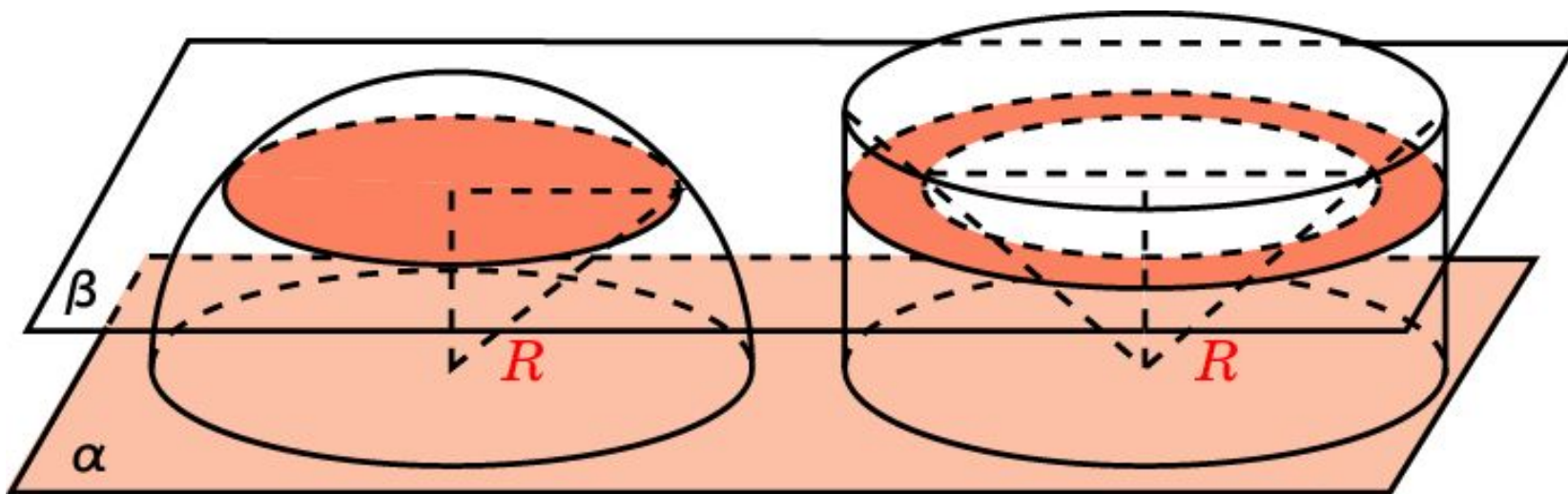


ОБЪЕМ ШАРА

Теорема. Объем шара радиуса R выражается формулой

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$



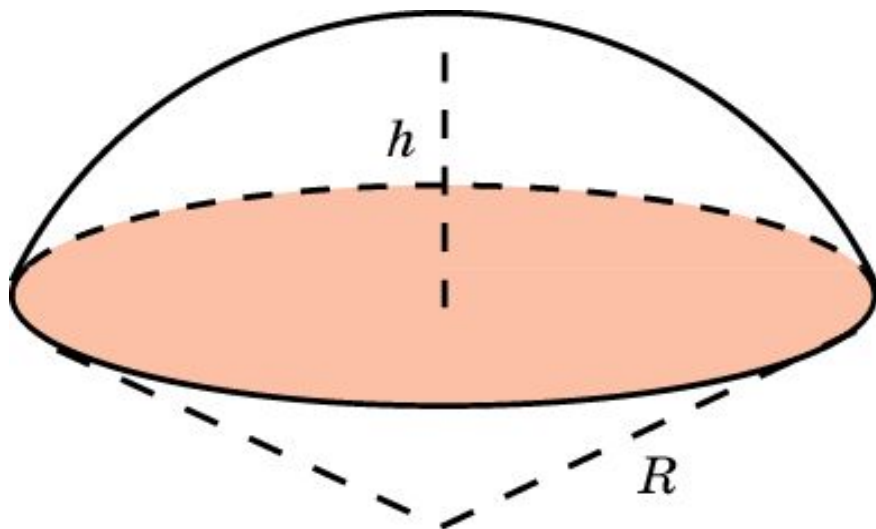
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

ОБЪЕМ ШАРОВОГО СЕГМЕНТА

Шаровым сегментом называется меньшая часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью, не проходящей через центр шара. Круг, образованный сечением шара этой плоскостью, называется **основанием шарового сегмента**. Часть радиуса шара, лежащая внутри шарового сегмента и перпендикулярная его основанию, называется **высотой шарового сегмента**.

Теорема. Объем шарового сегмента высоты h , отсекаемого от шара радиуса R , выражается формулой

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right).$$

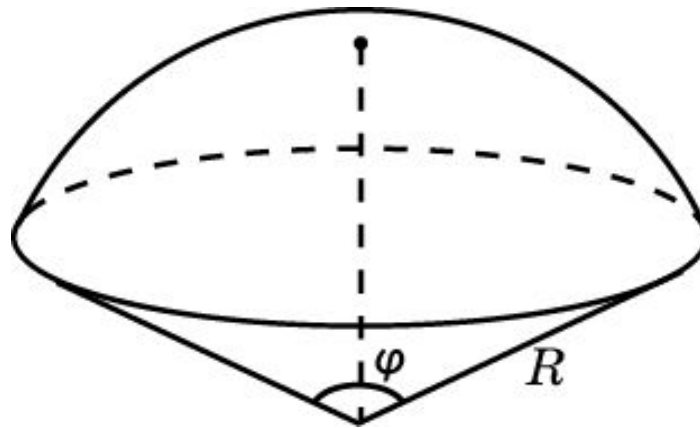


ОБЪЕМ ШАРОВОГО СЕКТОРА

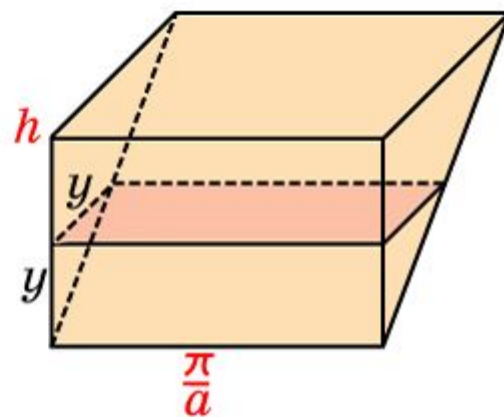
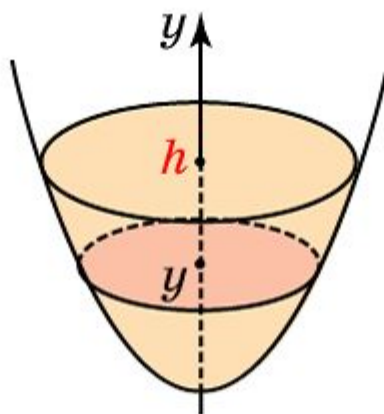
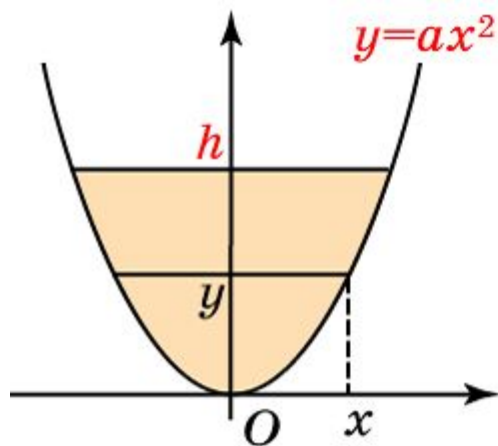
Шаровым сектором называется часть шара, составленная из шарового сегмента и конуса, основанием которого является основание шарового сегмента, а вершиной - центр шара.

