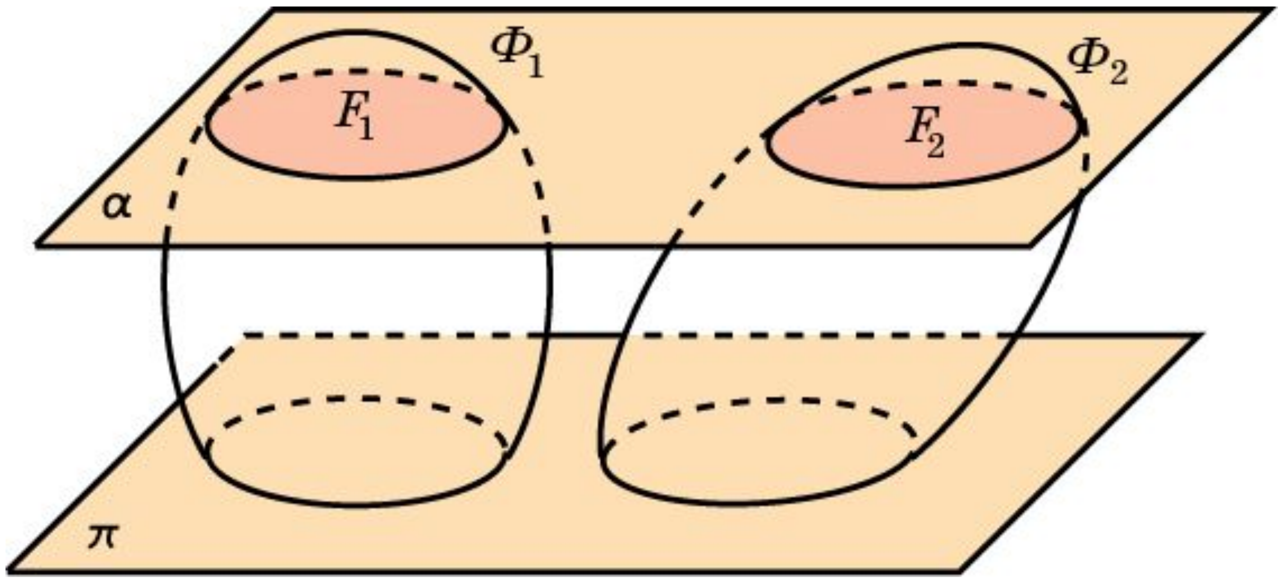
Б. Кавальери

Бонавентуре Кавальери (1598 – 1647) принадлежат труды по тригонометрии, логарифмам, геометрической оптике и т.д., но главным делом его жизни была книга «Геометрия, развитая новым способом при помощи неделимых непрерывного», в которой он предложил способ вычисления площадей плоских фигур и объемов пространственных тел, основанный на сравнении их сечений.

Метод вычисления объемов пространственных тел, предложенный Б. Кавальери, называется принципом Кавальери.

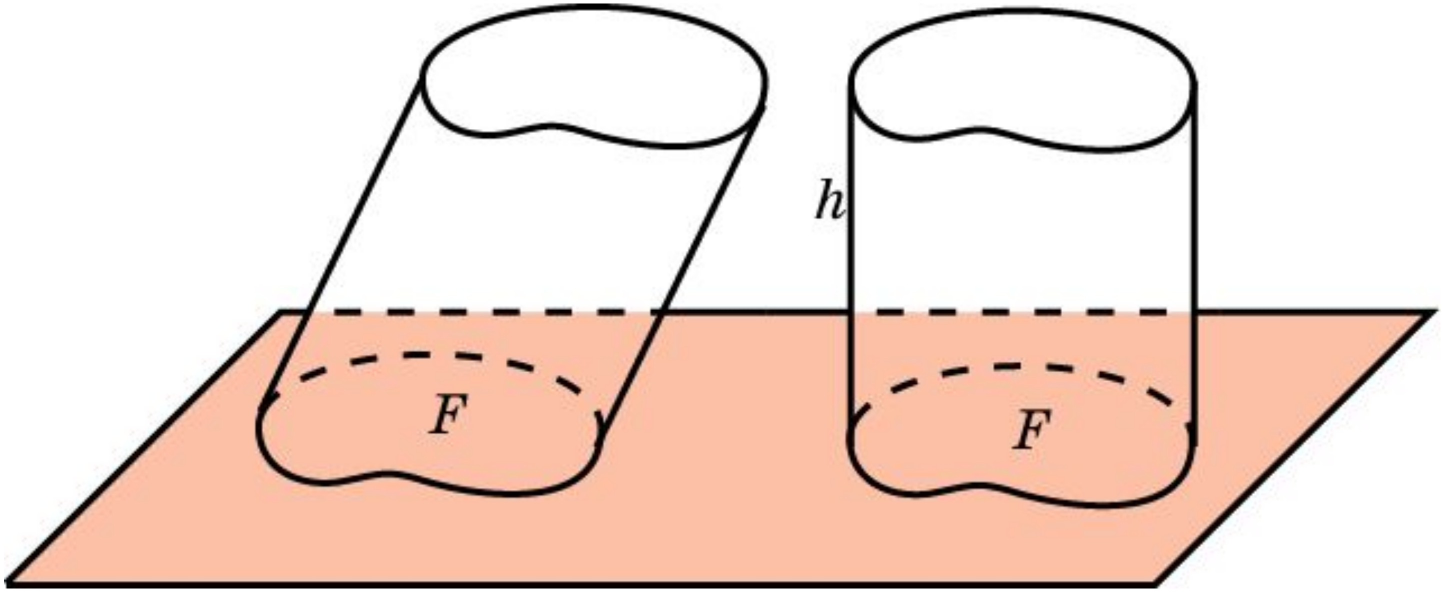
Принцип Кавальери

Принцип Кавальери. Если при пересечении двух фигур Φ_1 и Φ_2 в пространстве плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях получаются фигуры F_1 и F_2 одинаковой площади, то объемы исходных пространственных фигур равны.



Объем обобщенного цилиндра

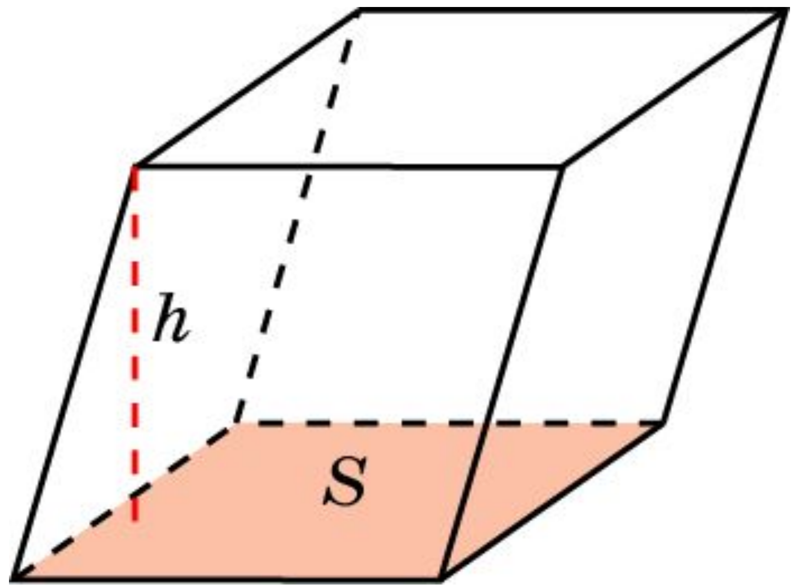
Теорема. Объем обобщенного цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.



