ОБЪЕМ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ

Объем – величина, аналогичная площади и сопоставляющая фигурам в пространстве неотрицательные действительные числа.

Для объемов пространственных фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам площадей плоских фигур, а именно:

1. Равные фигуры имеют равные объемы.

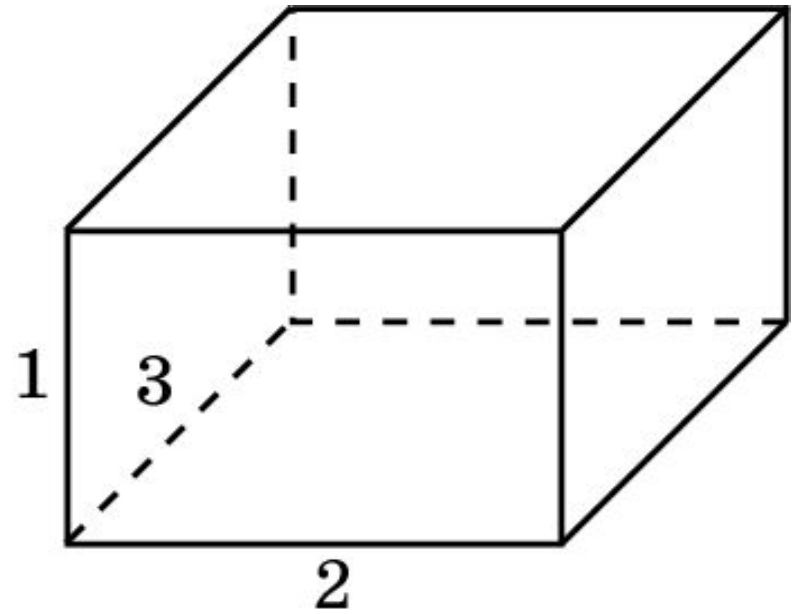
2. Если фигура Φ составлена из двух неперекрывающихся фигур Φ_1 и Φ_2, то объем фигуры Φ равен сумме объемов фигур Φ_1 и Φ_2, т.е. $V(\Phi)=V(\Phi_1)+V(\Phi_2)$.

3. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений, т. е. имеет место формула $V = a \cdot b \cdot c$, где a, b, c – ребра параллелепипеда.

Две фигуры, имеющие равные объемы, называются равновеликими.

Упражнение 1

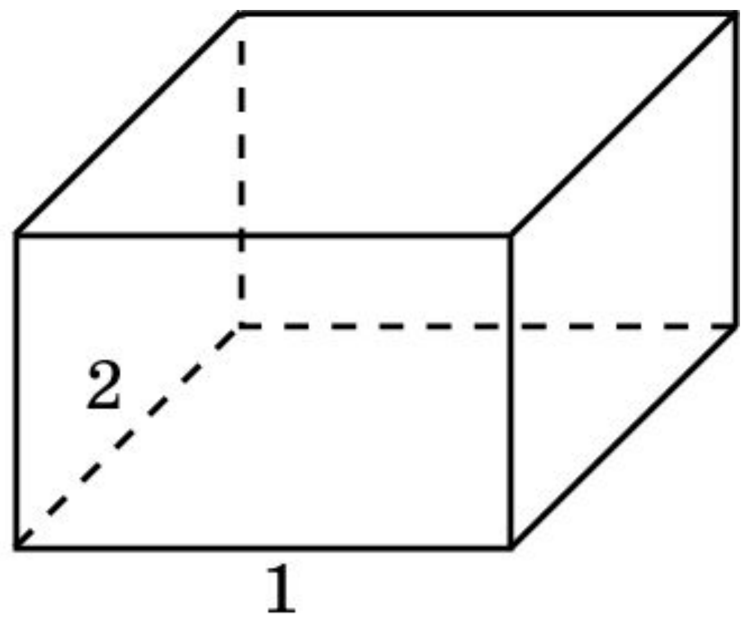
Ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2, 3. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: 6.

Упражнение 2

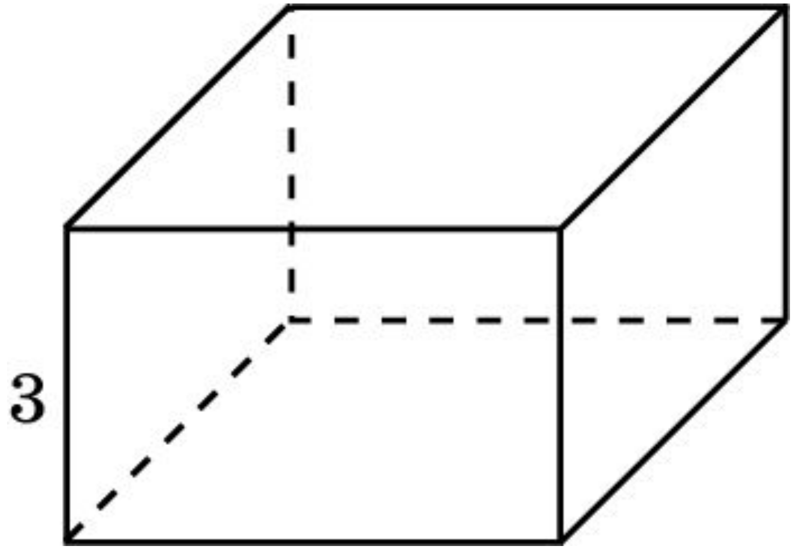
Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Объем параллелепипеда равен 3. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.



Ответ: $\frac{3}{2}$.