Теорема. Объем шарового сектора радиуса R и углом при φ вершине выражается формулой

$$V = \frac{2}{3} \pi R^3 \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right).$$

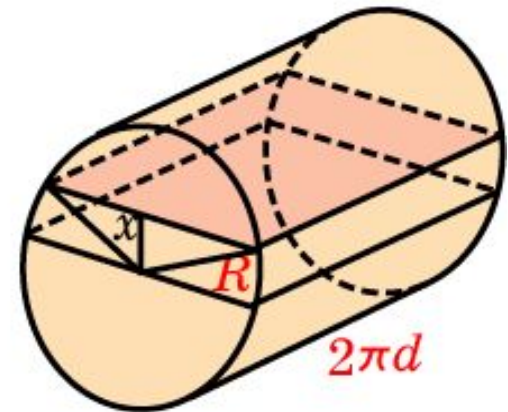
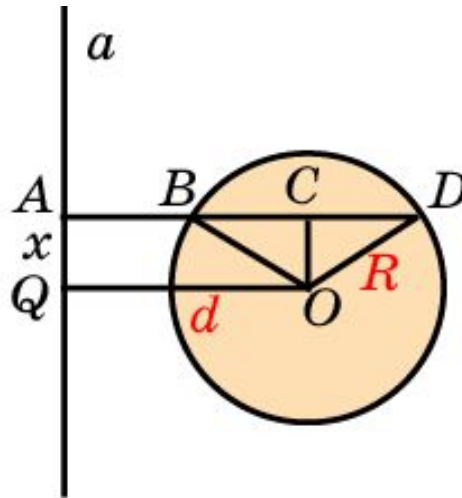
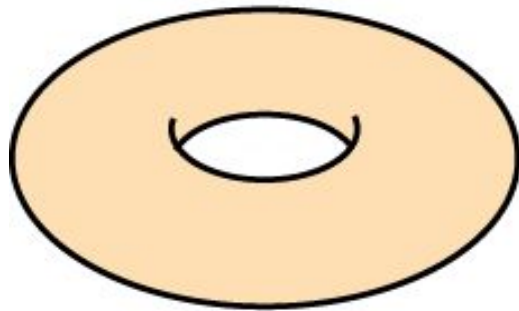


ОБЪЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА



$$V = \frac{\pi}{2a} h^2$$

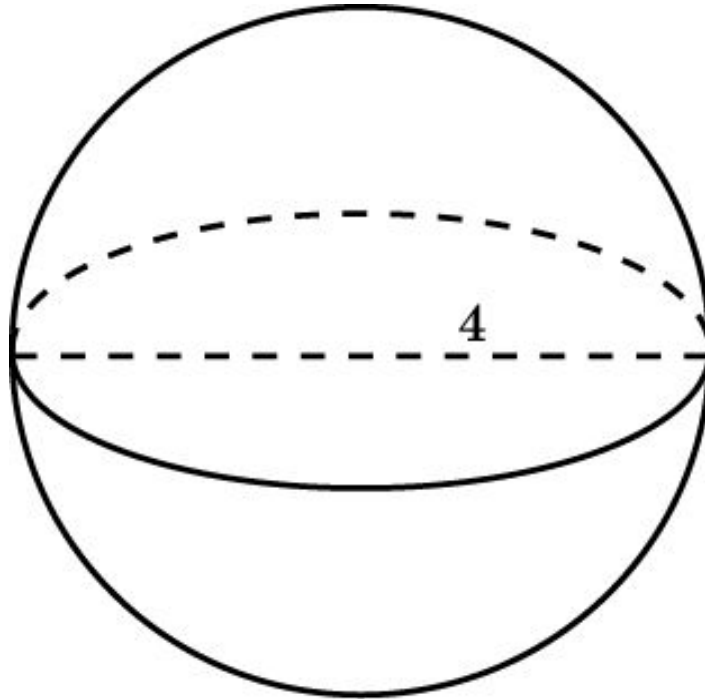
ОБЪЕМ ТОРА



$$V = 2\pi^2 R^2 d$$

Упражнение 1

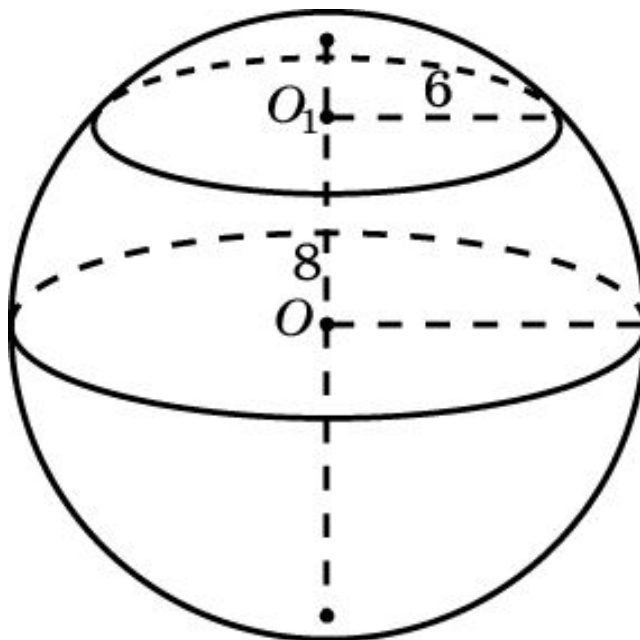
Найдите объем шара, диаметр которого равен 4 см.



Ответ: $\frac{32\pi}{3}$ см³.

Упражнение 2

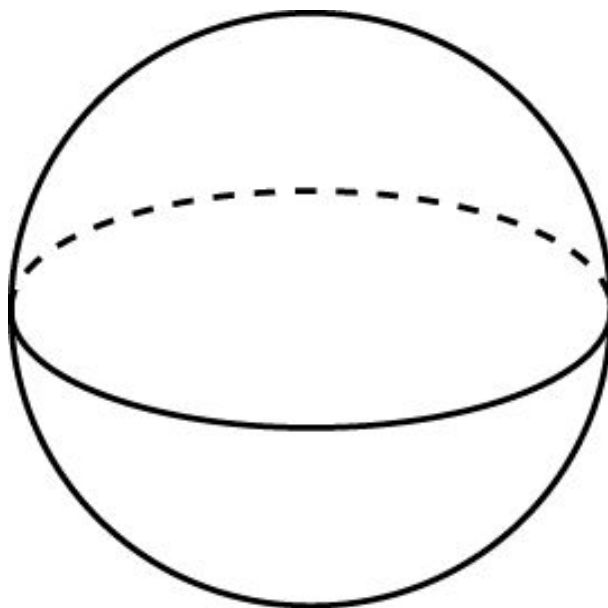
Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстоянии 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите объем шара.



Ответ: $\frac{400}{3}\pi$ см³.

