

Слайды к теме

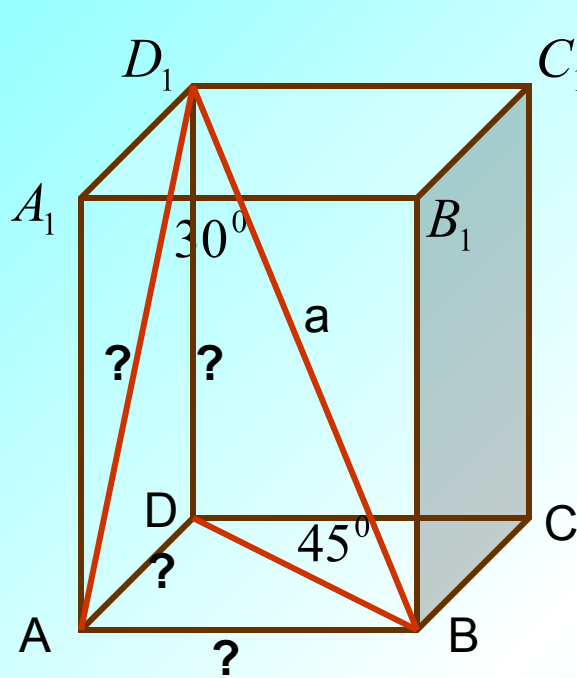
"Объемы тел"

Учебник Л.С.Атанасяна «Геометрия 10-11»

Учитель: Рожкова Надежда Даниловна

Объем прямоугольного параллелепипеда

Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна a и составляет угол в 30° с плоскостью боковой грани и угол 45° с плоскостью основания.



1. Объясните, как построить угол в 30° между диагональю параллелепипеда и плоскостью боковой грани
2. Объясните, как построить угол в 45° между диагональю параллелепипеда и плоскостью боковой грани
3. Найдите длины отрезков AB, AD_1, DD_1
4. Составьте план вычисления длины отрезка AD и объема параллелепипеда

Объем прямой призмы

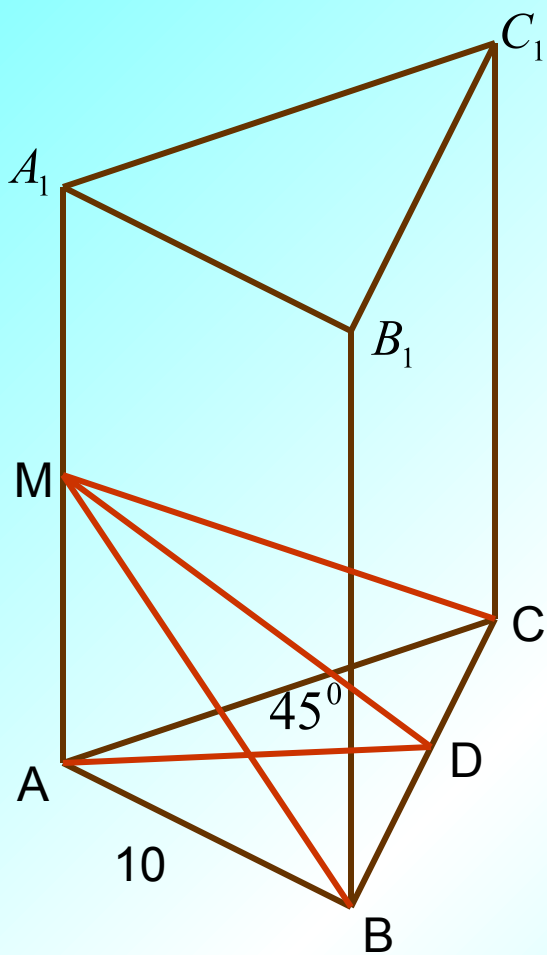
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через сторону BC основания и середину бокового ребра AA_1 проведено сечение, составляющее угол в 45° с плоскостью основания. Найдите объем призмы, если сторона ее основания равна 10 см.

