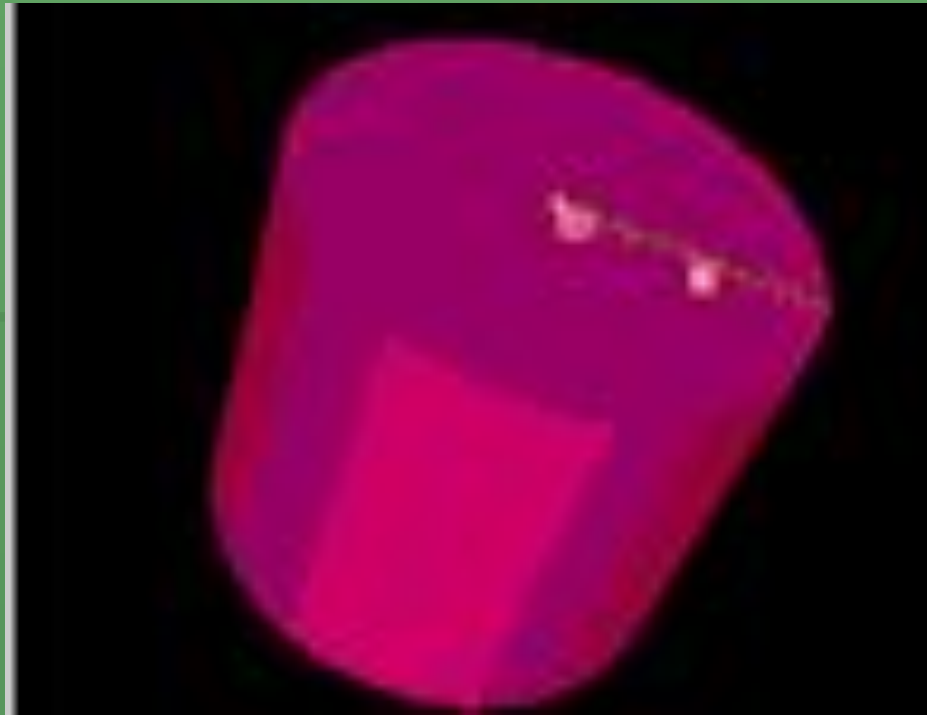


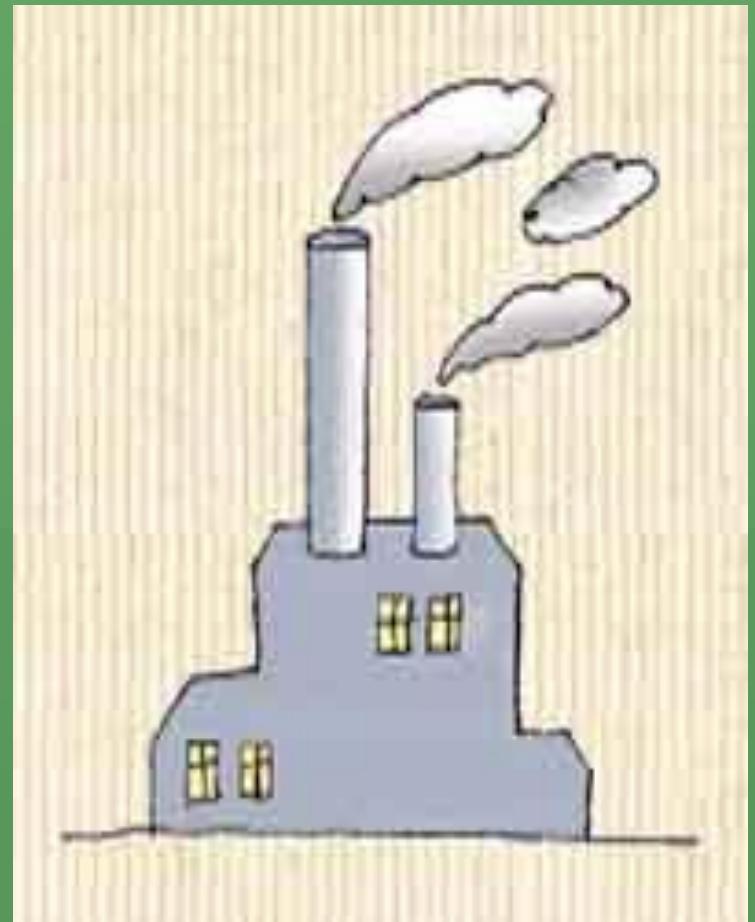
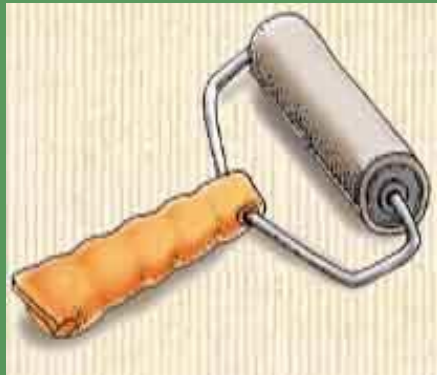
Объем цилиндра