Упражнение 3

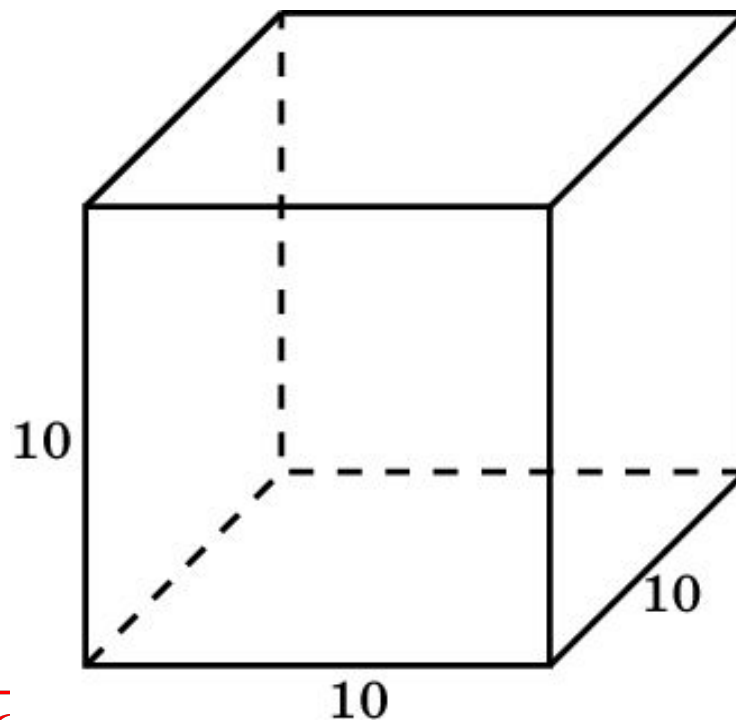
Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить: а) в 3 раза; б) в 4 раза?



Ответ: а) В 27 раз; б) в 64 раза.

Упражнение 4

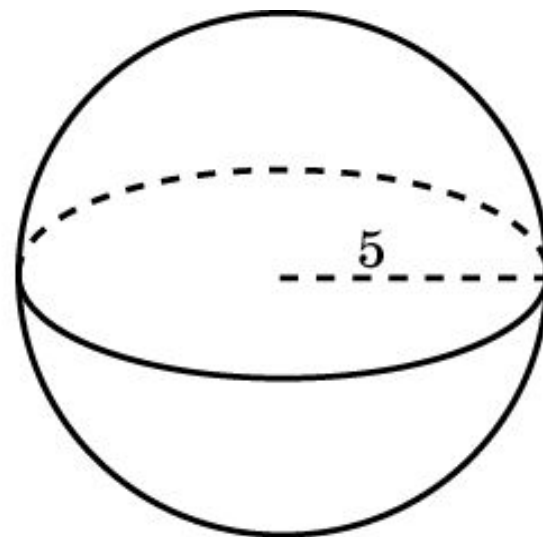
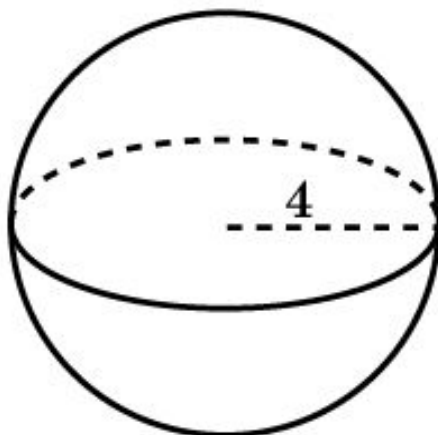
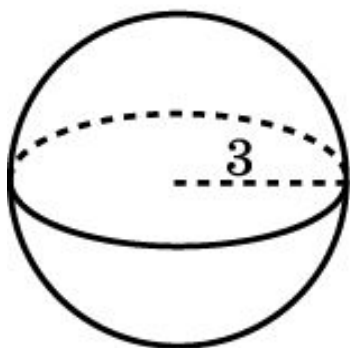
Медный куб, ребро которого равно 10 см, переплавлен в шар. Найдите радиус шара. (Потерями металла при переплавке можно пренебречь.)



Ответ: $5\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$ см.

Упражнение 5

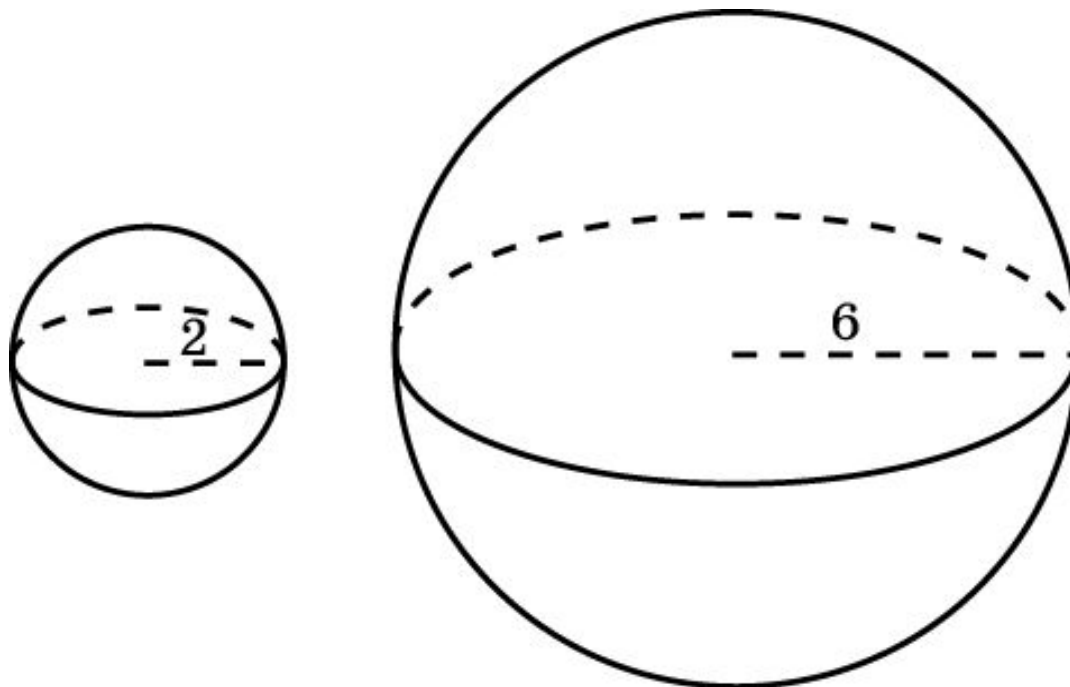
Радиусы трех шаров 3 см, 4 см и 5 см. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.



Ответ: 6 см^3 .

Упражнение 6

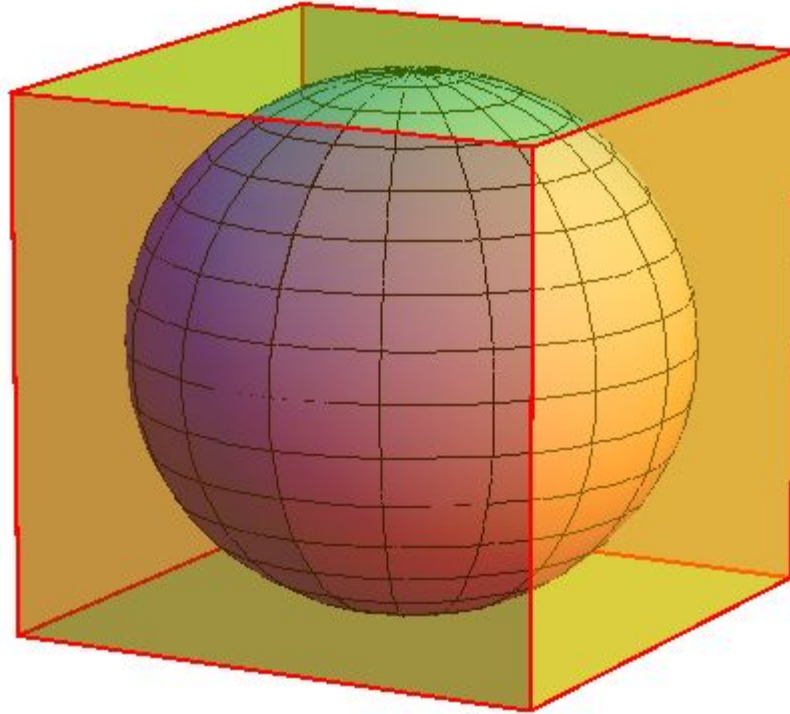
Сколько нужно взять шаров радиуса 2 см, чтобы сумма их объемов равнялась объему шара радиуса 6 см?