Упражнение 3

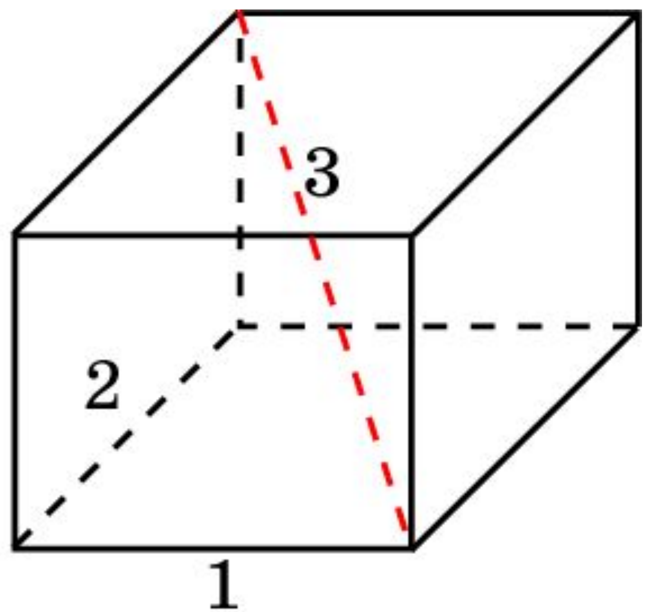
Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 2. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 3. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: 6.

Упражнение 4

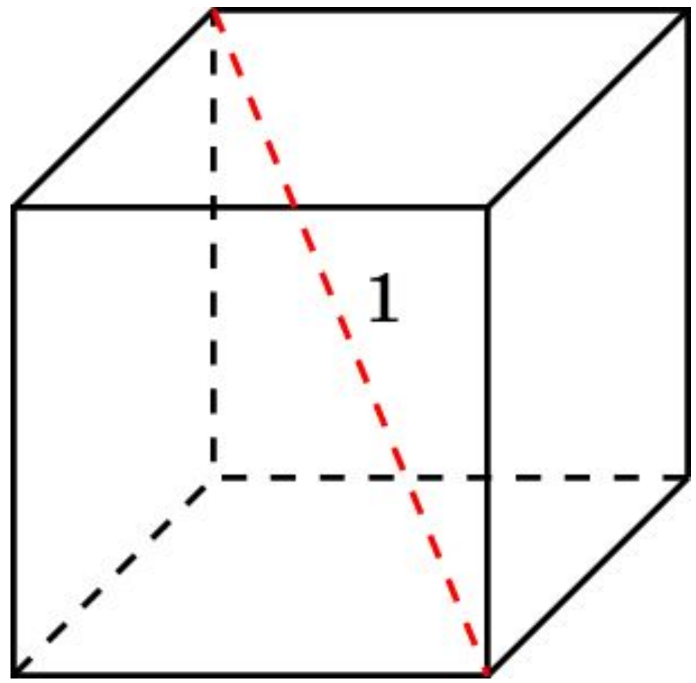
Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Диагональ параллелепипеда равна 3. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: 4.

Упражнение 5

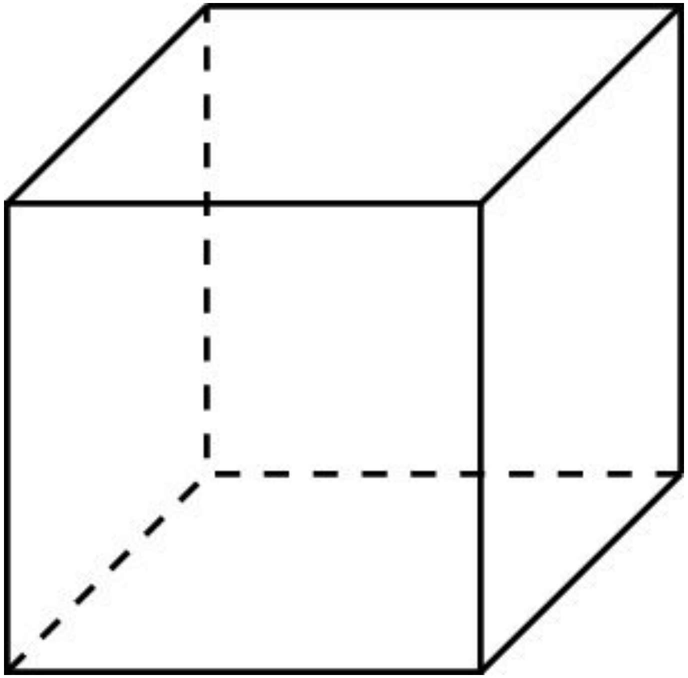
Диагональ куба равна 1. Найдите его объем.



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

Упражнение 6

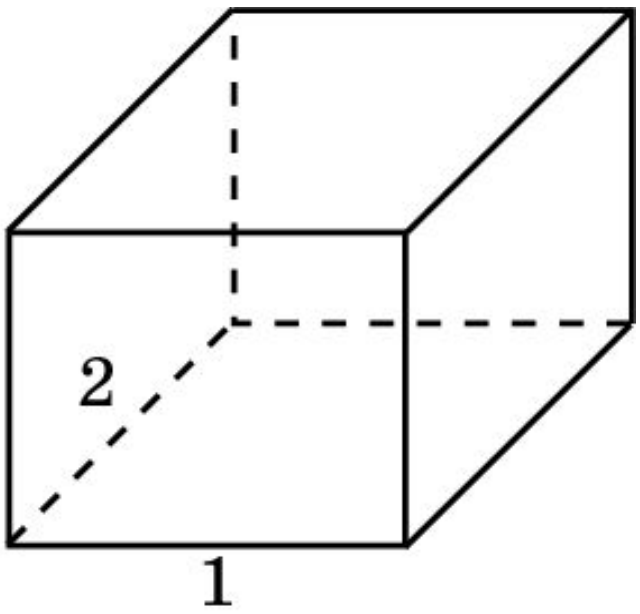
Площадь поверхности куба равна 1. Найдите его объем.



Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{36}$.

Упражнение 7

Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 10. Найдите объем параллелепипеда.



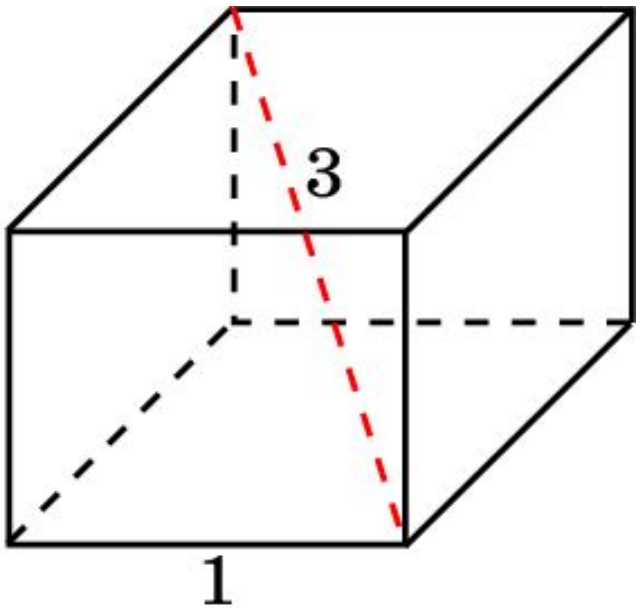
Решение. Пусть третье ребро параллелепипеда равно x. Тогда площадь поверхности будет равна 4 + 6x. Следовательно, x = 1.

Объем параллелепипеда будет равен 2.

Ответ: 2.

Упражнение 8

Ребро прямоугольного параллелепипеда равно 1. Диагональ равна 3. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите объем параллелепипеда.



Решение. Пусть второе ребро параллелепипеда равно x. Тогда третье ребро будет равно $\sqrt{8-x^2}$. Площадь поверхности будет равна

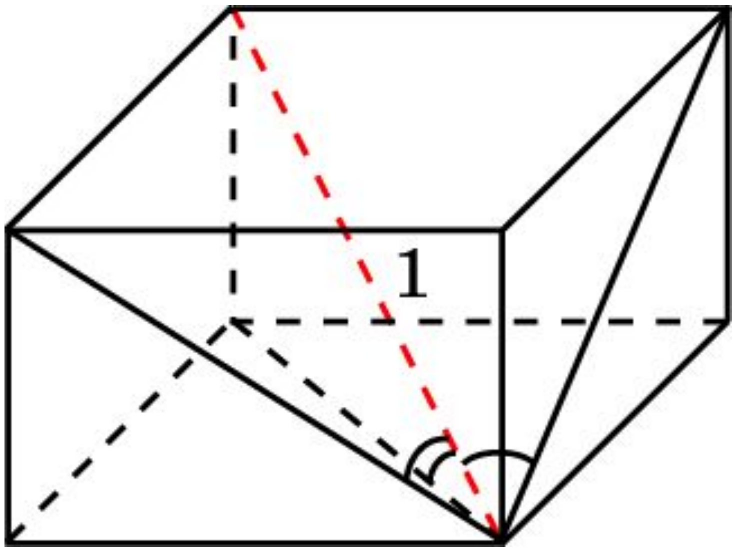
$$2x+2\sqrt{8-x^2}+2x\sqrt{8-x^2}.$$

Приравнивая это выражение к 16, получим x = 2. Третье ребро будет равно 2 и, следовательно, искомый объем равен 4.

Ответ: 4.

Упражнение 9

Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 1 и образует углы 30°, 30° и 45° с плоскостями граней параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.



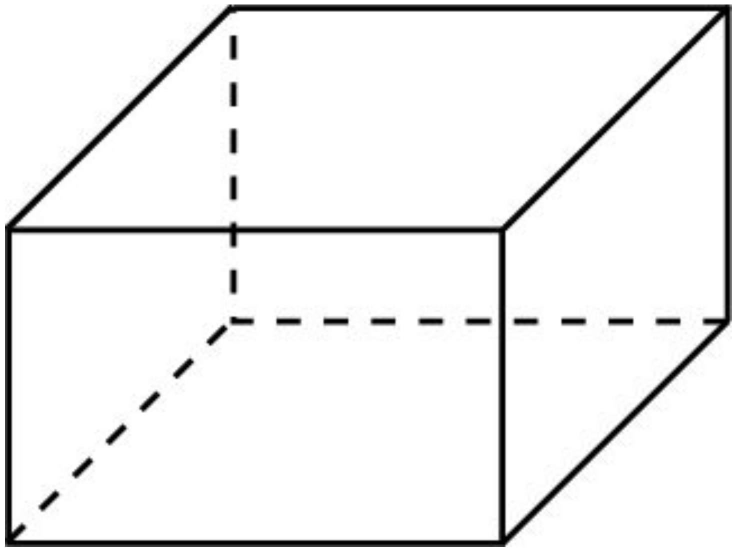
Решение. Ребра параллелепипеда равны $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, объем равен $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{8}$.

Упражнение 10

Площади трех граней параллелепипеда равны 1, 2, 3. Найдите объем параллелепипеда.