Объем наклонного параллелепипеда 1

Объем наклонного параллелепипеда равен произведению площади S грани параллелепипеда на высоту h, проведенную к этой грани, т.е. имеет место формула

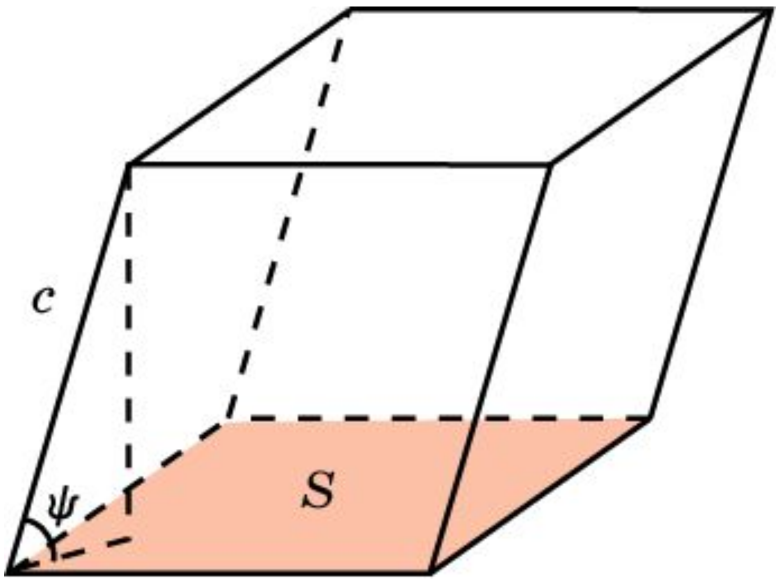
$$V = S \cdot h.$$



Объем наклонного параллелепипеда 2

Если ребро параллелепипеда равно c и образует с гранью площади S угол ψ , то объем параллелепипеда вычисляется по формуле

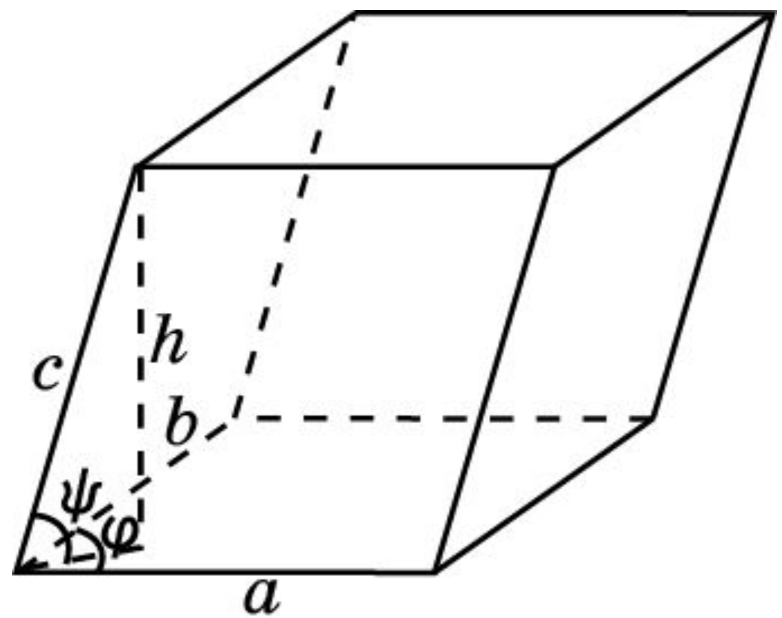
$$V = S \cdot c \cdot \sin\psi.$$



Объем наклонного параллелепипеда 3

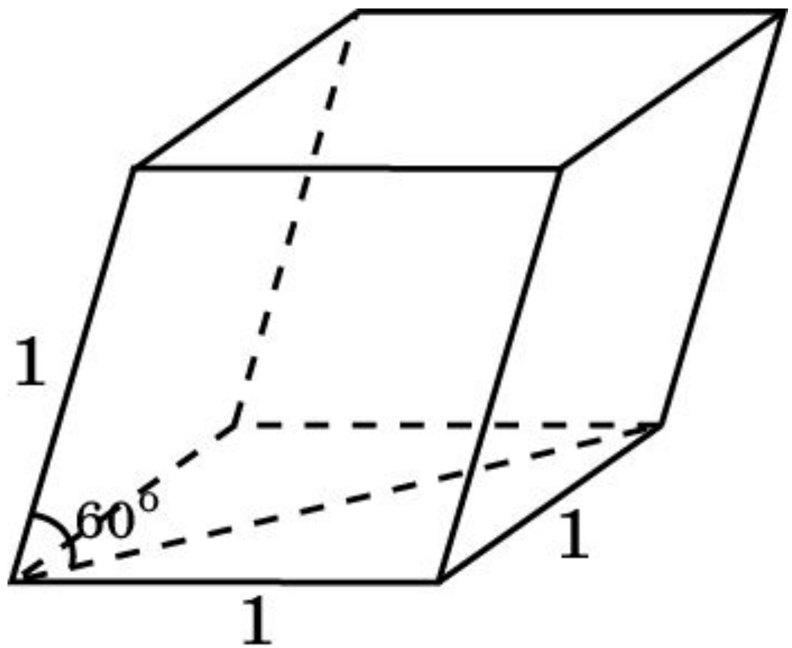
Пусть ребра параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны a, b, c. Ребра a и b образуют угол φ, а ребро c наклонено к плоскости ребер a и b под углом ψ. Тогда объем V параллелепипеда выражается формулой

$$V = a \cdot b \cdot c \cdot \sin\varphi \cdot \sin\psi.$$



Упражнение 1

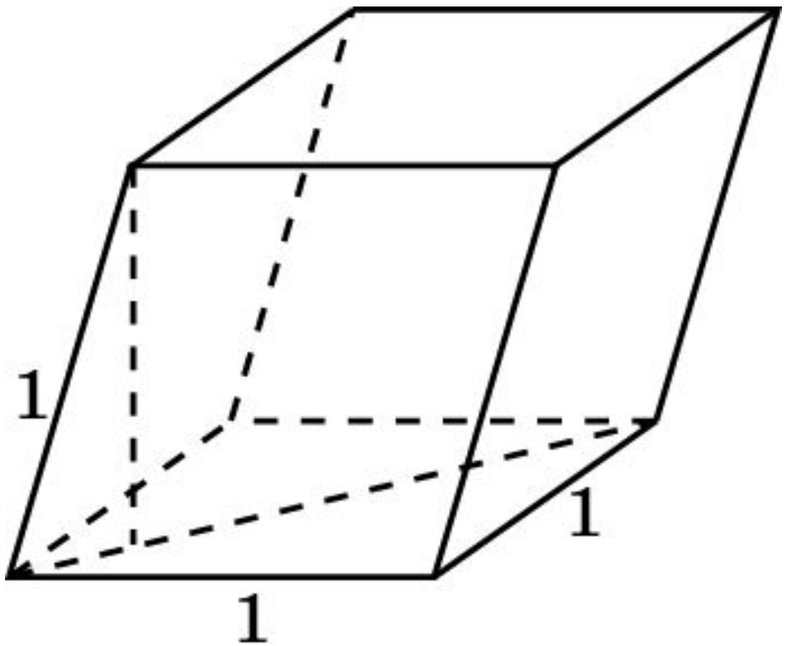
Две противоположные грани параллелепипеда – квадраты со стороной 1. Соединяющее их ребро равно 1 и наклонено к плоскостям этих граней под углом 60º. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 2