Ответ: 27.

Упражнение 7

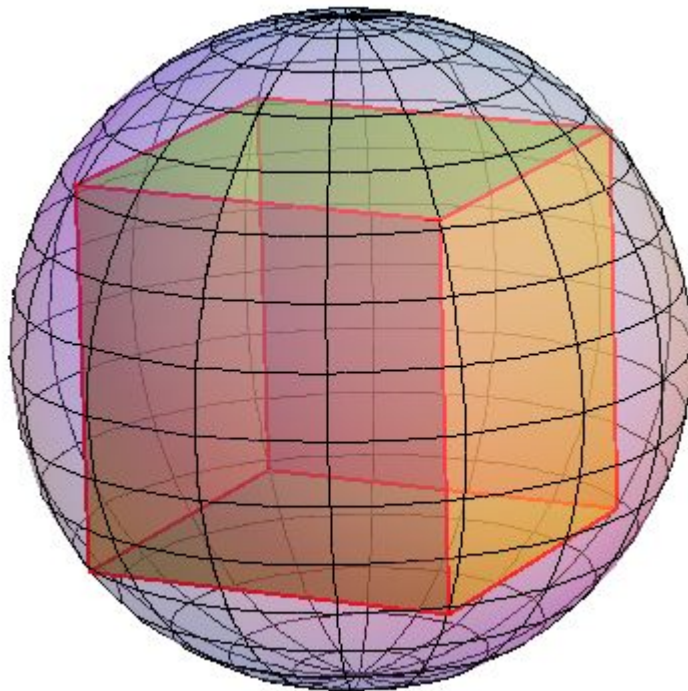
Найдите объем шара, вписанного в куб с ребром, равным единице.



Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

Упражнение 8

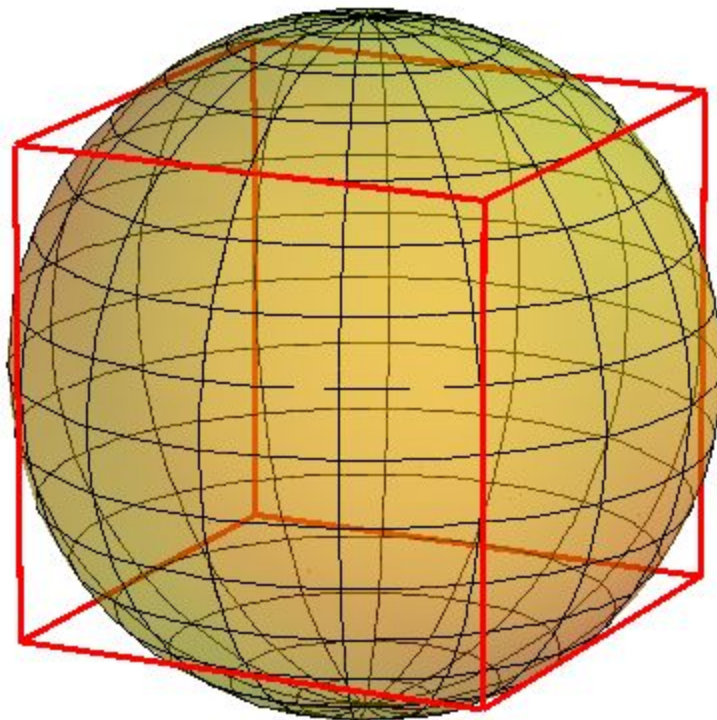
Найдите объем шара, описанного около куба с ребром, равным единице.



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2} \pi$.

Упражнение 9

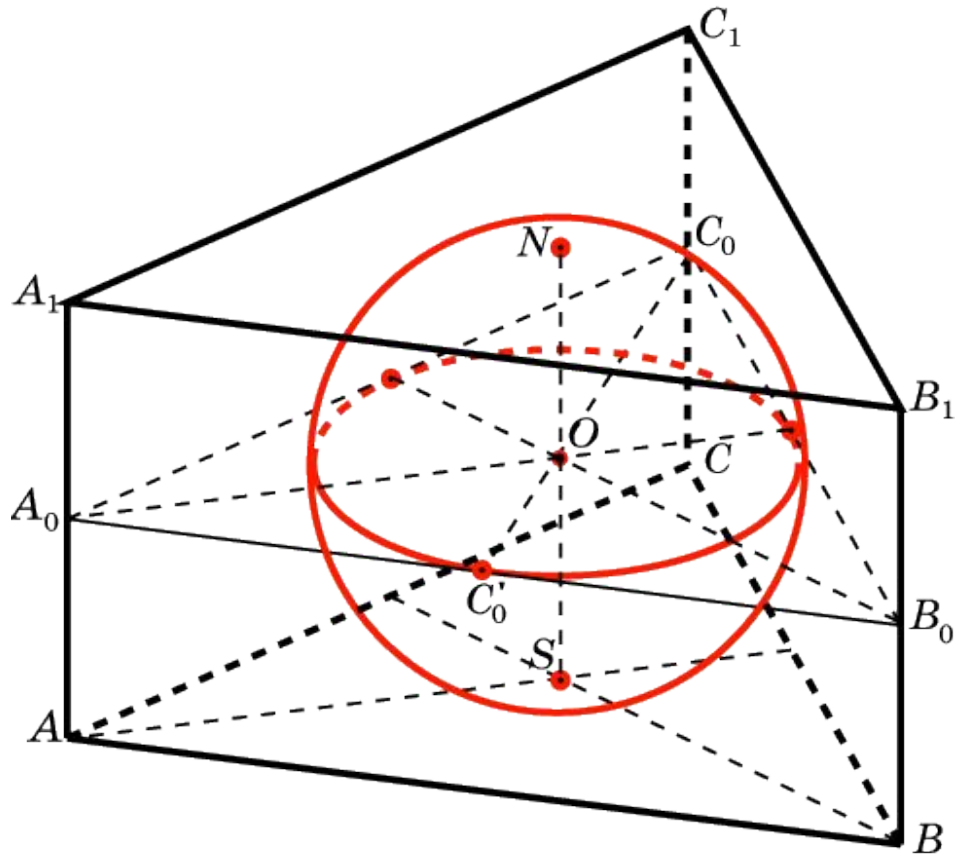
Найдите объем шара, касающегося ребер куба с ребром, равным единице.



Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3} \pi$.