Решение.

В треугольнике ABD : $AD = 10 \cos 30^\circ = 5\sqrt{3}$

В треугольнике MAD : $AA_1 = 2 AM = 2 AD = 10\sqrt{3}$

$$V = \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 10\sqrt{3} = 750$$

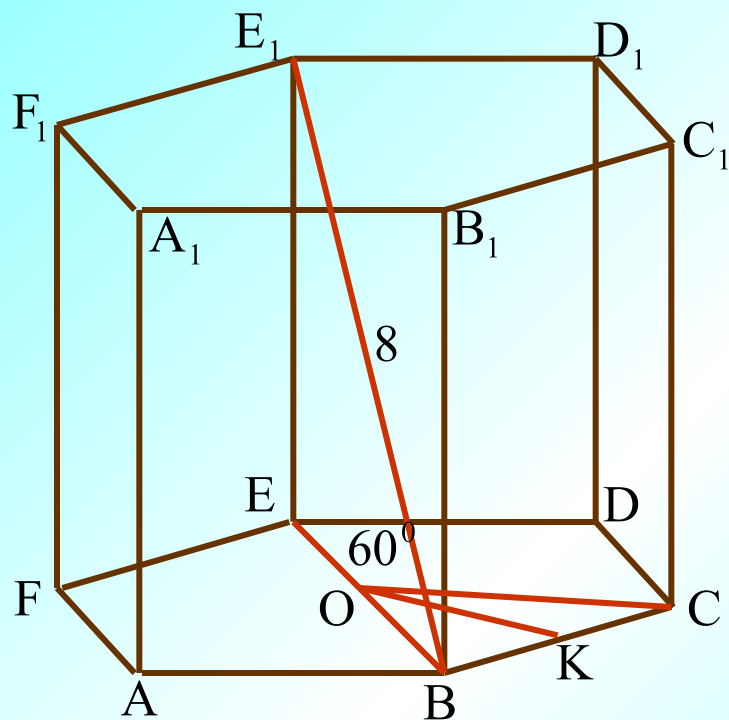


Объем призмы и цилиндра

Дана правильная шестиугольная призма, O – центр ее основания,

$$BE_1 = 8 \text{ см}, \quad \angle E_1BE = 60^\circ$$

Найдите: объем призмы; объем описанного около призмы цилиндра;
объем вписанного в призму цилиндра



Решение.

$$EE_1 = 4\sqrt{3} \quad BE = 4 \quad OB = 2$$

$$OK = \sqrt{3}$$

$$S_{\text{осн. призмы}} = 6\sqrt{3}$$

$$V_{\text{призмы}} = 72$$

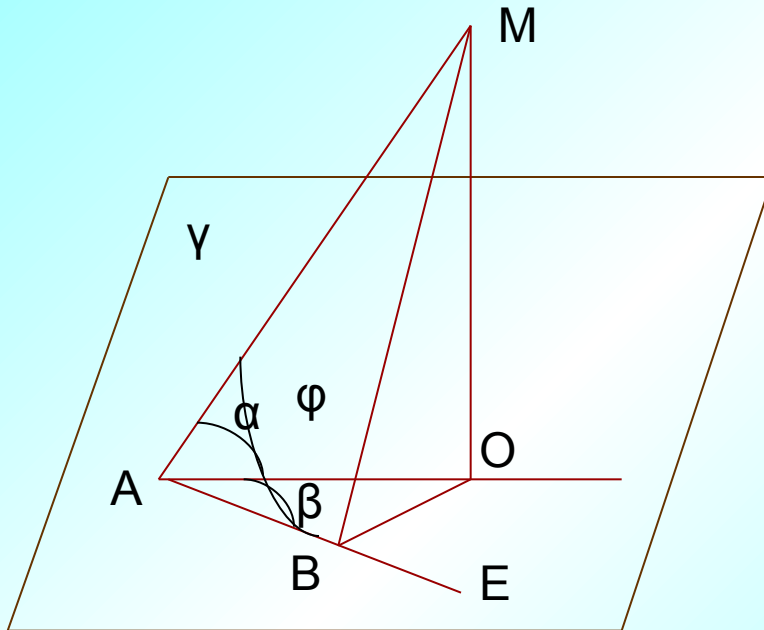
$$V_{\text{цил. впис.}} = 12\pi\sqrt{3}$$