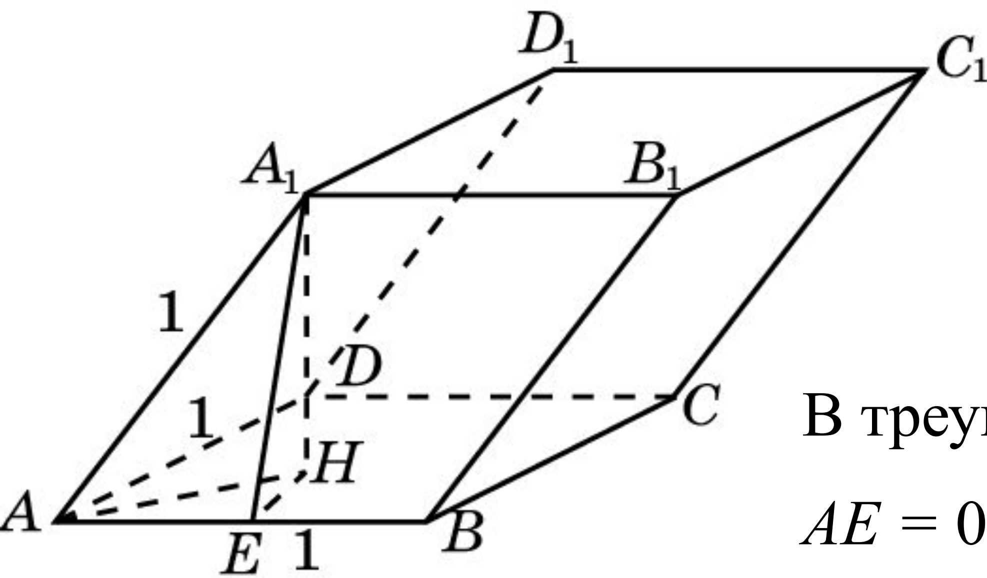
Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60°. Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол 60° и равно 1. Найдите объем параллелепипеда.



Ответ: $\frac{3}{4}$.

Упражнение 3

Три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, являются ромбами со сторонами 1 и острыми углами при этой вершине 60°. Найдите объем параллелепипеда.



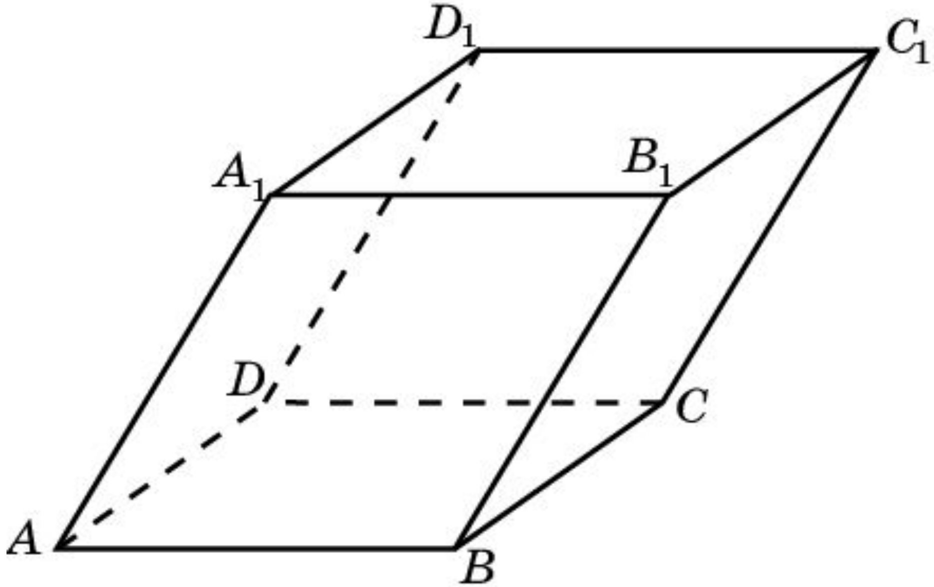
Решение. Площадь грани $ABCD$ равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Высота A_1E грани ABB_1A_1 равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

В треугольнике AEH угол A равен 30°, $AE = 0{,}5$. Значит, $EH = \frac{\sqrt{3}}{6}$ и, следовательно, высота A_1H равна $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Таким образом, объем равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнение 4

В параллелепипеде две грани имеют площади S_1 и S_2, их общее ребро равно a, и они образуют между собой двугранный угол 150°. Найдите объем параллелепипеда.



Решение. Пусть площади граней $ABCD$ и BCC_1B_1 равны S_1 и S_2, ребро BC равно a. Тогда высота параллелограмма BCC_1B_1 равна S_2/a. Высота параллелепипеда, проведенная

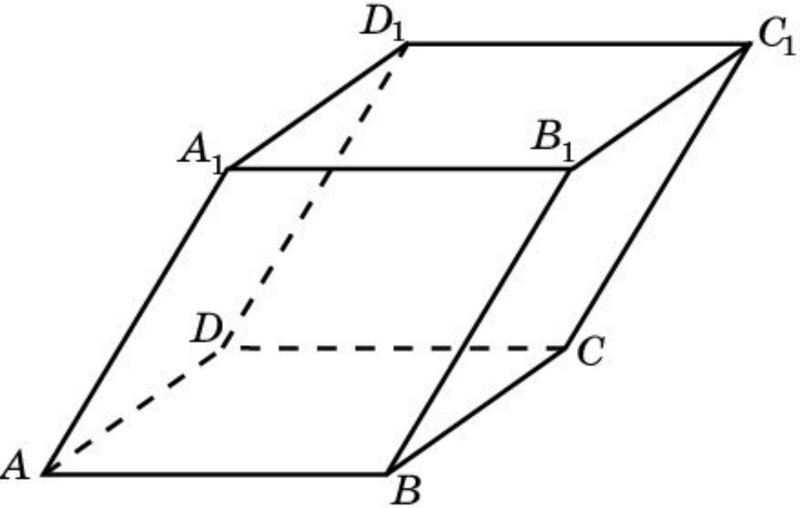
к грани $ABCD$, равна $\frac{S_2}{2a}$.

Следовательно, объем параллелепипеда равен $\frac{S_1 \cdot S_2}{2a}$.

Ответ: $\frac{S_1 \cdot S_2}{2a}$.

Упражнение 5

В параллелепипеде две грани являются прямоугольниками с площадями 20 см^2 и 24 см^2. Угол между их плоскостями равен 30°. Еще одна грань этого параллелепипеда имеет площадь 15 см^2. Найдите объем параллелепипеда.



Решение. Пусть площади граней $ABCD$ и ADD_1A_1 равны 20 см^2 и 24 см^2. Тогда площадь грани ABB_1A_1 равна 15 см^2, а угол A_1AB равен 30°. Пусть $AD = x$. Тогда $AB = 20/x$, $AA_1 = 24/x$. Имеем равенство

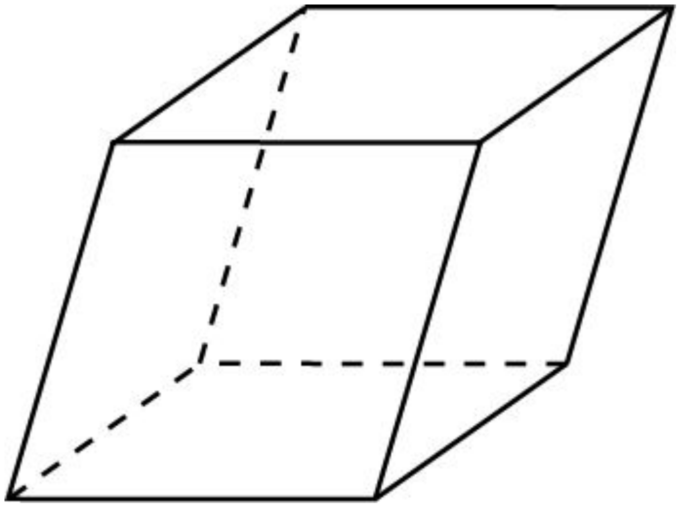
$$\frac{20}{x} \cdot \frac{24}{x} \cdot \frac{1}{2} = 15.$$

Откуда находим $x = 4$ см. Высота, проведенная к грани $ABCD$ равна половине ребра AA_1 и равна 3 см. Следовательно, объем параллелепипеда равен 60 см^3.