Цилиндр: история

- Слово "цилиндр" происходит от греческого *kylindros*, что означает "валик", "каток" ...

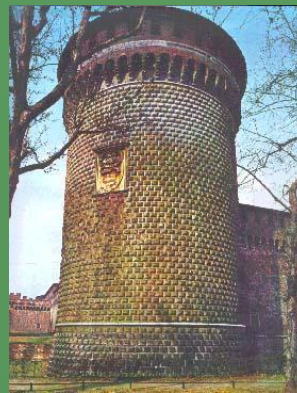
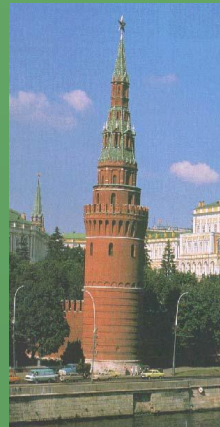


Цилиндры из жизни



Цилиндры-башни

- Водовзводная башня (Москва)
- Собственный дом архитектора К. Мельникова (Москва)
- Замок Сфорца (Милан)

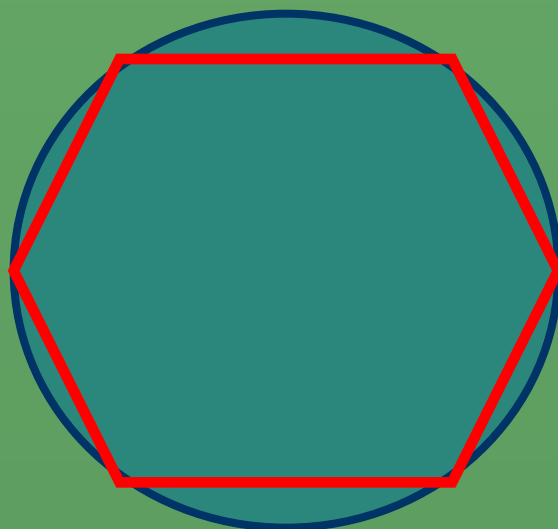


Объём цилиндра



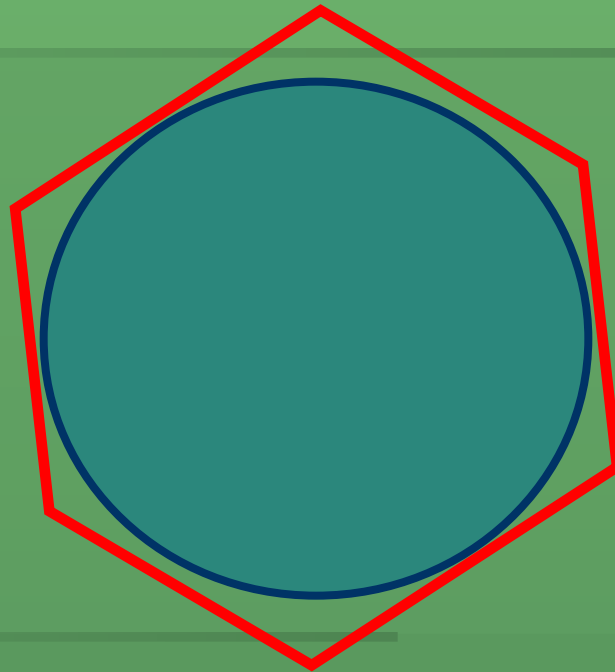
Основание цилиндра - круг

Объём цилиндра



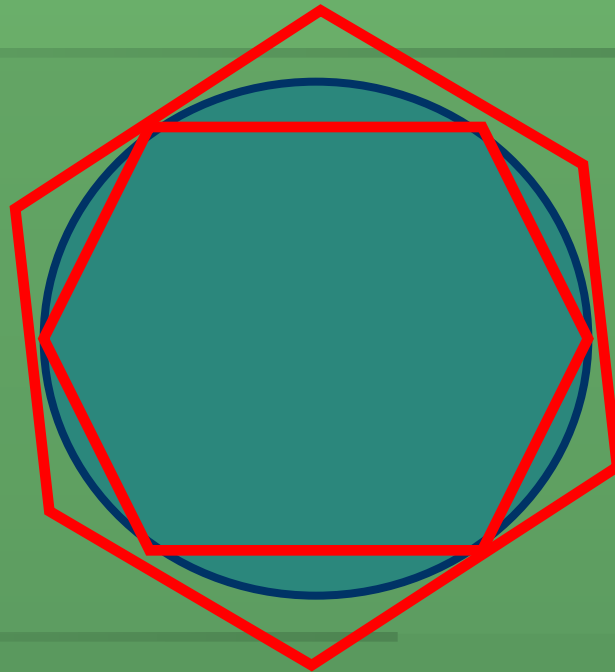
Многоугольник P_1

Объём цилиндра



Многоугольник P_2