$$V_{\text{цил. опис.}} = 16\pi\sqrt{3}$$

Задача

Дано: AM – наклонная к плоскости γ , $MO \perp \gamma$, AE – луч на плоскости γ , образующий острый угол β с проекцией наклонной; угол $MAO = \alpha$, угол $BAO = \beta$, угол $MAB = \varphi$.

Докажите: $\cos \varphi = \cos \alpha \cdot \cos \beta$



Доказательство.

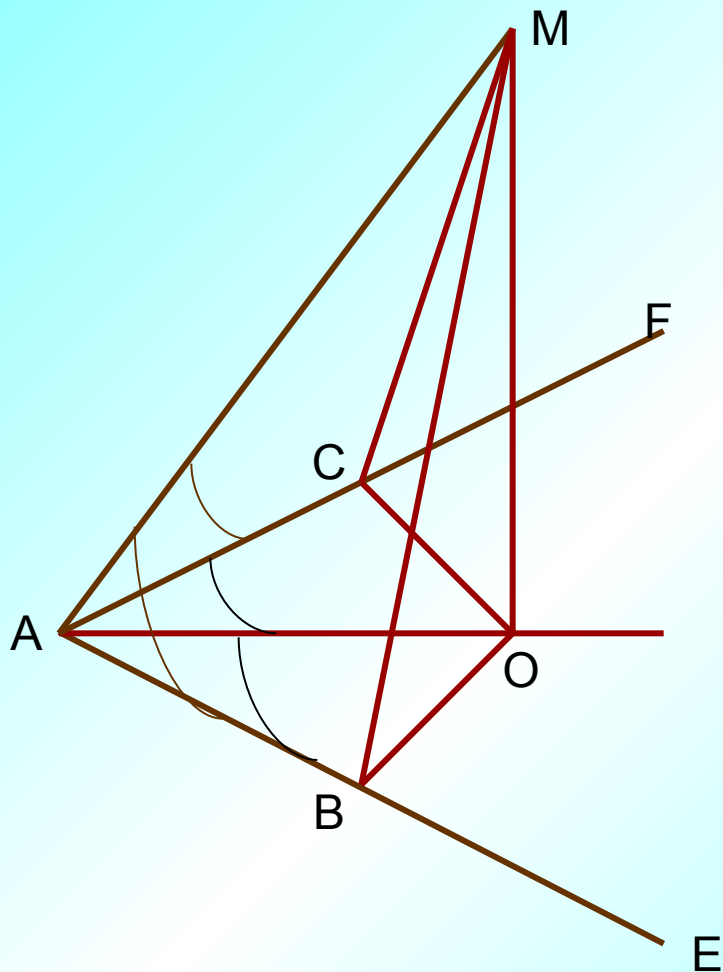
Пусть $OB \perp AE$, тогда $AB \perp MB$,

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{AB}{AM} = \frac{AB}{AO} \cdot \frac{AO}{AM} = \\ &= \cos \alpha \cdot \cos \beta\end{aligned}$$

Задача

Дано: луч AM образует равные острые углы с лучами AF и AE .

Докажите: проекцией луча AM на плоскость EAF является биссектриса AO угла EAF .



Доказательство.