Ответ: 60 см^3.

Упражнение 6

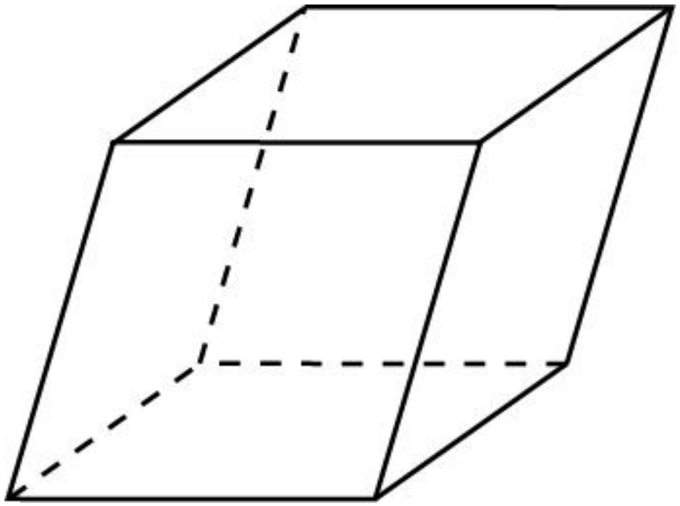
Могут ли площади всех граней параллелепипеда быть меньше 1, а объем параллелепипеда быть больше 100?



Ответ: Нет, объем будет меньше 1.

Упражнение 7

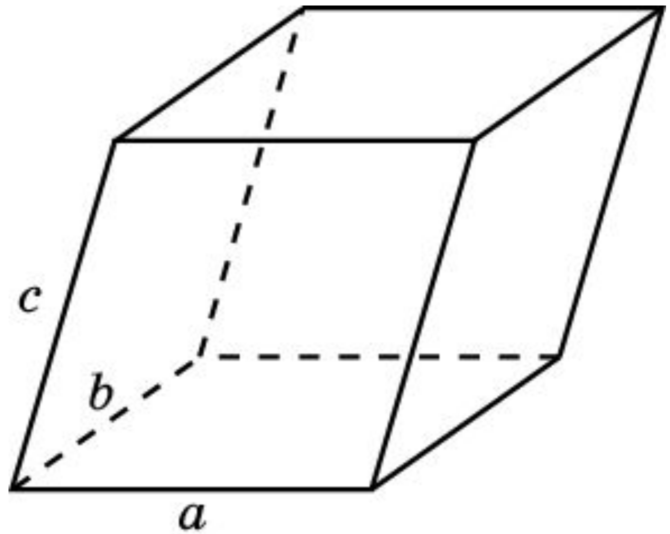
Могут ли площади всех граней параллелепипеда быть больше 100, а объем параллелепипеда быть меньше 1?



Ответ: Да.

Упражнение 8*

Какой наибольший объем может иметь параллелепипед, сумма длин ребер которого, выходящих из одной вершины, равна 1?



Решение. Обозначим длины ребер, выходящих из одной вершины a, b, c. Воспользуемся тем, что среднее геометрическое трех положительных чисел не превосходит их среднего арифметического, т.е $\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}$. Из этого неравенства следует, что наибольший объем равен $\frac{1}{27}$ в случае, если параллелепипед – куб со стороной $\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{27}$.

Упражнение 9*

В пространстве даны три параллелепипеда. Как провести плоскость, чтобы она разделила каждый параллелепипед на две части равного объема?

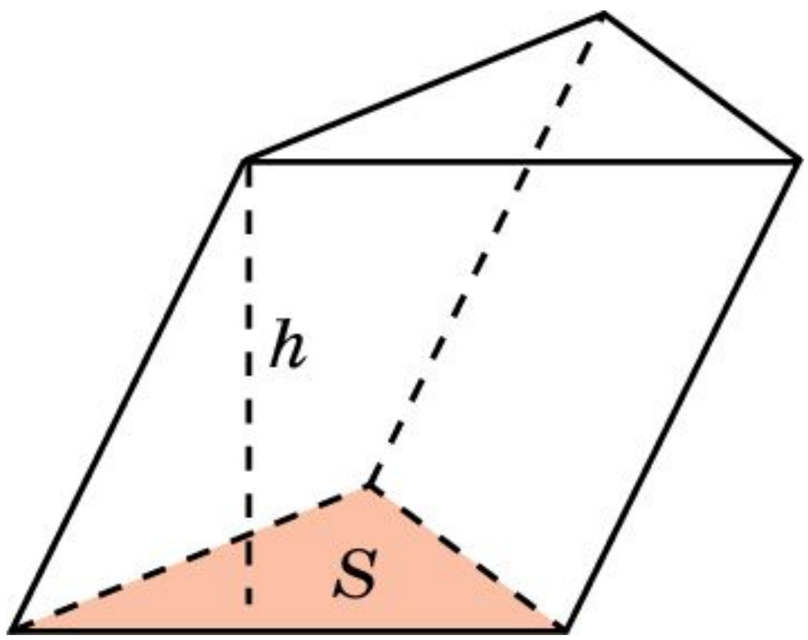
Ответ: Плоскость, проходящая через центры симметрии параллелепипедов.

Объем наклонной призмы 1

Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту, т.е. имеет место формула

$$V = S \cdot h,$$

где S – площадь основания призмы, h – ее высота.

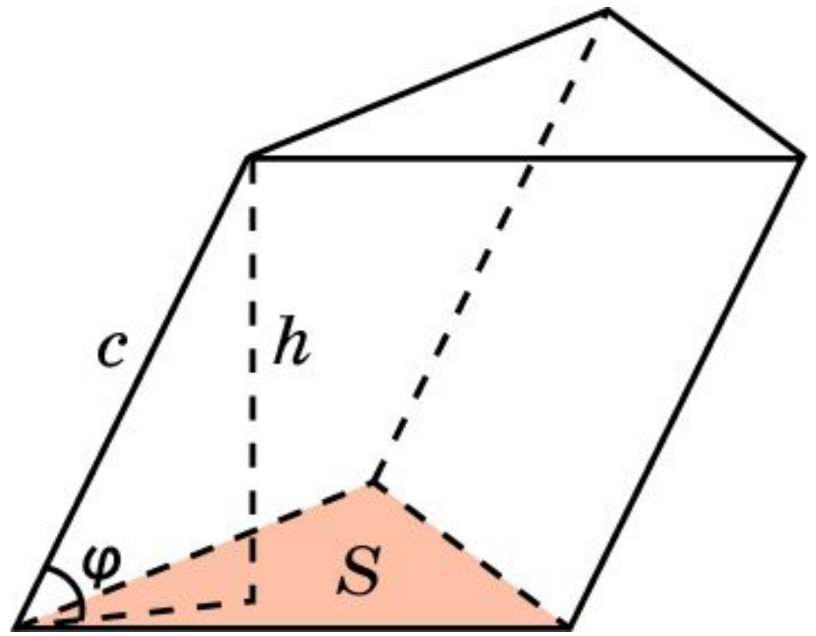


Объем наклонной призмы 2

Если боковое ребро призмы равно c и наклонено к плоскости основания под углом φ, то объем призмы вычисляется по формуле