Упражнение 10

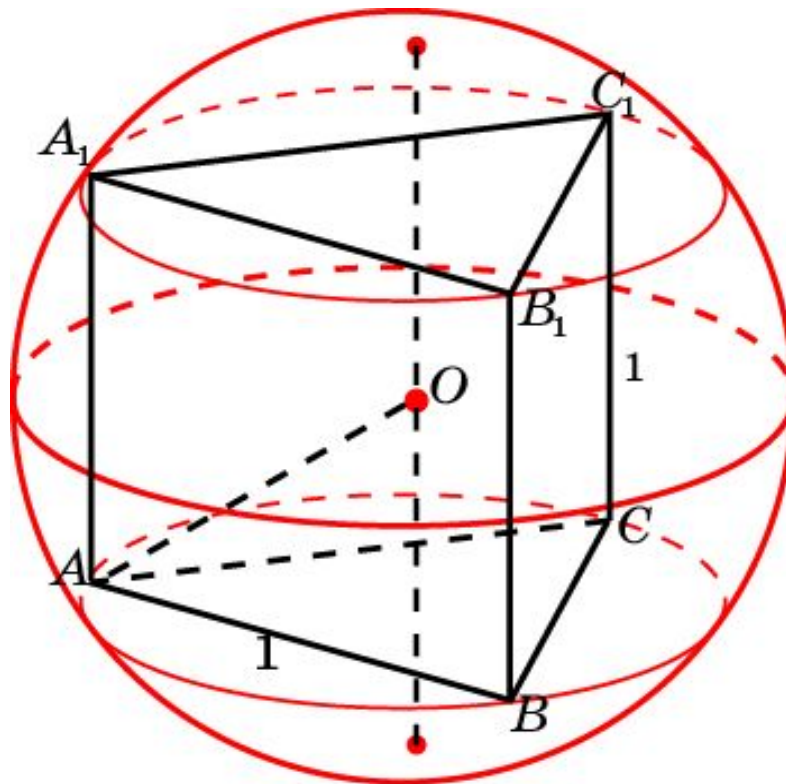
Найдите объем шара, вписанного в правильную треугольную призму, сторона основания которой равна 1.



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{54} \pi$.

Упражнение 11

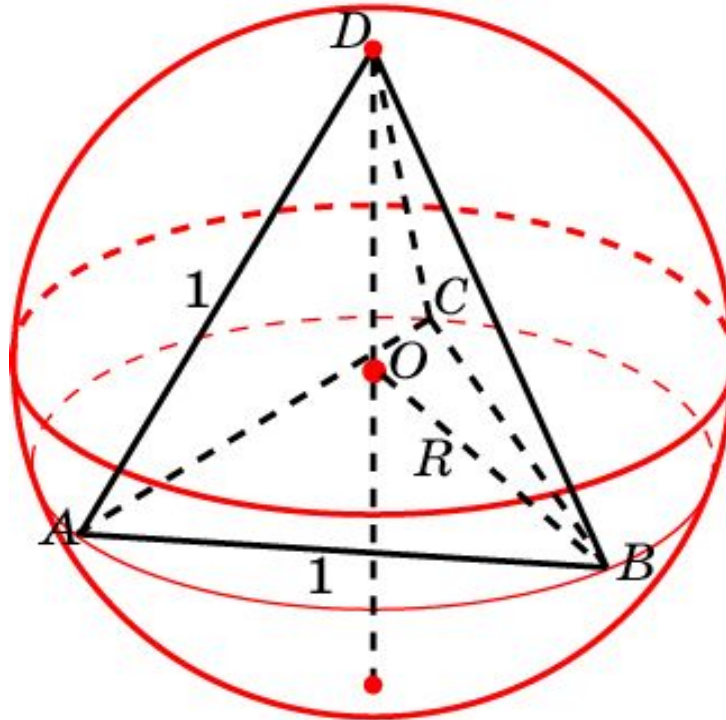
Найдите объем шара, описанного около правильной треугольной призмы, ребра которой равны 1.



Ответ: $\frac{7\sqrt{21}}{54}\pi$.

Упражнение 12

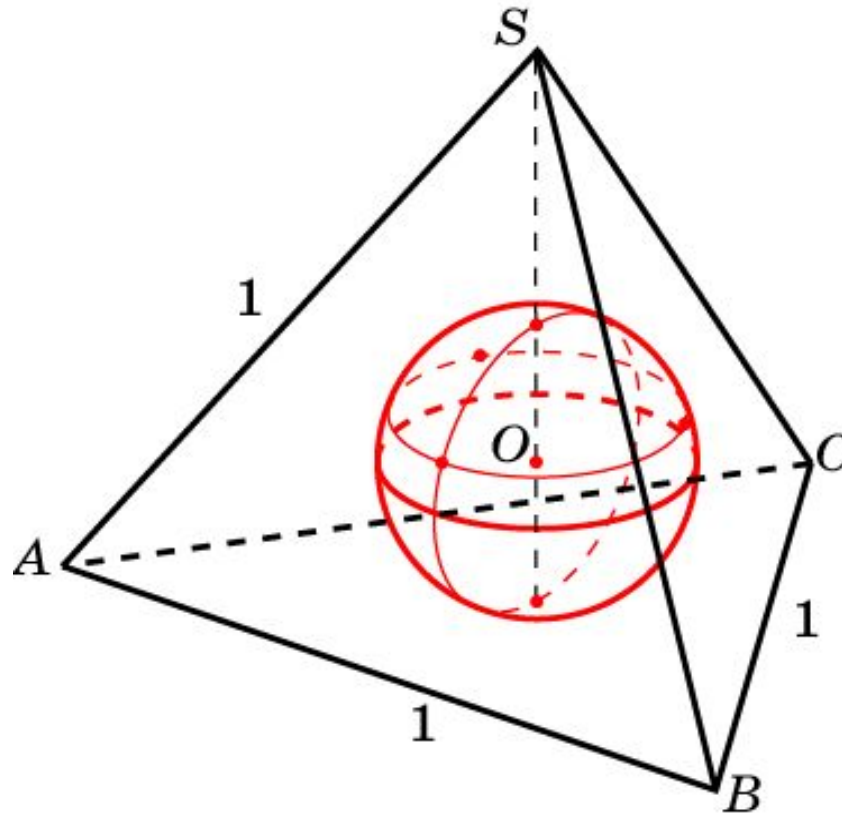
Найдите объем шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром 1.



Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{8} \pi$.

Упражнение 13

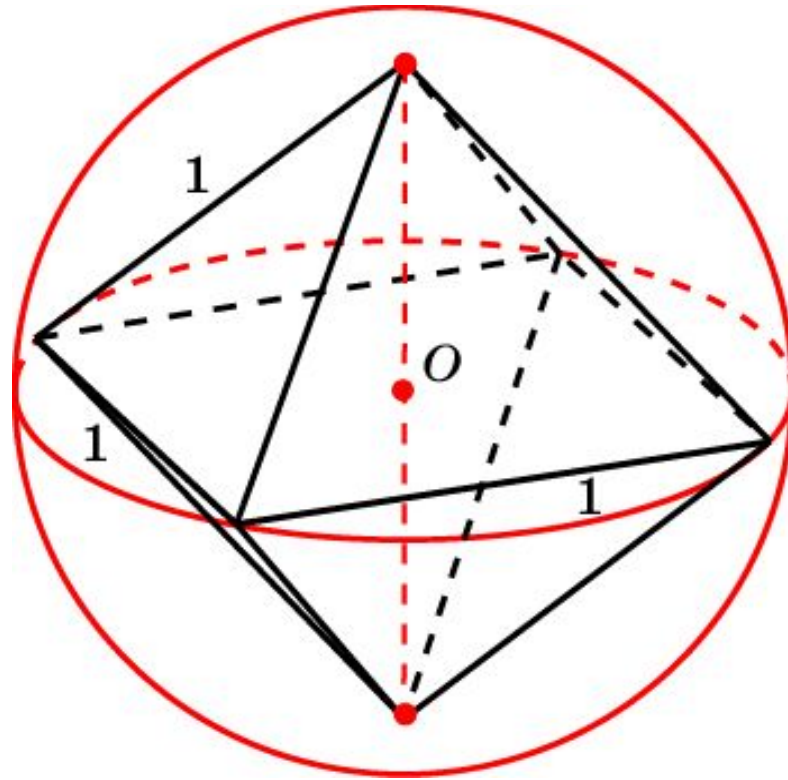
Найдите объем шара, вписанного в правильный тетраэдр с ребром 1.



Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{216} \pi$.

Упражнение 14

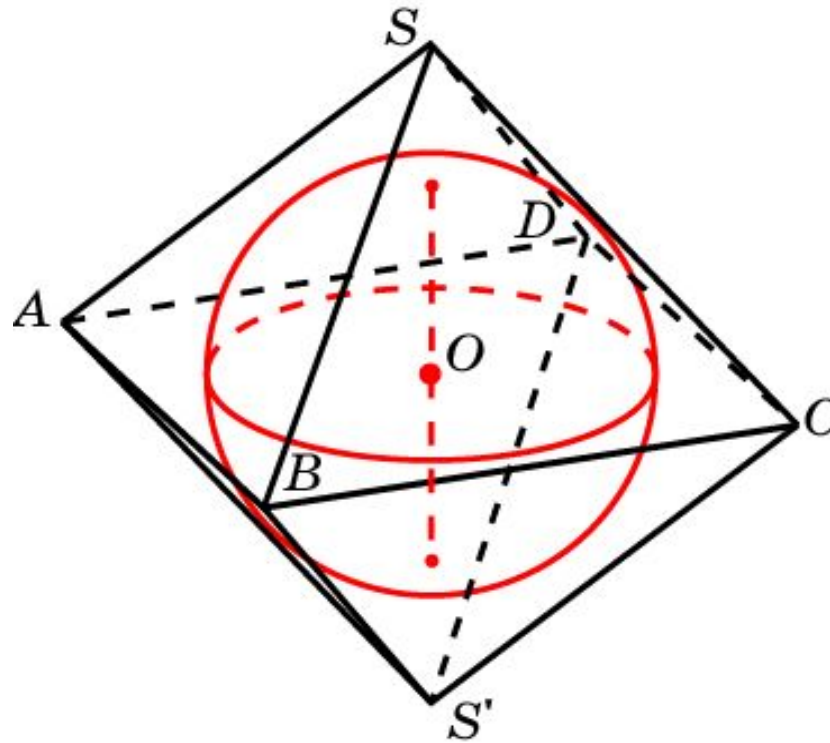
Найдите объем шара, описанного около октаэдра с ребром 1.



Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$.

Упражнение 15

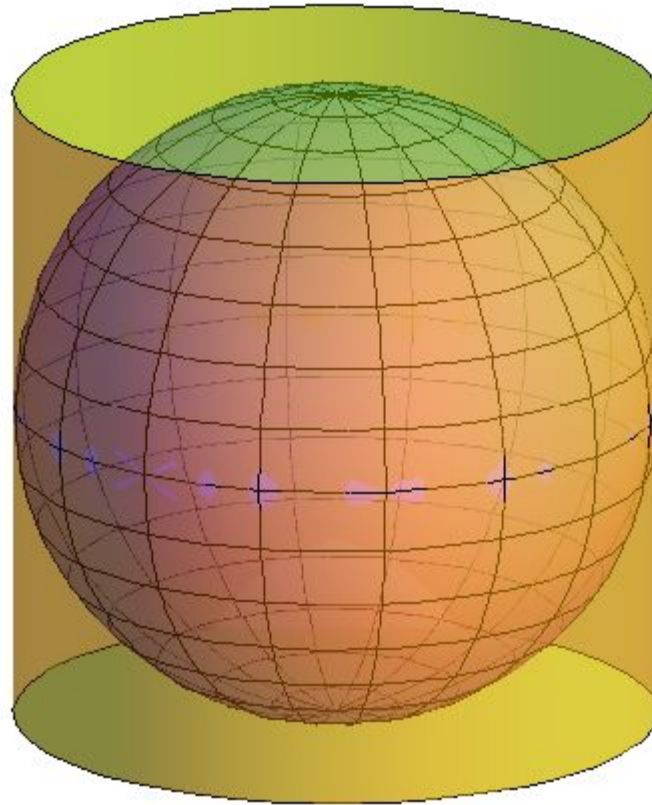
Найдите объем шара, вписанного в октаэдр с ребром 1.



Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{27}\pi$.

Упражнение 16

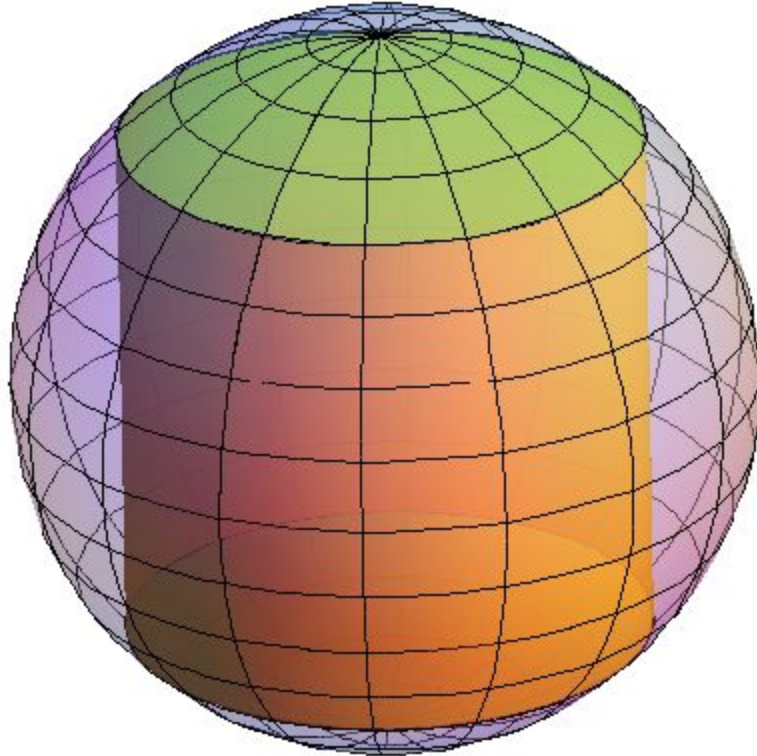
Найдите объем шара, вписанного в цилиндр, радиус основания которого равен 1.



Ответ: $\frac{4}{3}\pi$.