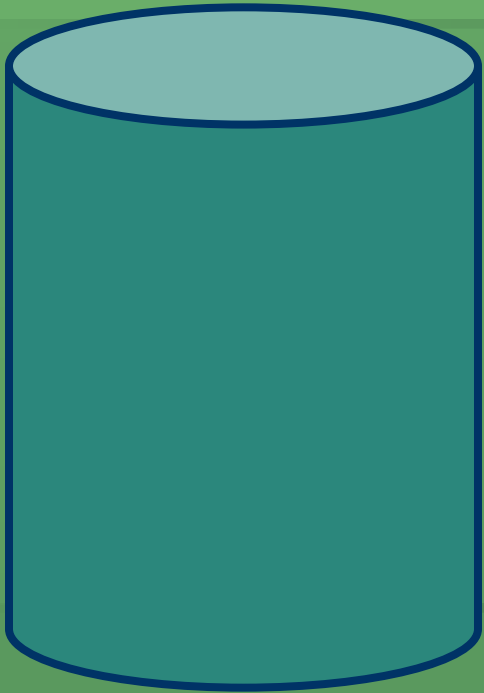
Объём цилиндра



При $n \rightarrow \infty$

$$S_{P_1} \rightarrow S_{\text{осн}}, S_{P_2} \rightarrow S_{\text{осн}}.$$

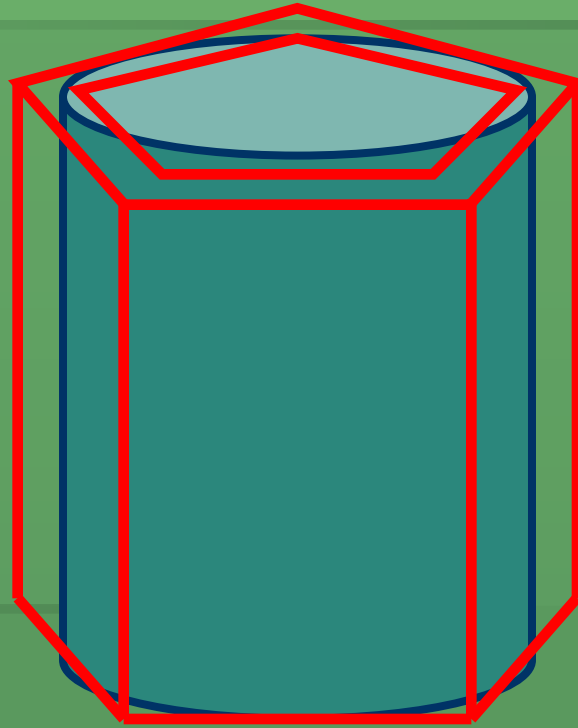
Объём цилиндра



Призма называется вписанной в цилиндр, если ее вершины лежат на окружностях, ограничивающих основания цилиндра

Призма называется описанной около цилиндра, если ее основания - многоугольники, вписанные в основания цилиндра

Объём цилиндра



$$\text{При } n \rightarrow \infty \quad S_{P_1} \rightarrow S_{\text{осн}}, S_{P_2} \rightarrow S_{\text{осн}},$$