Построим $OB \perp AE$, $OC \perp AF$;

$\triangle ABM = \triangle ACM$ по гипотенузе и острому углу, значит $AB = AC$;

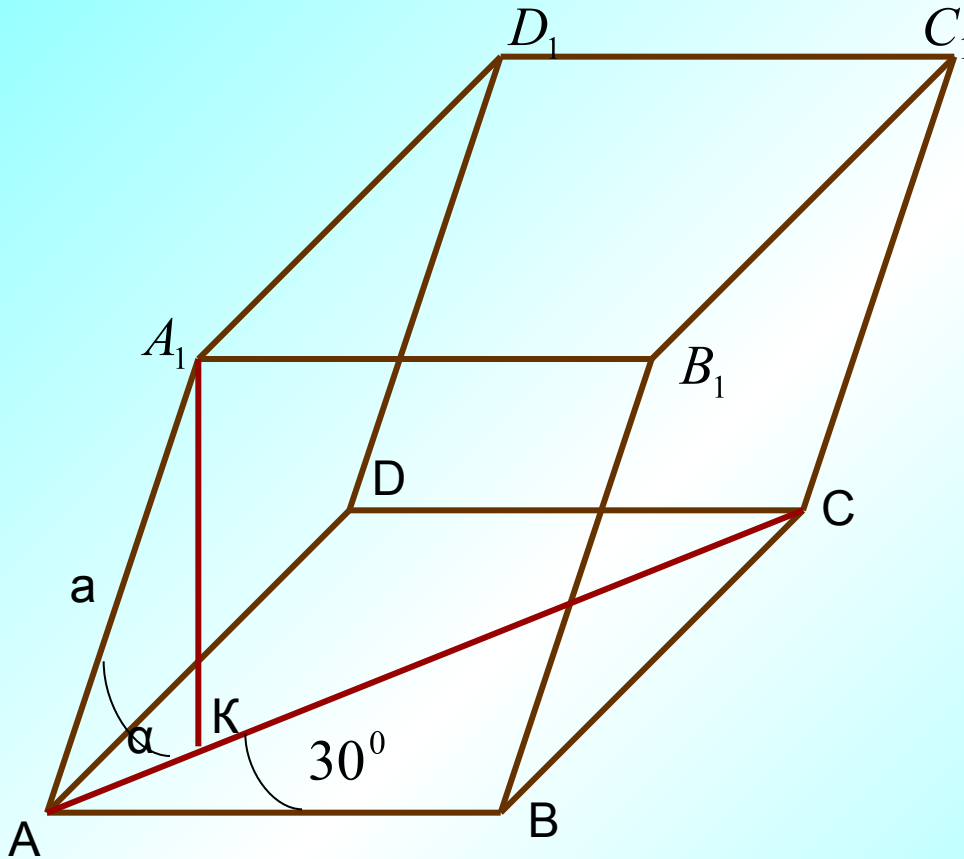
$\triangle ABO = \triangle ACO$ по гипотенузе и острому углу, значит угол BAO равен углу CAO ;

AO – биссектриса угла EAF

Объем наклонной призмы

Все грани параллелепипеда – равные ромбы со стороной a и острым углом 60°

Найдите объем параллелепипеда.



Решение.