Упражнение 17

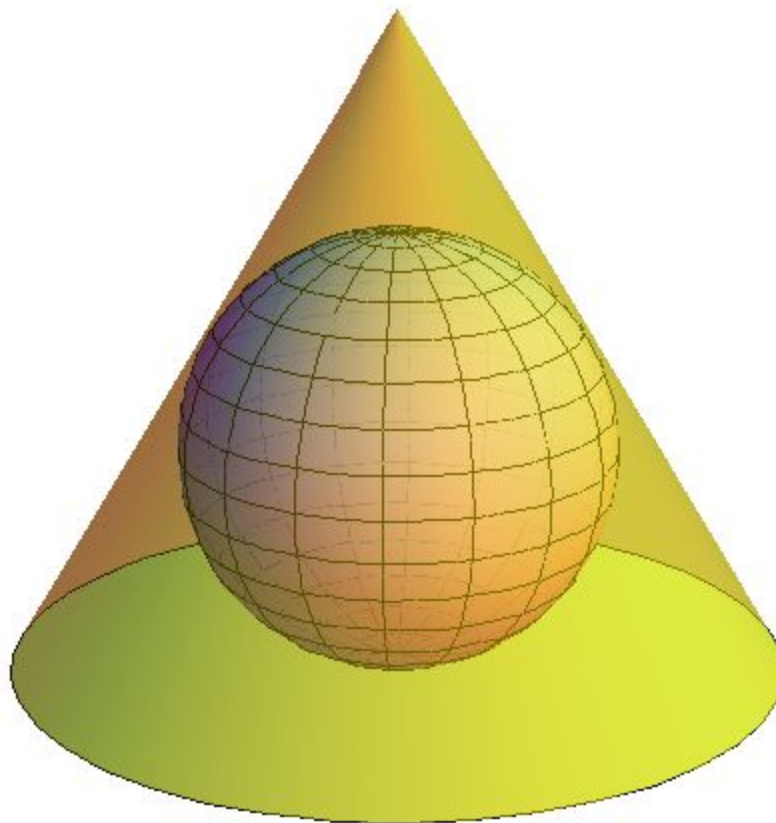
Найдите объем шара, описанного около цилиндра, радиус основания которого равен 3, а высота равна 8.



Ответ: $\frac{500}{3}\pi$.

Упражнение 18

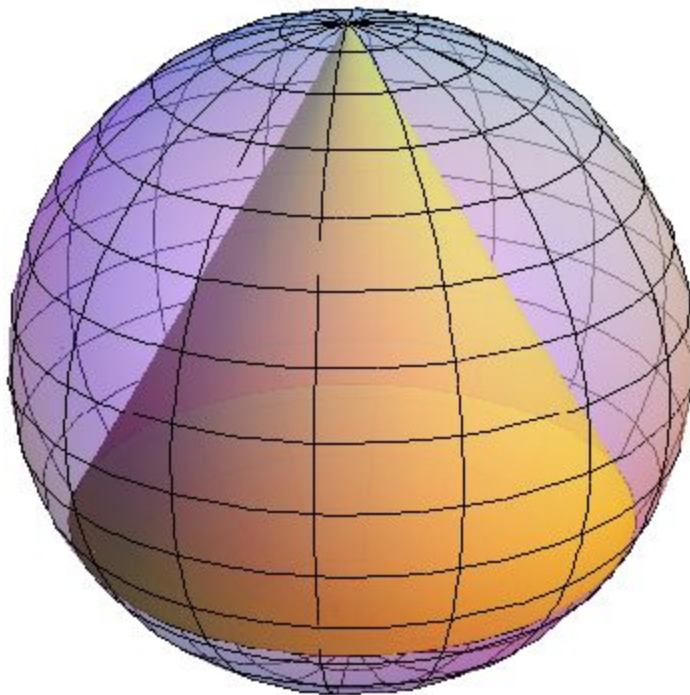
В конус, радиус основания которого равен 1, а образующая равна 2, вписан шар. Найдите его объем.



Ответ: $\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$.

Упражнение 19

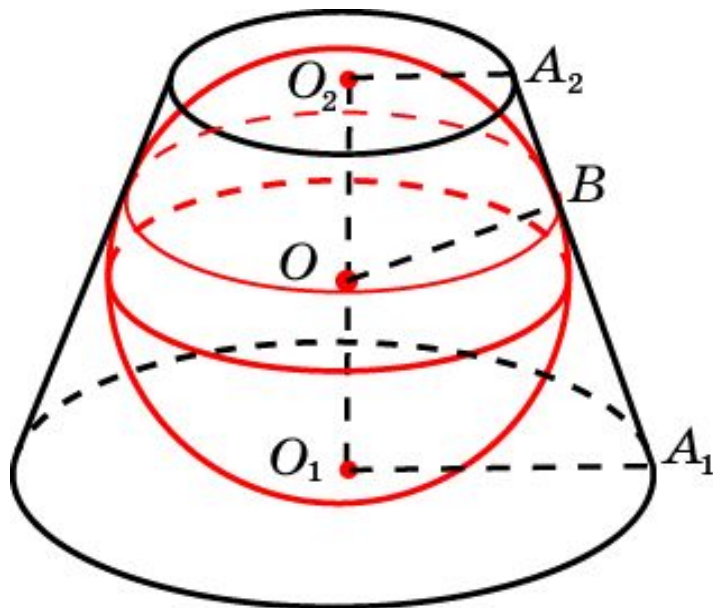
Около конуса, радиус основания которого равен 1, а образующая равна 2, описан шар. Найдите его объем.



Ответ: $\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$.

Упражнение 20

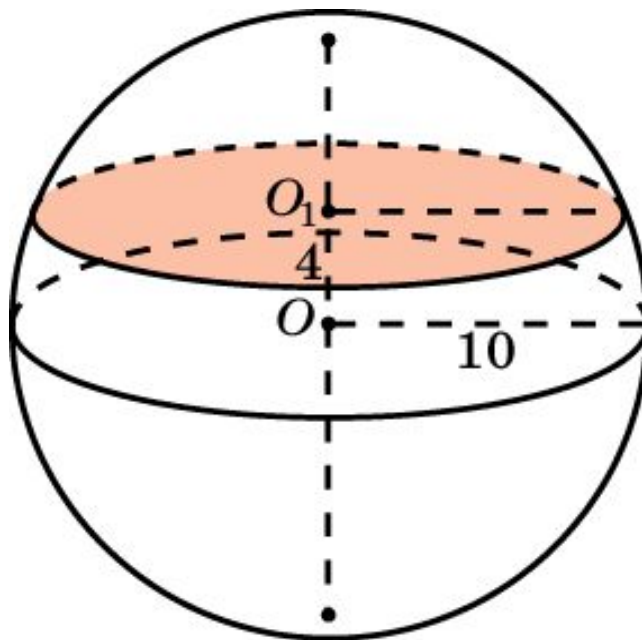
В усеченный конус, радиусы оснований которого равны 2 и 1, вписан шар. Найдите его объем.



Ответ: $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$.

Упражнение 21

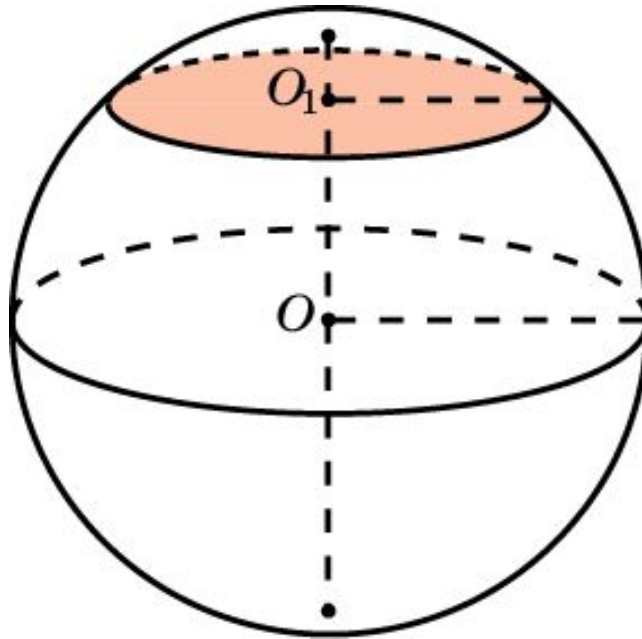
Шар радиуса 10 см пересечен плоскостью, проходящей на расстоянии 4 см от центра шара. Найдите объем отсеченного шарового сегмента.