Решение. Пусть ребра параллелепипеда равны x, y, z. Тогда $xy = 1$, $xz = 2$, $yz = 3$. Решая эти уравнения, находим

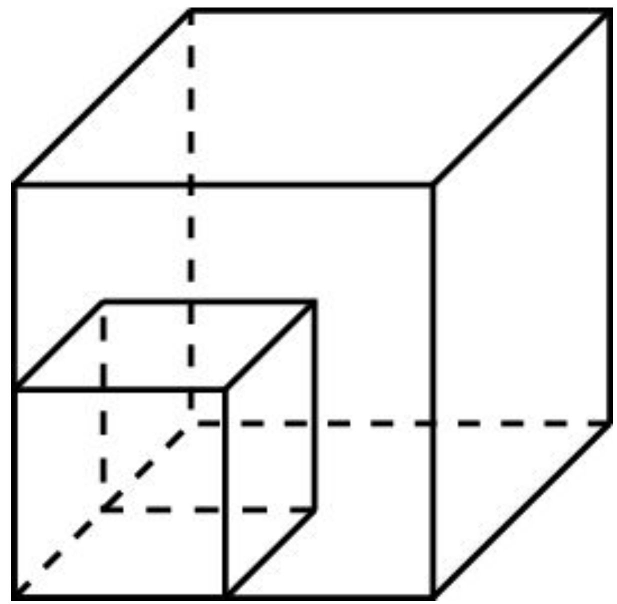
$$x = \frac{\sqrt{6}}{3},\ y = \frac{\sqrt{6}}{2},\ z = \sqrt{6}.$$

Объем параллелепипеда равен $\sqrt{6}$.

Ответ: $\sqrt{6}$.

Упражнение 11

Как относятся объемы двух кубов: данного и его модели, уменьшенной в масштабе: а) 1 : 2; б) 1 : 3; в) 1 : n?



Ответ: а) 1 : 8; б) 1 : 27; в) 1 : n^3.

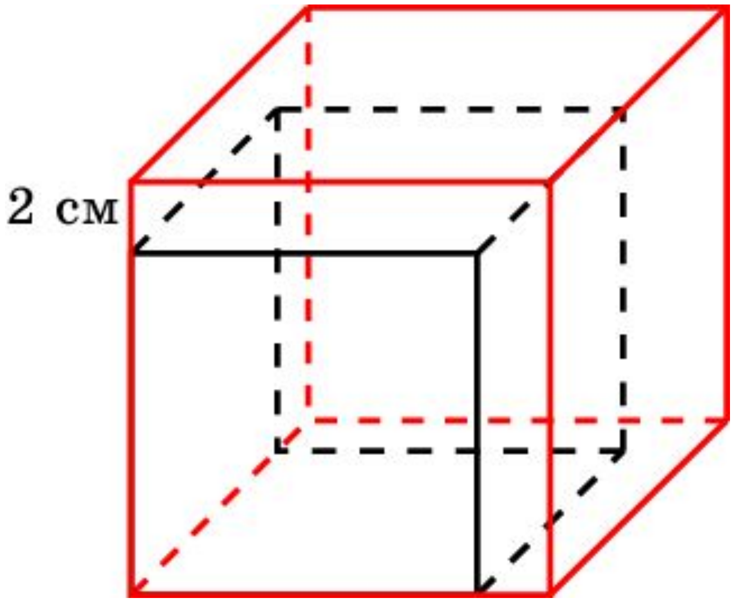
Упражнение 12

Как изменится объем прямого параллелепипеда, если: а) одно из его измерений увеличить в 2 раза, в 3 раза, в n раз; б) если два его измерения увеличить, причем каждое из них в 2, 3, n раз; в) если все три его измерения увеличить в 2, 3, n раз?

Ответ: а) Увеличится в 2 раза, в 3 раза, в n раз;
б) увеличится в 4 раза, в 9 раза, в n^2 раз;
в) увеличится в 8 раз, в 27 раз, в n^3 раз.

Упражнение 13

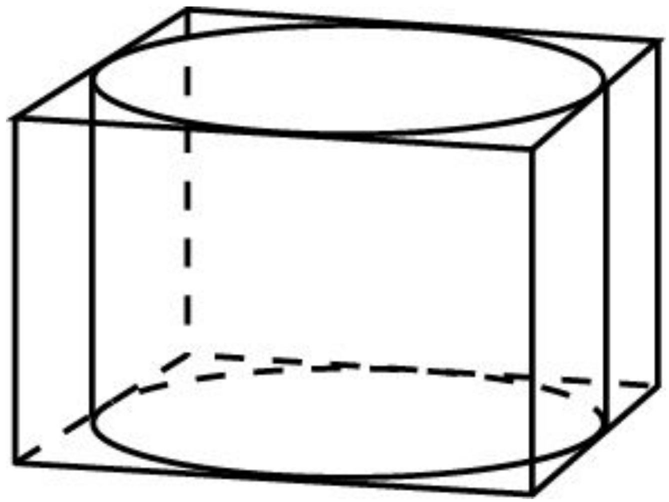
Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Определите ребро куба.



Ответ: 3 см.