Построим проекцию ребра AA_1

Пусть $\angle A_1AK = \alpha$

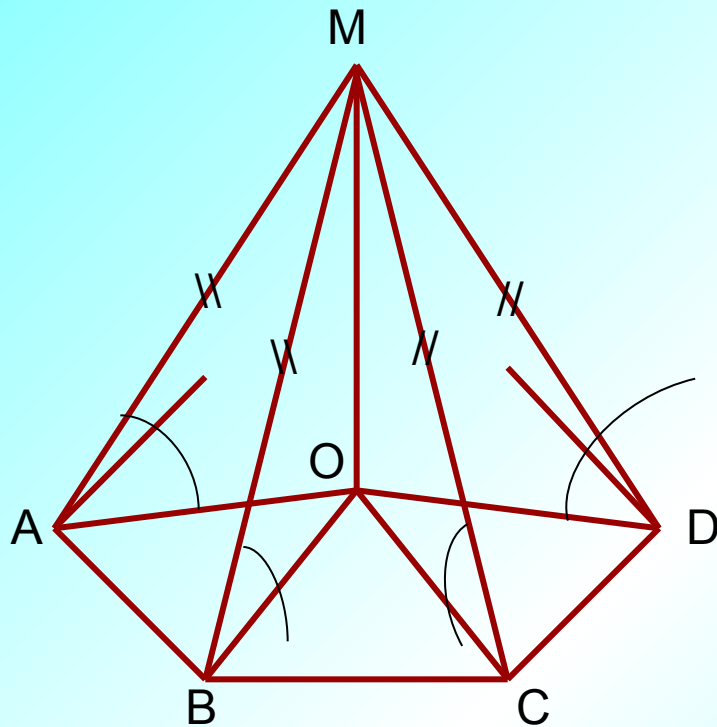
тогда $\cos 60 = \cos \alpha \cdot \cos 30$,

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Из } \triangle AA_1K : A_1K = a \sin \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$V = a^2 \sin 60^\circ \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{2}$$

Если боковые ребра пирамиды равны (или составляют равные углы с плоскостью основания), то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды.



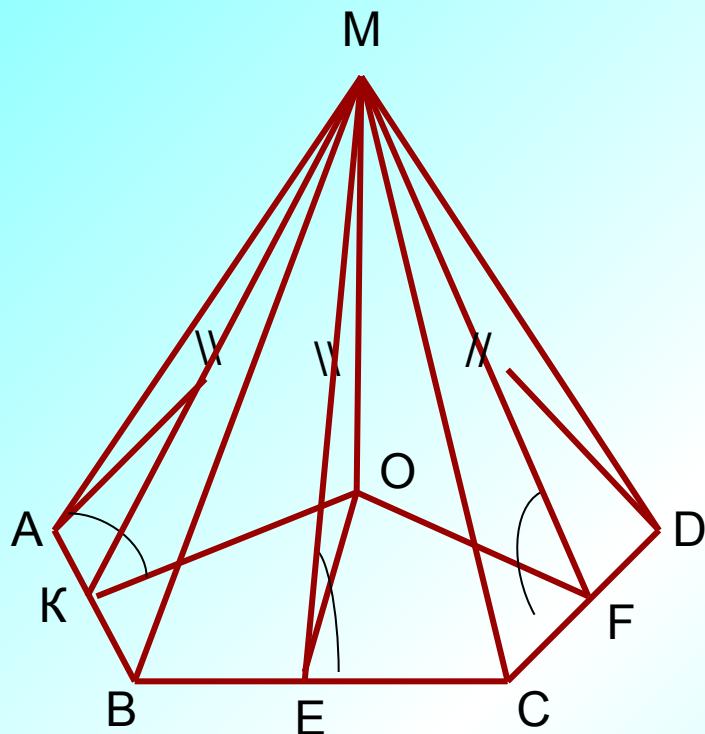
Доказательство.

Треугольники MAO , MBO , MCO , ...
равны по катету и гипотенузе.

Поэтому $OA = OB = OC = \dots$,

т.е точка O – центр окружности,
описанной около основания пирамиды.

Если двугранные углы при основании пирамиды равны (или равны высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды), то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды.