Ответ: 288π см³.

Упражнение 22

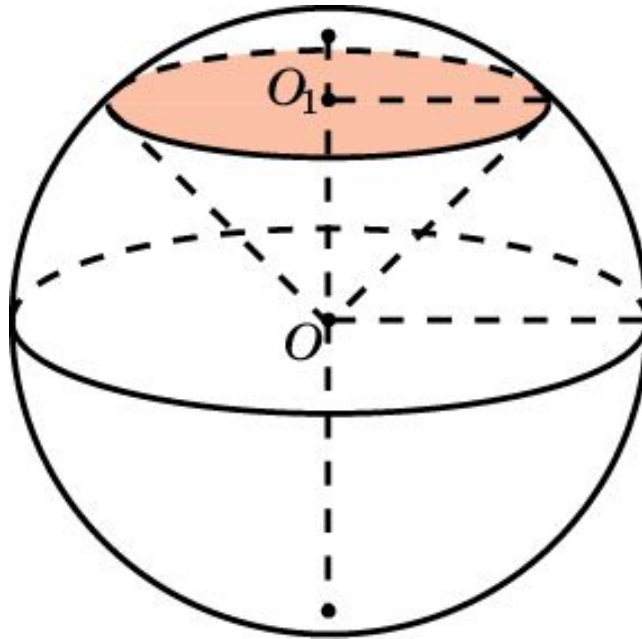
Какую часть объема шара составляет объем шарового сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара?



Ответ: $\frac{7}{250}$.

Упражнение 23

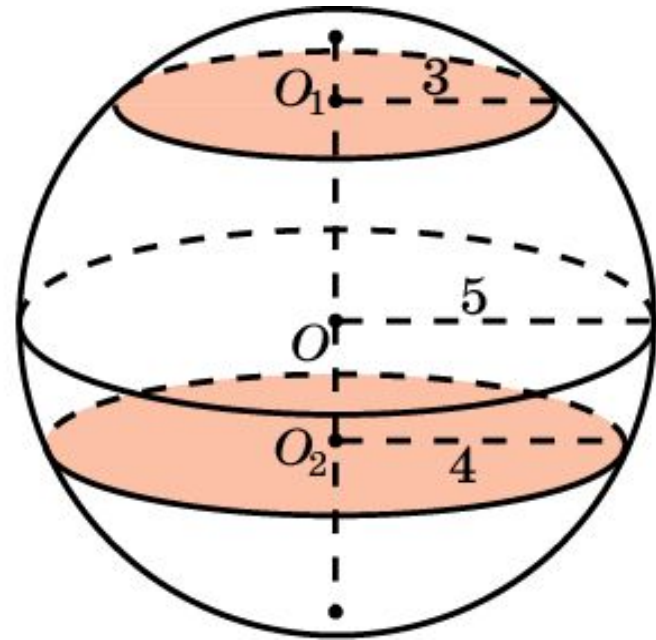
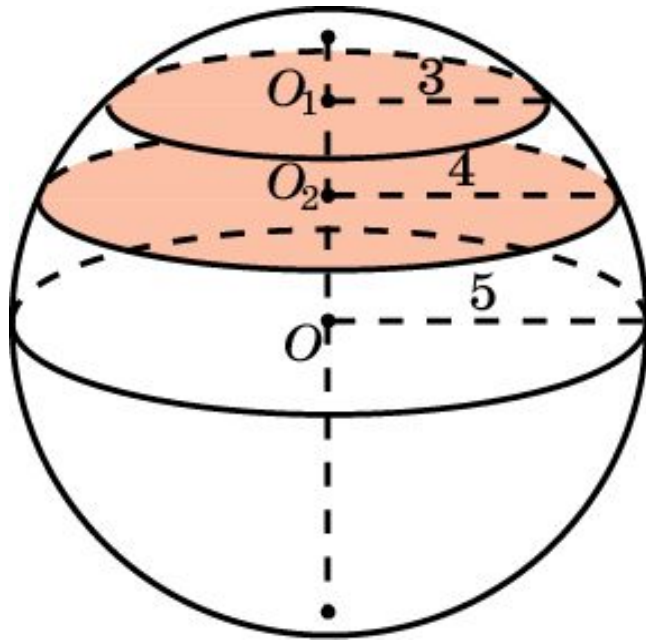
Чему равен объем шарового сектора, если радиус окружности его сегмента равен 60 см, а радиус шара 75 см?



Ответ: 112500π см³.

Упражнение 24

Найдите объем шарового пояса, если радиусы его оснований равны 3 см и 4 см, а радиус шара - 5 см. (Рассмотрите два случая.)

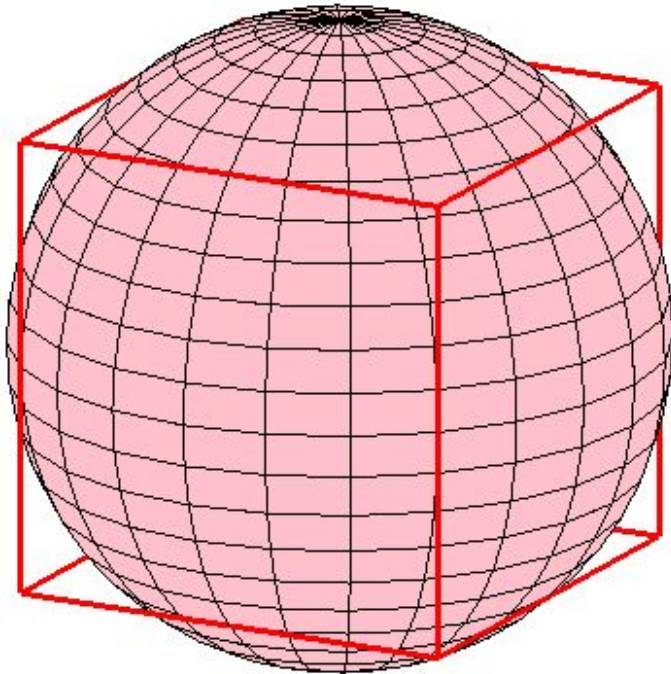


Ответ: Если центр шара лежит между основаниями пояса, то

$$V = \frac{434\pi}{3} \text{ см}^3. \text{ В противном случае } V = \frac{38\pi}{3} \text{ см}^3.$$

Упражнение 25

Шар касается всех двенадцати ребер единичного куба. Найдите объем части шара, заключенной внутри этого куба.



Решение: Часть шара, заключенная внутри куба, получается отсечением от шара радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$ шести шаровых сегментов высоты $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Объем каждого такого сегмента равен $\frac{\pi(4\sqrt{2}-5)}{24}$. Объем части шара, содержащейся в кубе, равен $\frac{\pi(15-8\sqrt{2})}{12}$.

Ответ: $\frac{\pi(15-8\sqrt{2})}{12}$.