Упражнение 14

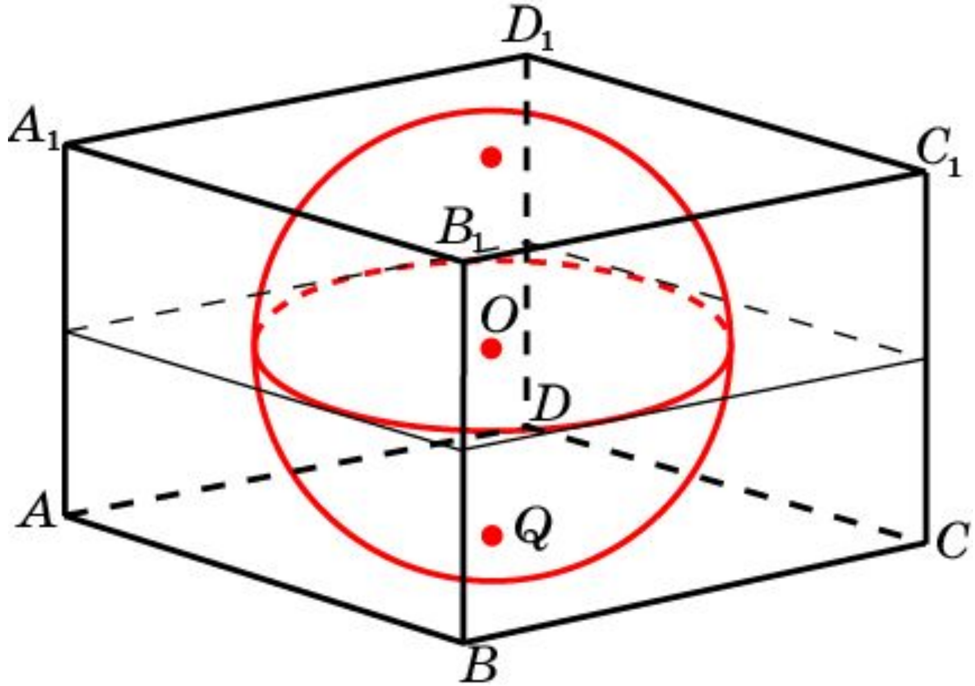
Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.



Решение: Ребра параллелепипеда равны 2, 2 и 1. Его объем равен 4.

Упражнение 15

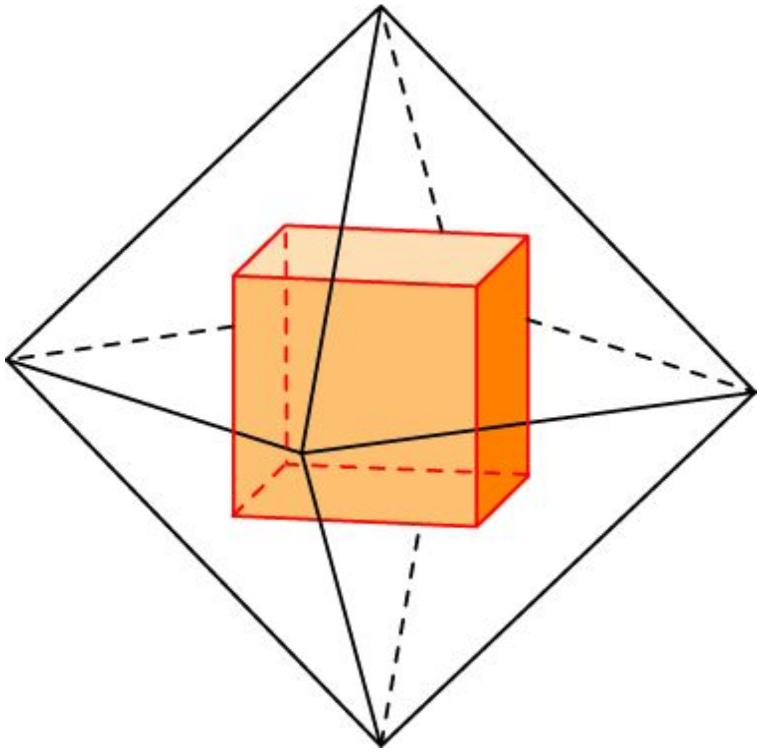
Параллелепипед описан около единичной сферы. Найдите его объем.



Решение: Ребра параллелепипеда равны 2. Его объем равен 8.

Упражнение 16

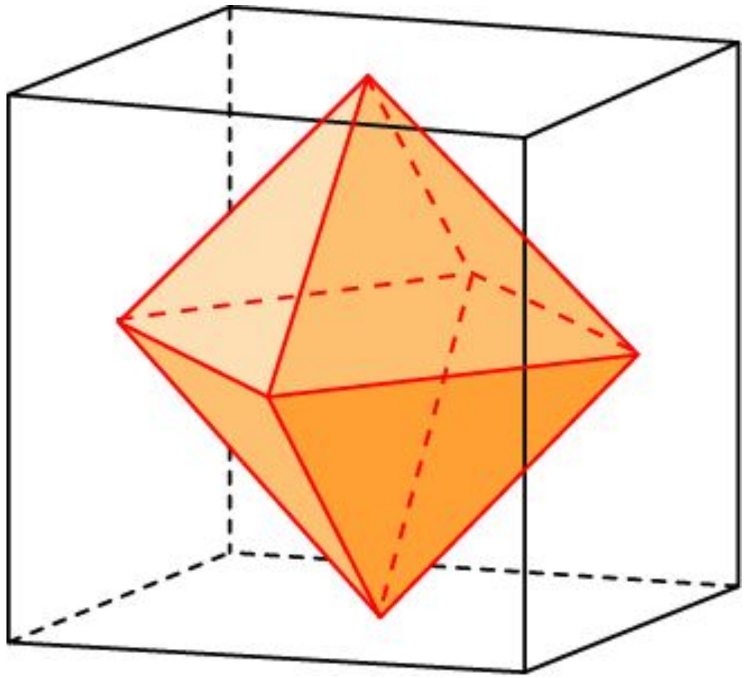
Найдите объем куба, вписанного в единичный октаэдр.



Решение: Ребро куба равно $\frac{\sqrt{2}}{3}$. Объем куба равен $\frac{2\sqrt{2}}{27}$.