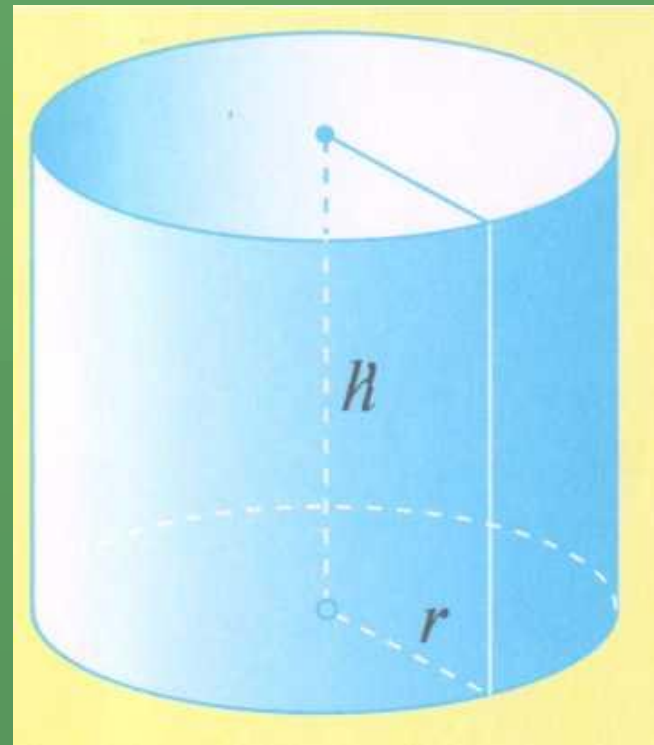
$$V_{P_1} \rightarrow V_{\text{ц}}, V_{P_2} \rightarrow V_{\text{ц}}.$$

Объём цилиндра

- Объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

$$V = SH$$

$$V = \pi r^2 H$$



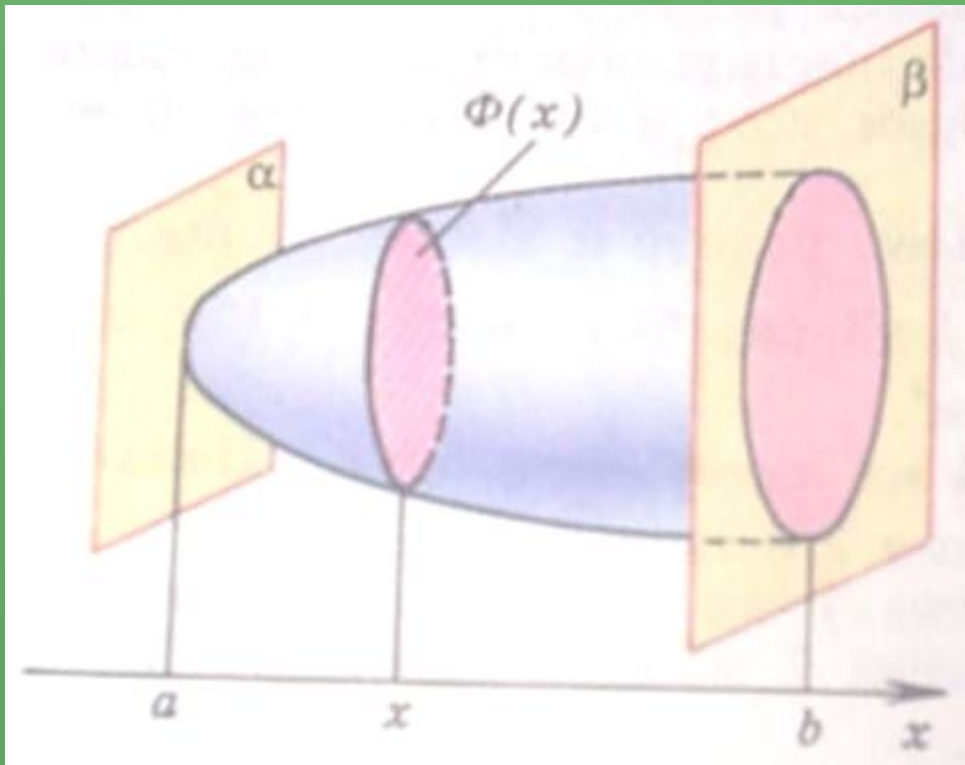
Вычисление объемов тел с помощью определенного интеграла

- Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I числовой оси, содержащей точки $x = a$ и $x = b$, то разность значений $F(b) - F(a)$ (где $F(x)$ - первообразная $f(x)$ на I) называется **определенным интегралом** от функции $f(x)$ от a до b .

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

формула Ньютона-Лейбница.