$$V = S \cdot c \cdot \sin\varphi,$$

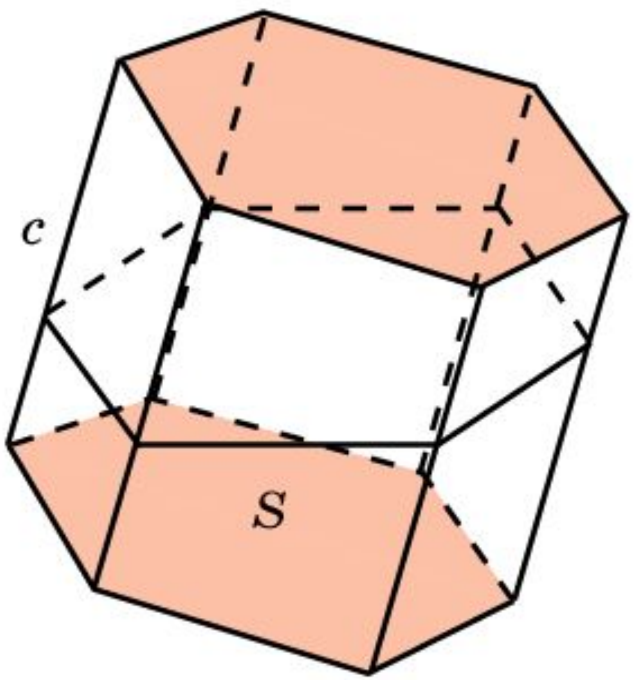
где S – площадь основания призмы.



Объем наклонной призмы 3

Если боковое ребро призмы равно c, а сечением призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру, является многоугольник площади S, то объем призмы вычисляется по формуле

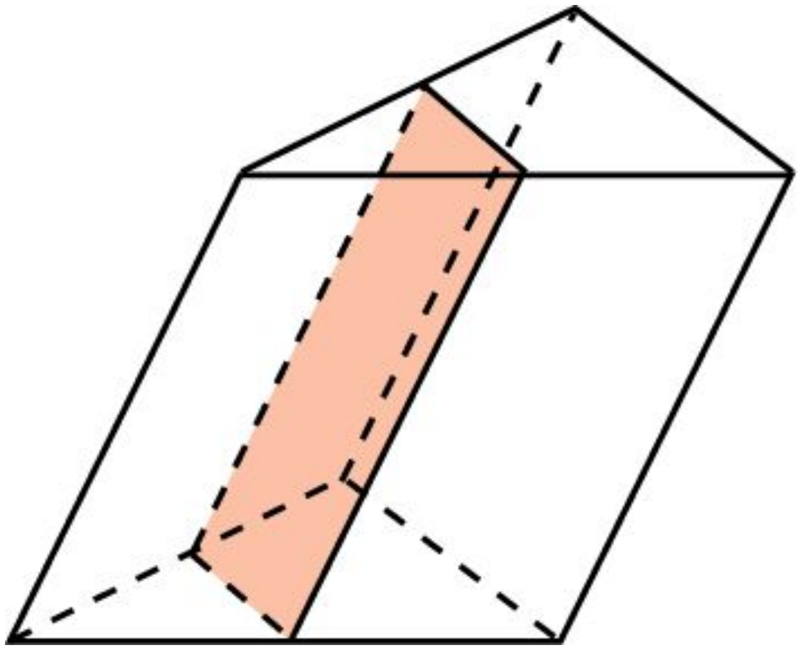
$$V = S \cdot c.$$



Действительно, если призму разрезать по сечению, и нижнюю часть параллельно перенести, поставив на верхнюю, то получим прямую призму с основанием площади S и боковым ребром c.

Упражнение 1

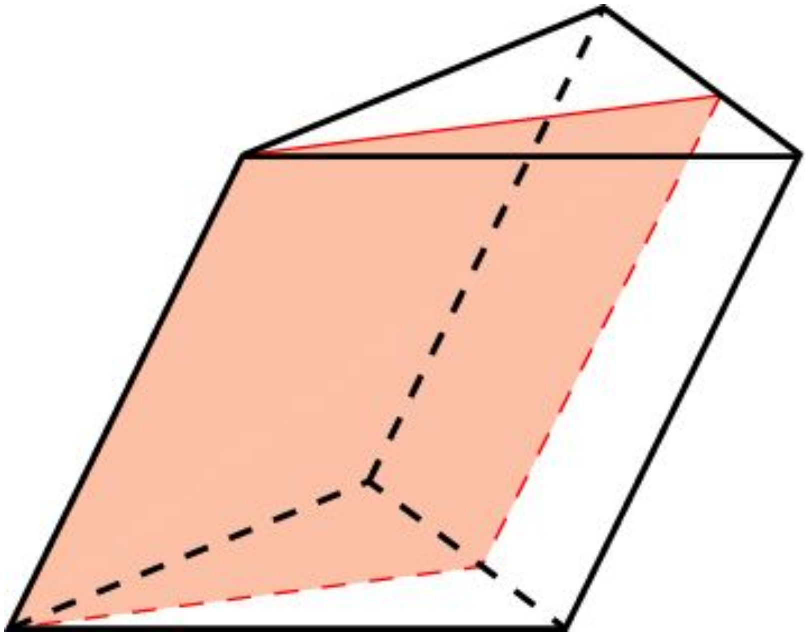
Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?



Ответ: 1:3.

Упражнение 2

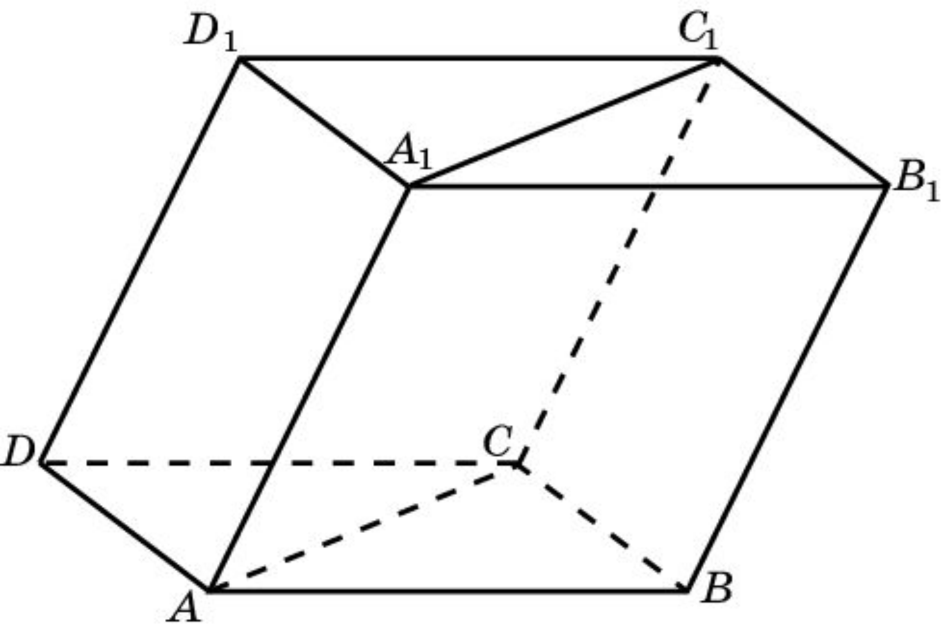
Треугольная призма пересечена плоскостью, которая проходит через боковое ребро и делит площадь противолежащей ему боковой грани в отношении $m : n$. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?



Ответ: $m : n$.

Упражнение 3

В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней равна Q, а расстояние от нее до противоположного ребра равно d. Найдите объем призмы.