Упражнение 17

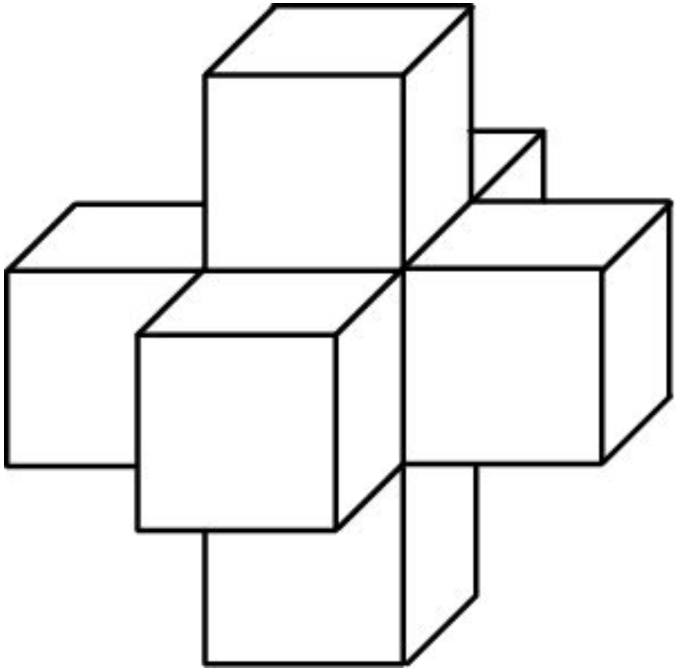
Найдите объем куба, описанного около единичного октаэдра.



Решение: Ребро куба равно $\sqrt{2}$. Объем куба равен $2\sqrt{2}$.

Упражнение 18

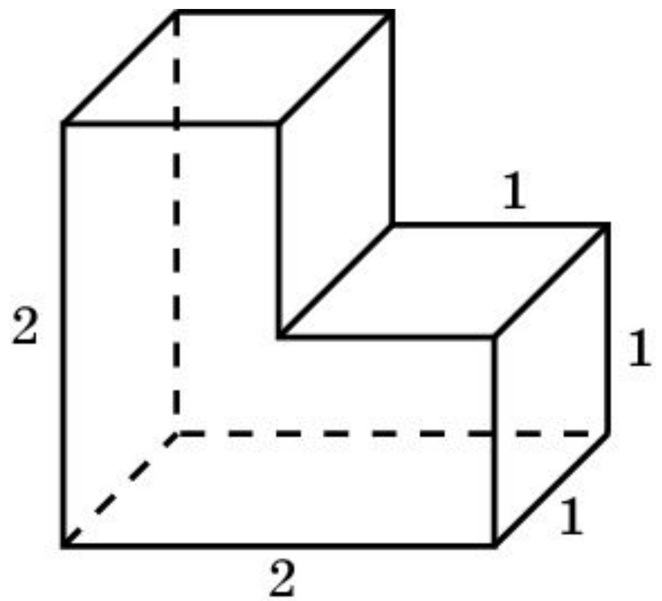
Чему равен объем пространственного креста, если ребра образующих его кубов равны единице?



Ответ: 7.

Упражнение 19

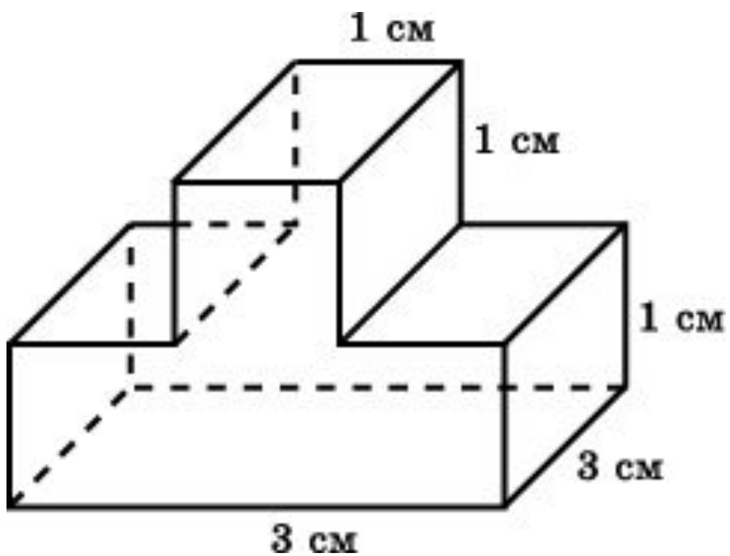
Чему равен объем фигуры, изображенной на рисунке?



Ответ: 3.

Упражнение 20

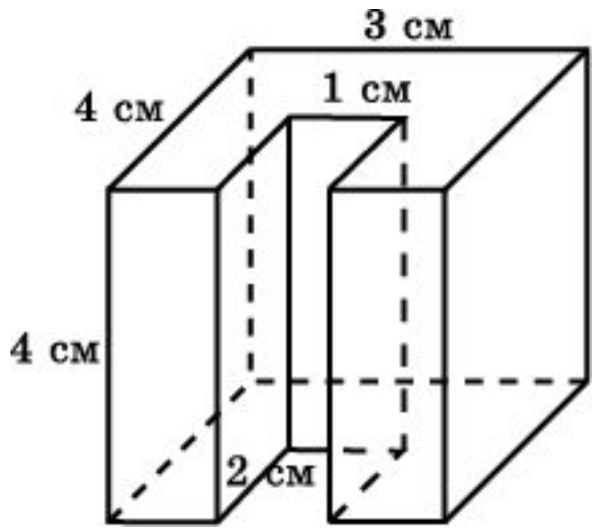
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Ответ: 12 см^3.