Вычисление объёмов тел.



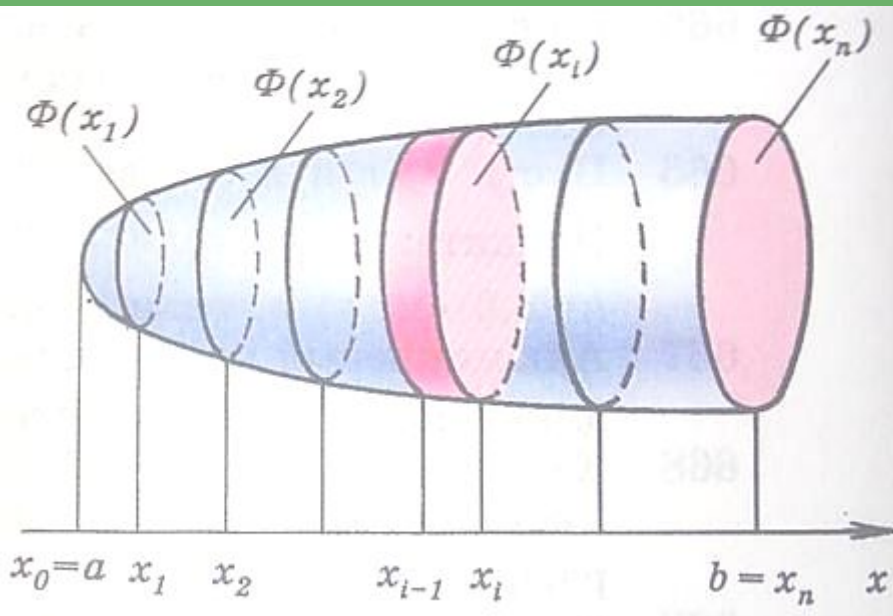
1. Заклучаем тело T между двумя параллельными плоскостями.
2. Вводим систему координат так, что ось Ox перпендикулярна плоскостям.
3. Проводим плоскость $\Phi(x)$ параллельно плоскостям через точку с абсциссой x .
4. Определяем вид сечения и выражаем площадь через функцию $S(x)$.
5. Проверяем, является ли функция $S(x)$ непрерывной на $[a;b]$.

6. Разбиваем $[a;b]$ на n - равных отрезков точками

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$$

и проводим через x_i плоскости перпендикулярно OX .

7. Плоскости разбивают тело T на n - тел $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ с основаниями $\Phi(x_i)$ и высотой $\Delta x_i = (b - a)/n$



$$8. V \approx V_n = (S(x_1) + S(x_2) + \dots + S(x_n)) \Delta x_i = (S(x_1) + S(x_2) + \dots$$

$$+ S(x_n))(b - a)/n. \quad \text{При } n \rightarrow \infty, V_n \rightarrow V, \text{ поэтому } V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n$$

НО

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \int_a^b S(x) dx$$

9.

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Задача 1. Найти объём наклонной треугольной призмы с основанием S и высотой h .

1. Введём ось OX перпендикулярно основаниям призмы.
2. $(ABC) \cap OX = a$, $a=0$, $(A_1B_1C_1) \cap OX = b$, $b=h$

3. Проведём плоскость перпендикулярно OX через точку с абсциссой x .

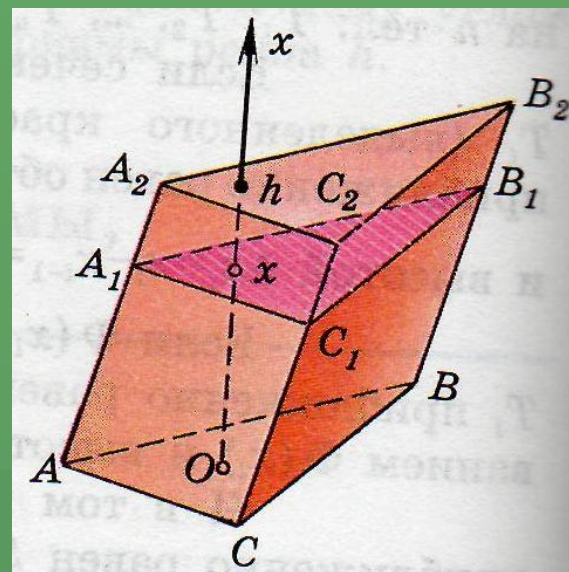
$A_2B_2C_2$ -треугольник, равный основаниям.