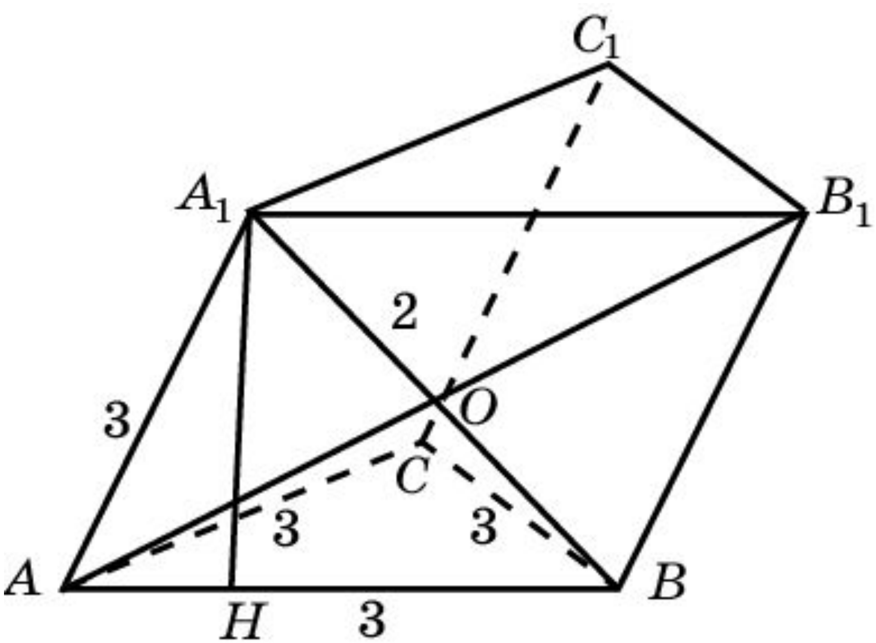


Решение. Пусть площадь грани BCC_1B_1 равна Q. Расстояние от этой грани до прямой AA_1 равно d. Достроим призму до параллелепипеда $A\ldots D_1$. Его объем равен Qd. Объем призмы составляет половину объема параллелепипеда, т.е. искомый объем равен $\frac{1}{2}Q\cdot d$.

Ответ: $\frac{1}{2}Q\cdot d$.

Упражнение 4

Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной 3. Одна из боковых граней перпендикулярна основанию и является ромбом, у которого меньшая диагональ равна 2. Найдите объем призмы.

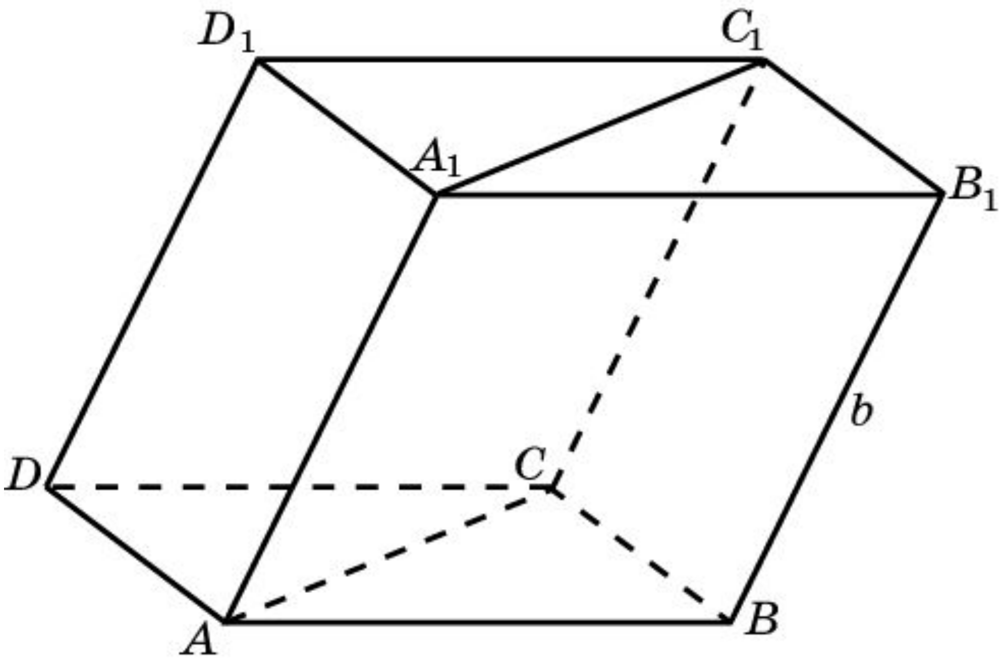


Решение. Проведем диагональ AB_1. Имеем: $AO = 2\sqrt{2}$, площадь ромба ABB_1A_1 равна $4\sqrt{2}$, высота A_1H равна $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. Следовательно, объем призмы равен $3\sqrt{6}$.

Ответ: $3\sqrt{6}$.

Упражнение 5

В наклонной треугольной призме две боковые грани перпендикулярны и имеют общее ребро, равное a. Площади этих граней равны S_1 и S_2. Найдите объем призмы.



Решение. Достроим призму до параллелепипеда $A \ldots D_1$.

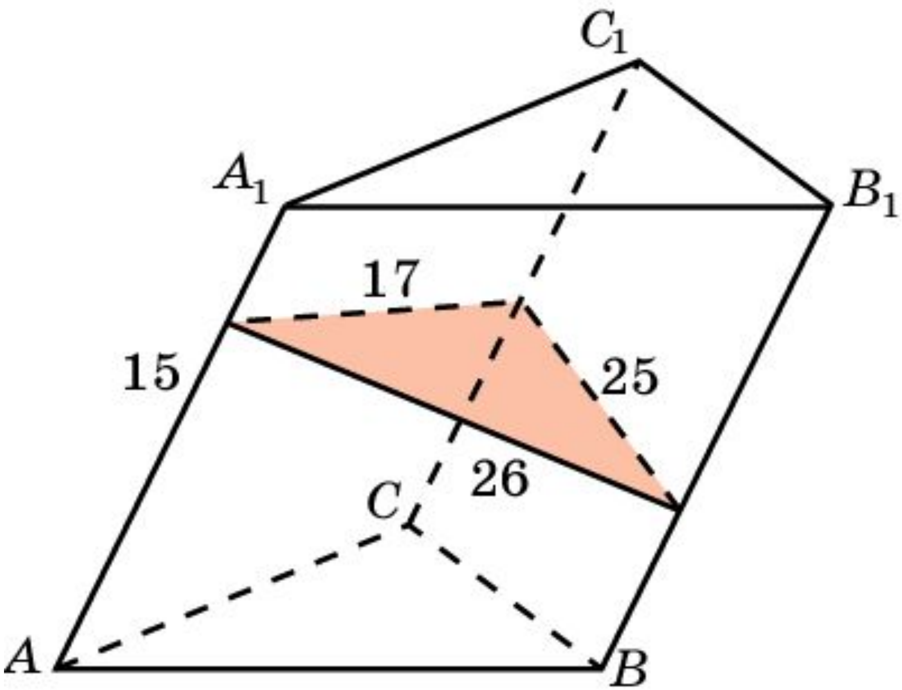
Его объем равен $\dfrac{S_1 \cdot S_2}{b}$.

Объем призмы составляет половину объема параллелепипеда, т.е. искомый объем равен $\dfrac{S_1 \cdot S_2}{2b}$.

Ответ: $\dfrac{S_1 \cdot S_2}{2b}$.

Упражнение 6

Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15 см, а расстояния между ними равны 26 см, 25 см и 17 см. Найдите объем призмы.

