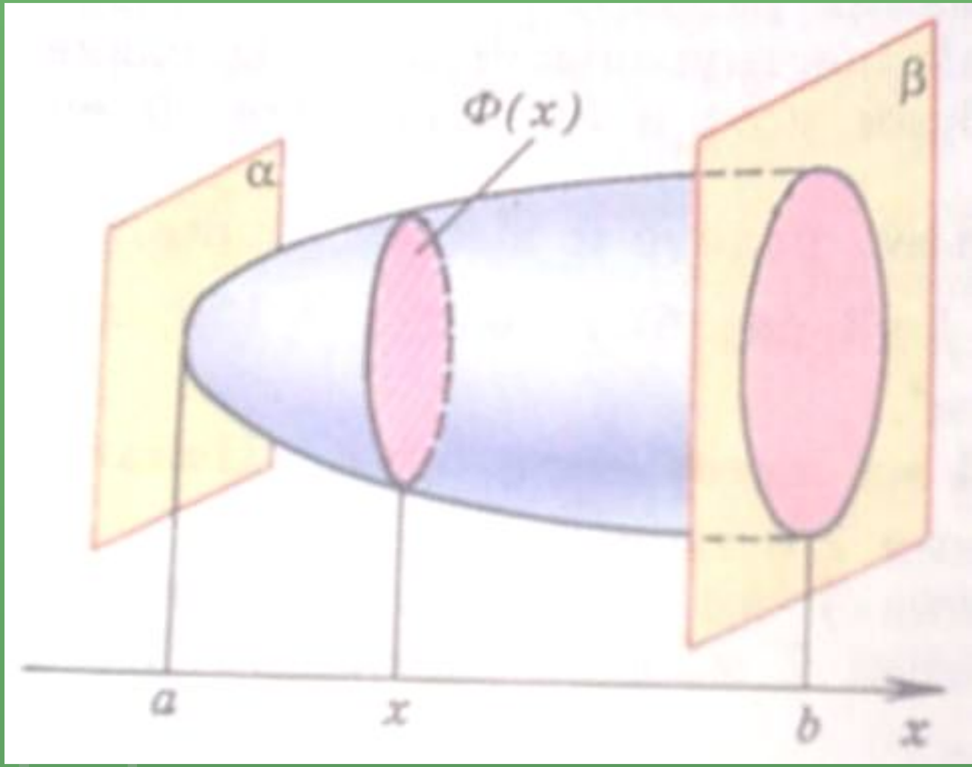
Вычисление объемов тел с помощью определенного интеграла

- Если функция f(x) непрерывна на промежутке I числовой оси, содержащей точки x = a и x = b, то разность значений F (b) – F (a) (где F(x) - первообразная f(x) на I) называется ***определенным интегралом*** от функции f(x) от a до b.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

формула Ньютона-Лейбница.

Вычисление объёмов тел.



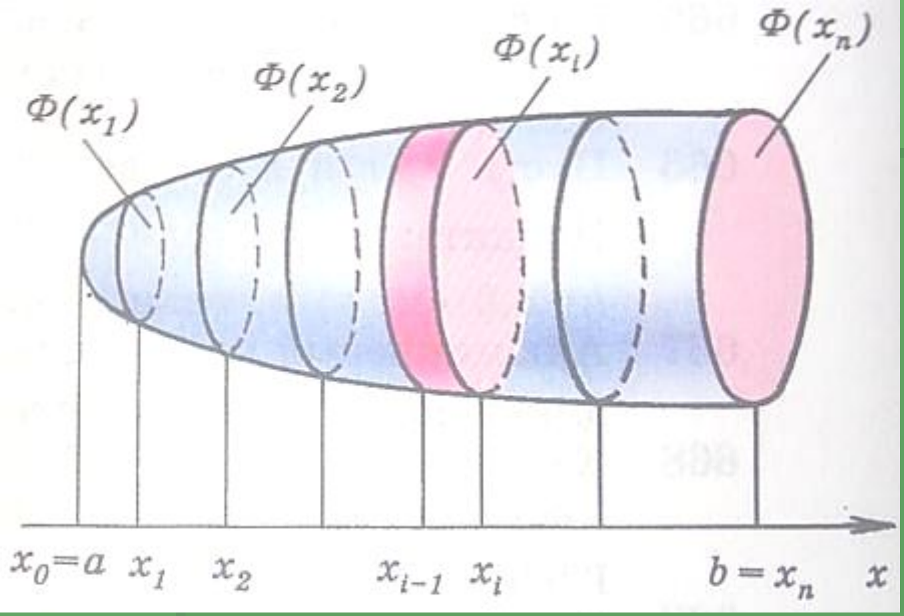
1. Заключаем тело Т между двумя параллельными плоскостями.