Площадь $A_2B_2C_2$ равна S .

4. $S(x)$ непрерывна на $[0;h]$

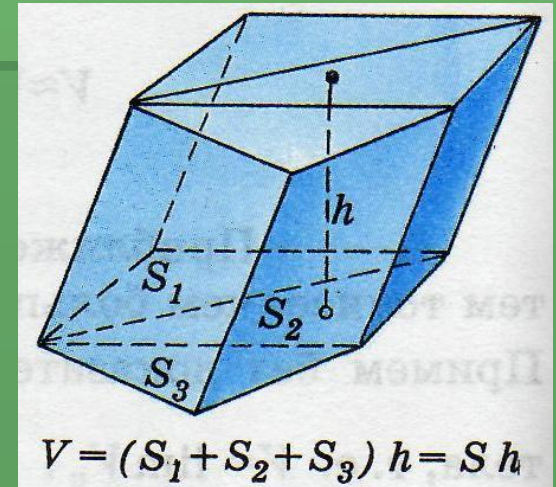
5.

$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h S dx = Sx \Big|_0^h = Sh - 0 = Sh$$



Ответ: $V=Sh$

2. Докажем теперь теорему для произвольной призмы с высотой h и площадью основания S . Такую призму можно разбить на треугольные призмы с общей высотой h . Выразим объем каждой треугольной призмы по доказанной нами формуле и сложим эти объемы. Вынося за скобки общий множитель h , получим в скобках сумму площадей оснований треугольных призм, т. е. площадь S основания исходной призмы. Таким образом, объем исходной призмы равен $S * h$. Теорема доказана.



АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБЪЁМОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА.

1. Ввести систему координат так, что ось OX перпендикулярна основанию геометрического тела.
2. Найти пределы интегрирования a и b .
3. Провести сечение плоскостью перпендикулярно оси OX через точку с абсциссой x .

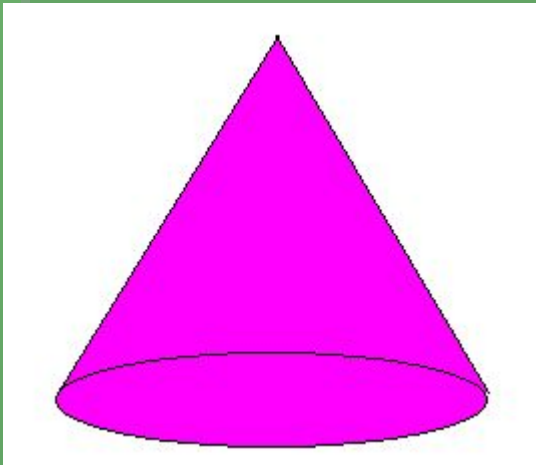
Определить вид сечения, задать формулой его площадь как функцию $S(x)$.

4. Проверить непрерывность функции $S(x)$ на $[a;b]$.

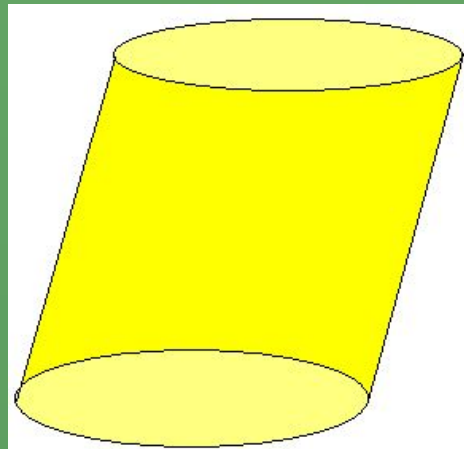
5.

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

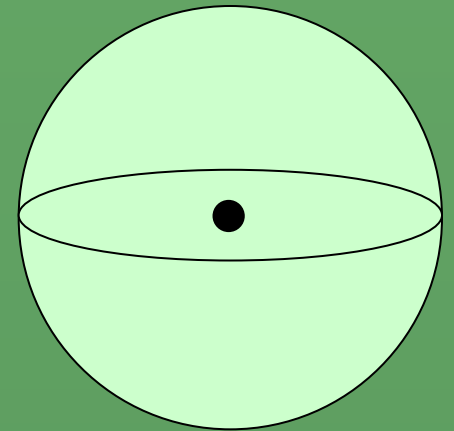
Задание: Найти объёмы геометрических тел с помощью определённого интеграла.



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



$$V = \pi r^2 h$$



$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$