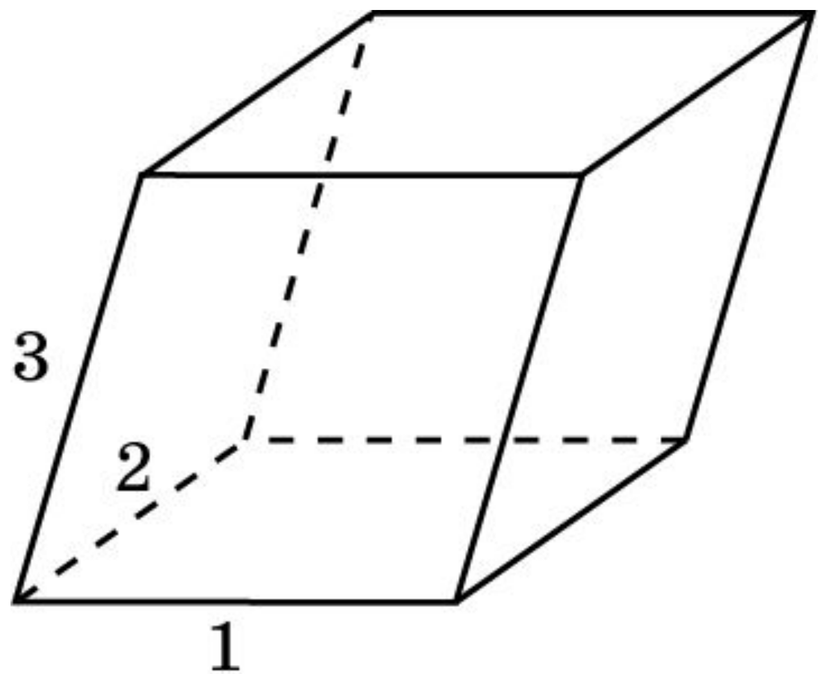


Решение. Проведем сечение призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру. Используя формулу Герона найдем площадь сечения. Она равна 204 см^2. Объем призмы равен 3060 см^3.

Ответ: 3060 см^3.

Упражнение 7

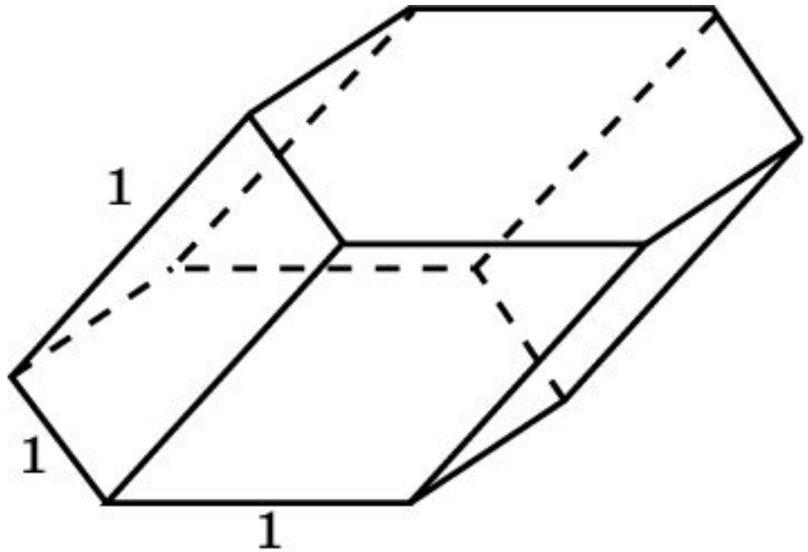
Основанием призмы является параллелограмм со сторонами 1, 2 и острым углом 30°. Боковые ребра равны 3 и составляют с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем призмы.



Ответ: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Упражнение 8

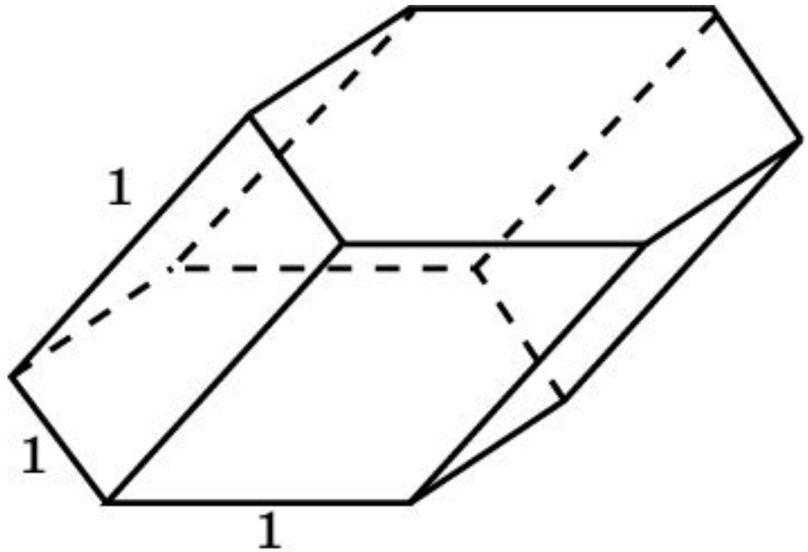
Найдите объем правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 1, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 30°.



Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Упражнение 9

Все ребра правильной шестиугольной призмы равны 1. Одна из боковых граней является прямоугольником и наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем призмы.



Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

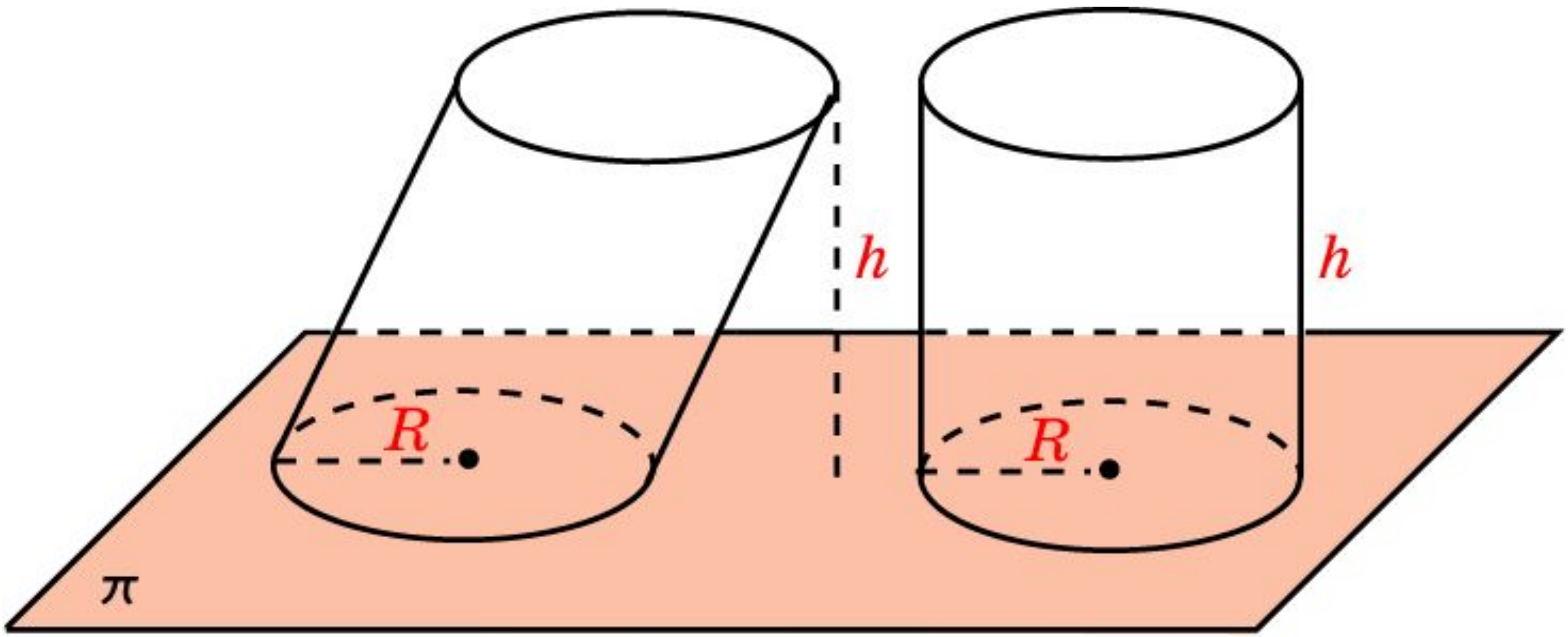
Упражнение 10

В основаниях призмы квадраты. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через центры квадратов, делит призму на две равновеликие части?