Упражнение 21

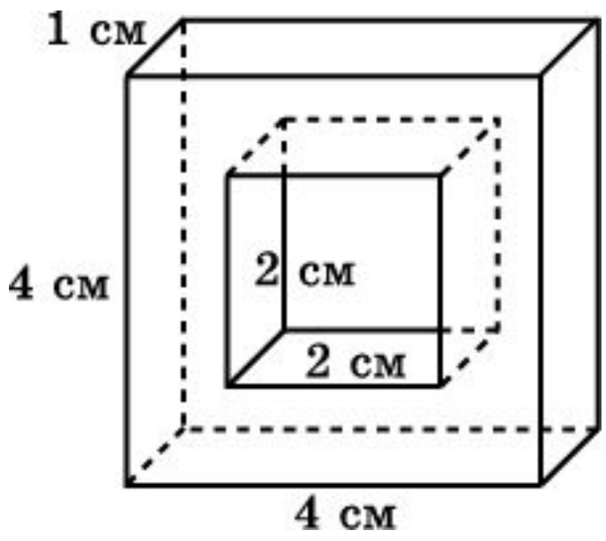
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Ответ: 40 см^3.

Упражнение 22

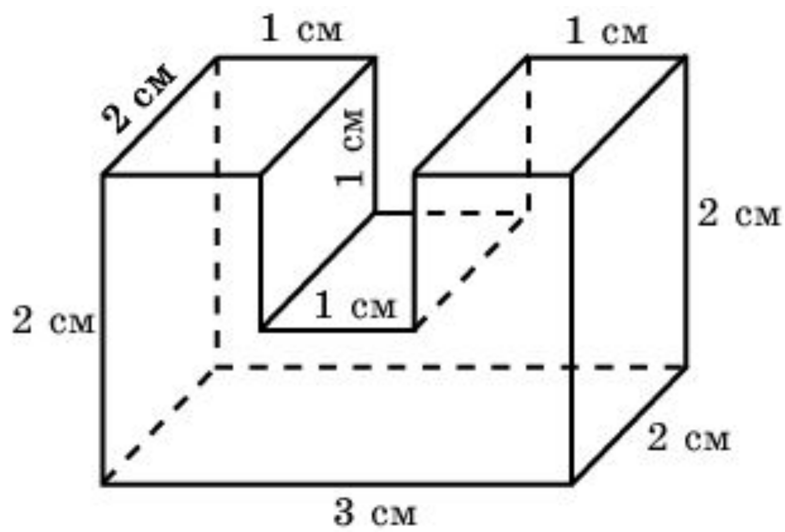
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Ответ: 12 см^3.

Упражнение 23

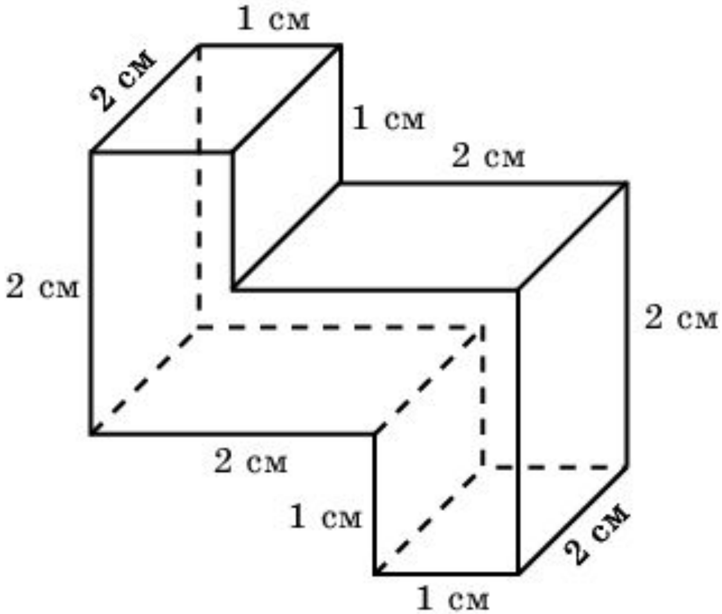
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Ответ: 10 см^3.

Упражнение 24

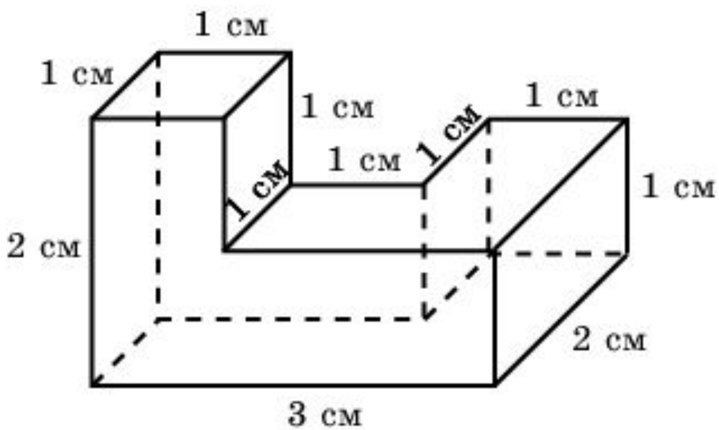
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Ответ: 10 см^3.