2. Вводим систему координат так, что ось ОХ перпендикулярна плоскостям.

3. Проводим плоскость Φ(x) параллельно плоскостям через точку с абсциссой x.

4. Определяем вид сечения и выражаем площадь через функцию S(x).

5. Проверяем, является ли функция S(x) непрерывной на [a;b].



6. Разбиваем [a;b] на n - равных отрезков точками

$a = x_0, x_1, x_2, \ldots x_n = b$

и проводим через x_i плоскости перпендикулярно OX.

7. Плоскости разбивают тело T на n- тел $T_1, T_2, T_3, \ldots T_n$ с основаниями $\Phi(x_i)$ и высотой $\Delta x_i = (b - a)/n$

8. $V \approx V_n = (S(x_1) + S(x_2) + \ldots + S(x_n))\Delta x_i = (S(x_1) + S(x_2) + \ldots$

$+ S(x_n))(b - a)/n$. При $n \to \infty$, $V_n \to V$, поэтому $V = \lim\limits_{n\to\infty} V_n$

но $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = \int_a^b S(x)dx$

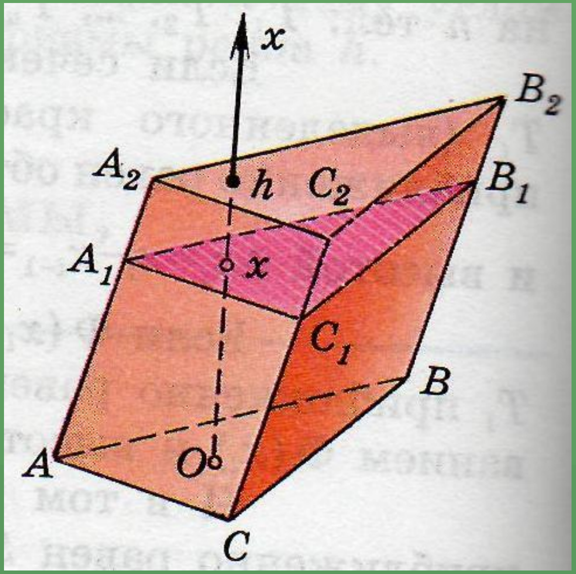
9.

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}$$

Задача 1.Найти объём наклонной треугольной призмы с основанием S и высотой h.

1. Введём ось OX перпендикулярно основаниям призмы.

2. $(ABC) \cap OX = a$, $a=0$, $(A_1B_1C_1) \cap OX = b$, $b=h$



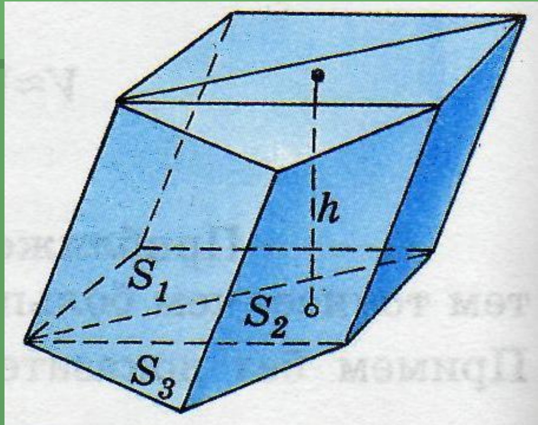
3. Проведём плоскость перпендикулярно OX через точку с абсциссой x. $A_2B_2C_2$-треугольник, равный основаниям. Площадь $A_2B_2C_2$ равна S.