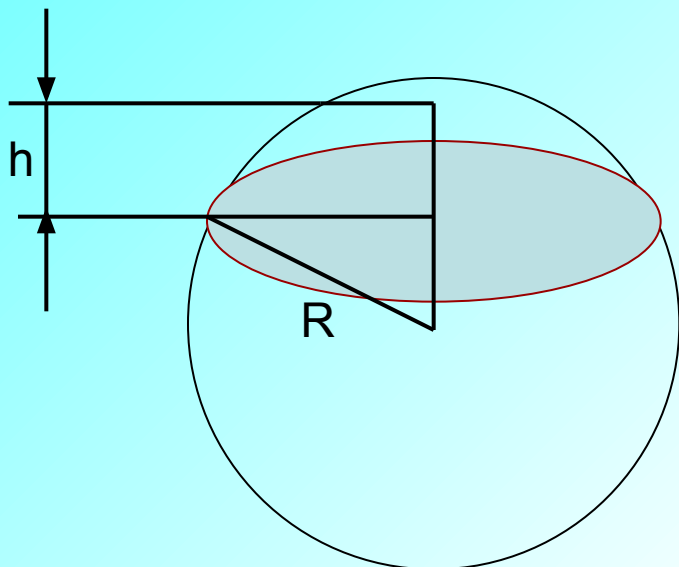
Доказательство.

Треугольники $МКО$, $МEO$, $МFO$, ...
равны по катету и гипотенузе.

Поэтому $OK = OE = OF = \dots$,

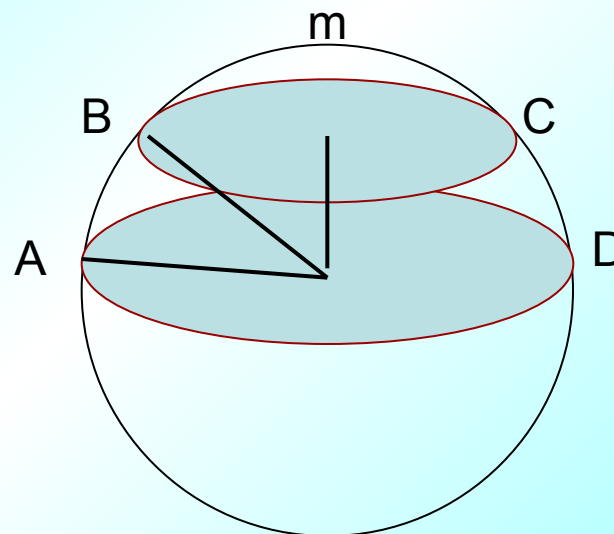
т.е точка O – центр окружности,
вписанной в основание пирамиды.

Шаровой сегмент



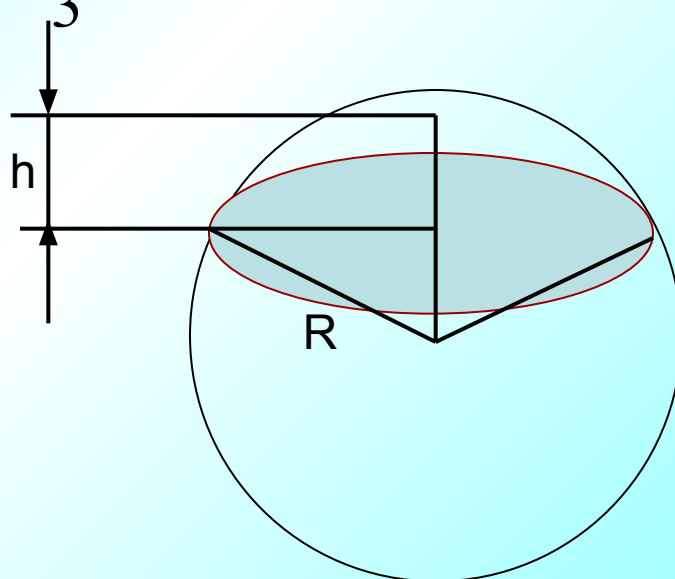
$$V_{\text{сегм}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right)$$

Шаровой слой



$$V_{\text{слоя}} = \frac{V_{\text{сегм.}}}{AmD} - \frac{V_{\text{сегм.}}}{BmC}$$

Шаровой сектор



$$V_{\text{сект}} = \frac{2}{3} \pi R^2 h$$