Упражнение 25

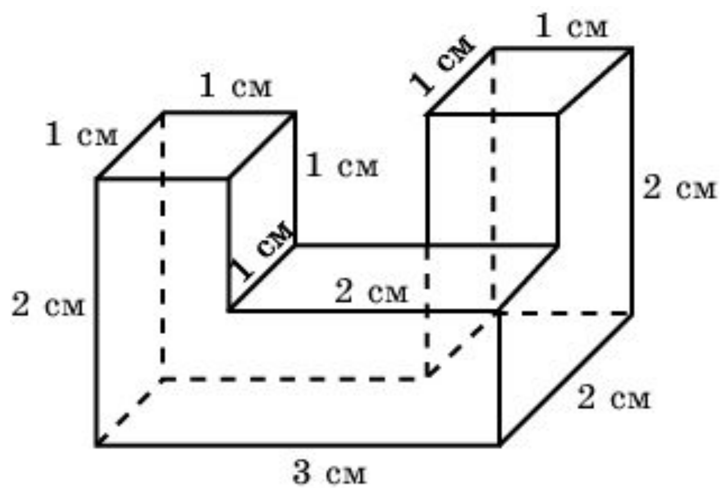
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Ответ: 5 см^3.

Упражнение 26

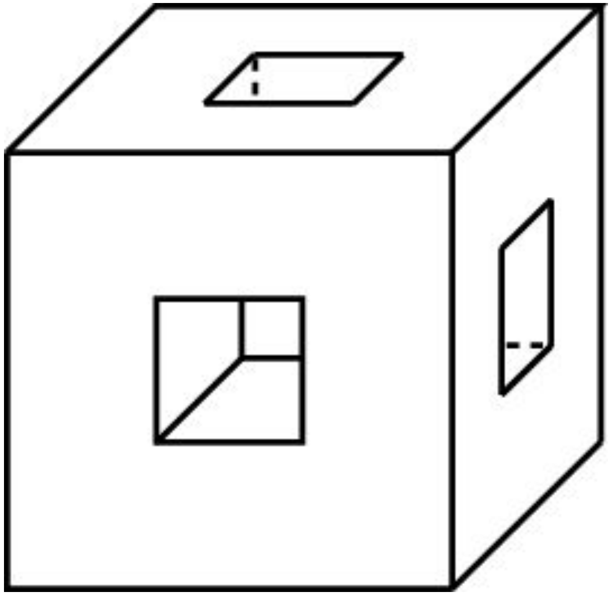
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Ответ: 6 см^3.

Упражнение 27

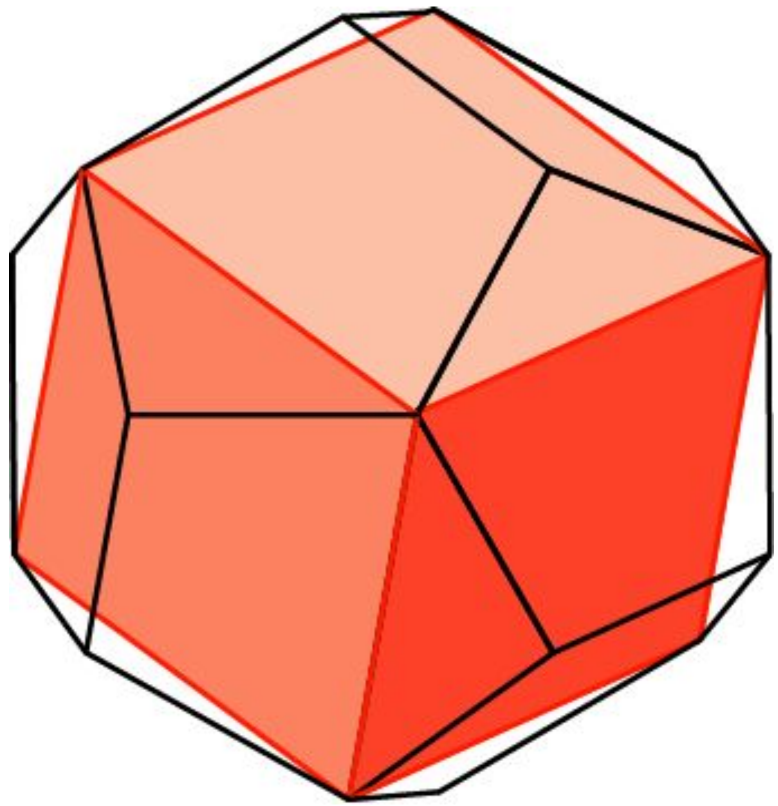
Дан куб с ребром 3 см. В каждой грани проделано сквозное квадратное отверстие со стороной 1 см. Найдите объем оставшейся части.



Ответ: 20 см^3.

Упражнение 28

Найдите объем куба, вписанного в единичный додекаэдр.



Решение: Ребро куба равно $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Объем куба равен $\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 29*

Какой наибольший объем может иметь прямоугольный параллелепипед, сумма длин ребер которого, выходящих из одной вершины, равна 1?

Решение. Обозначим длины ребер, выходящих из одной вершины параллелепипеда a, b, c. Воспользуемся тем, что среднее геометрическое трех положительных чисел не превосходит их среднего арифметического, т.е $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$.

Из этого неравенства следует, что наибольший объем равен $\frac{1}{27}$ в случае, если параллелепипед – куб со стороной $\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{27}$.

Упражнение 30*

Какую наименьшую площадь поверхности может иметь прямоугольный параллелепипед, объем которого равен 1?

Решение. Обозначим длины ребер, выходящих из одной вершины параллелепипеда a, b, c. Площадь поверхности будет равна $2ab + 2ac + 2bc$. Воспользуемся тем, что среднее арифметическое трех положительных чисел больше или равно их среднего геометрического.

Имеем $\dfrac{ab+ac+bc}{3} \geq \sqrt[3]{abacbc} = 1.$ Из этого неравенства следует, что наименьшая площадь поверхности равна 6 в случае, если прямоугольный параллелепипед – куб со стороной 1.

Ответ: 6.