4. S(x) непрерывна на [0;h]

5. $$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h Sdx = Sx\Big|_0^h = Sh - 0 = Sh$$

Ответ: V=Sh

2. Докажем теперь теорему для произвольной призмы с высотой *h* и площадью основания S. Такую призму можно разбить на треугольные призмы с общей высотой *h*. Выразим объем каждой треугольной призмы по доказанной нами формуле и сложим эти объемы. Вынося за скобки общий множитель *h,* получим в скобках сумму площадей оснований треугольных призм, т. е. площадь *S* основания исходной призмы. Таким образом, объем исходной призмы равен *S * h.* Теорема доказана.



$$V = (S_1 + S_2 + S_3)\,h = S\,h$$

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБЪЁМОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА.

1. Ввести систему координат так, что ось ОХ перпендикулярна основанию геометрического тела.

2. Найти пределы интегрирования a и b.

3. Провести сечение плоскостью перпендикулярно оси ОХ через точку с абсциссой x.

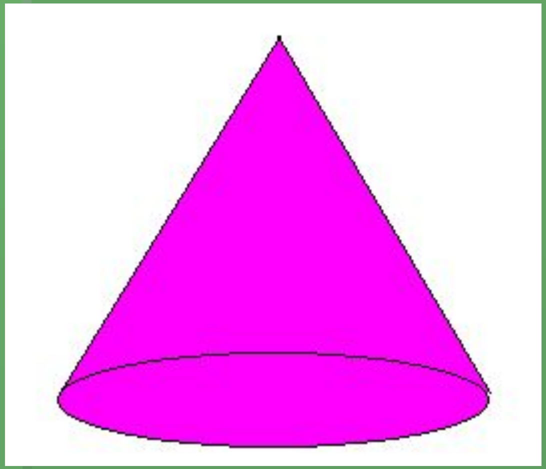
Определить вид сечения, задать формулой его площадь как функцию S(X).

4. Проверить непрерывность функции S(X) на [a;b].

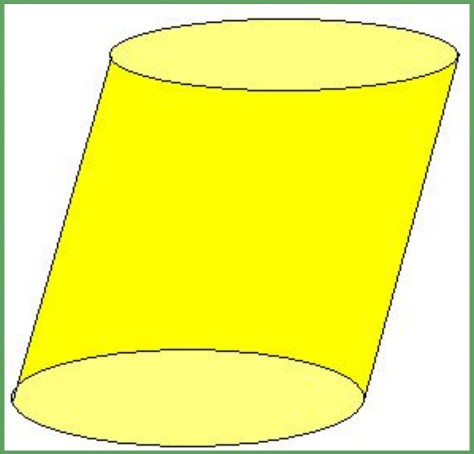
5.

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

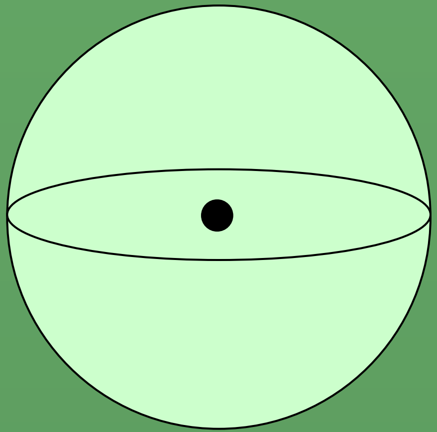
Задание: Найти объёмы геометрических тел с помощью определённого интеграла.



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



$$V = \pi r^2 h$$



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$