Ответ: Да.

Объем наклонного цилиндра

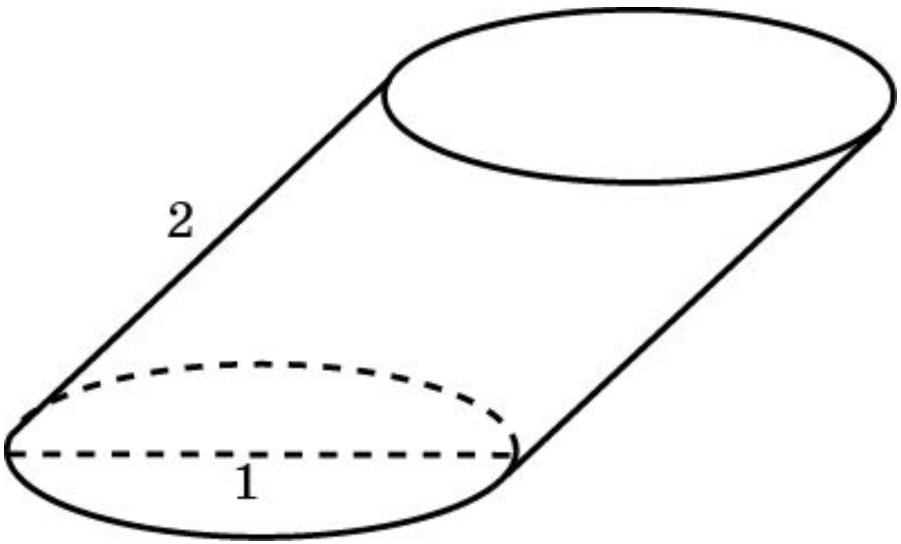
Объем кругового цилиндра, высота которого равна h и радиус основания R, вычисляется по формуле $V=\pi R^2\cdot h$.



$$\boxed{V = \pi R^2 \cdot h}$$

Упражнение 1

Диаметр основания цилиндра равен 1. Образующая равна 2 и наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем цилиндра.



Ответ: $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{4}$.

Упражнение 2

Верно ли, что любая плоскость, проходящая через центры оснований кругового цилиндра, делит его на равновеликие части?

Ответ: Да.

Упражнение 3

Два цилиндра имеют равные высоты, а площадь основания одного в два раза больше площади основания другого. Как относятся их объемы?

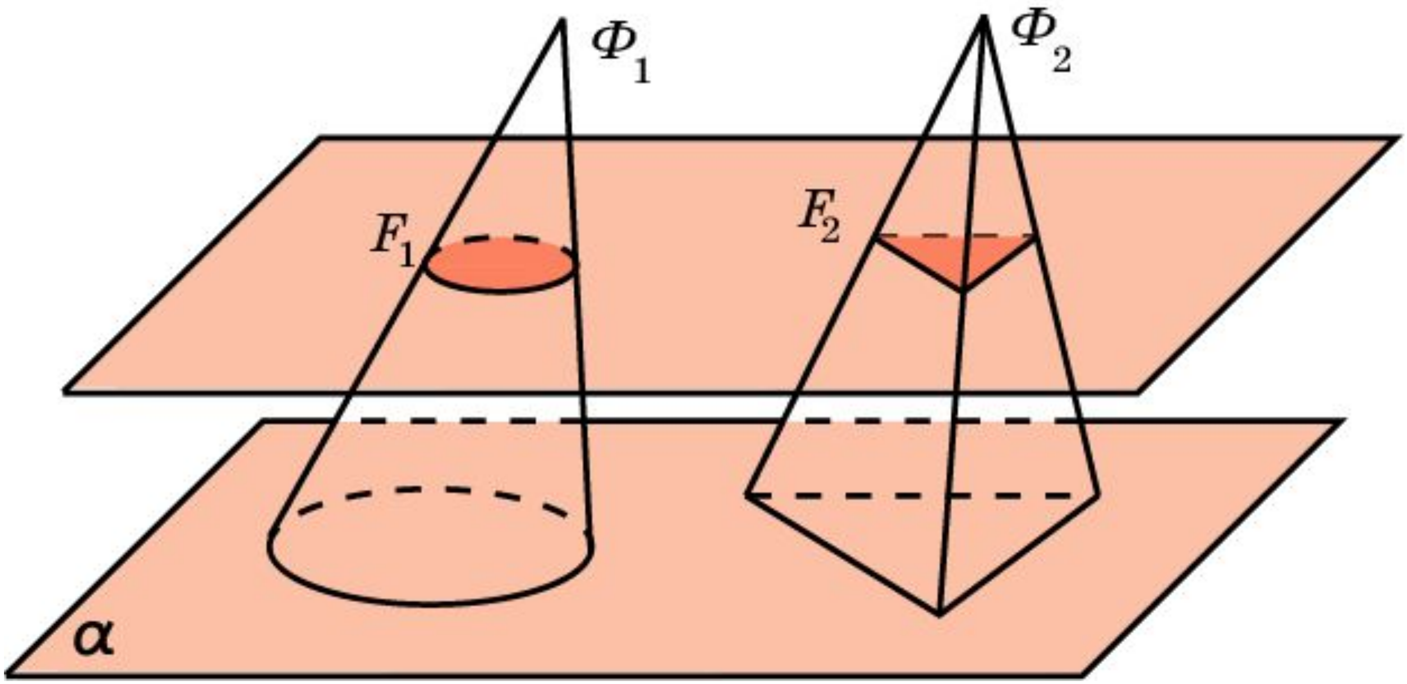
Ответ: 2:1.

Обобщенный конус

Пусть F - фигура на плоскости π, и S - точка вне этой плоскости. Отрезки, соединяющие точки фигуры F с точкой S, образуют фигуру в пространстве, которую мы будем называть обобщенным конусом. Фигура F называется основанием обобщенного конуса, точка S - вершиной обобщенного конуса. Перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания, называется высотой обобщенного конуса.

Частным случаем обобщенного конуса является конус и пирамида.

Теорема. Если два обобщенных конуса имеют равные высоты и основания равной площади, то их объемы равны.



Упражнение 1

Верно ли, что две пирамиды, имеющие общее основание и вершины, расположенные в плоскости, параллельной основанию, равновелики?

Ответ: Да.

Упражнение 2

Два конуса имеют равные высоты, а площадь основания одного в три раза больше площади основания другого. Как относятся их объемы?

Ответ: 3:1.

Упражнение 3

Верно ли, что любая плоскость, проходящая через вершину и центр основания кругового конуса, делит его на равновеликие части?

Ответ: Да.

Упражнение 4

В основании пирамиды квадрат. Верно ли, что любая плоскость, проходящая через вершину пирамиды и центр основания, делит пирамиду на две равновеликие части?

Ответ: Да.