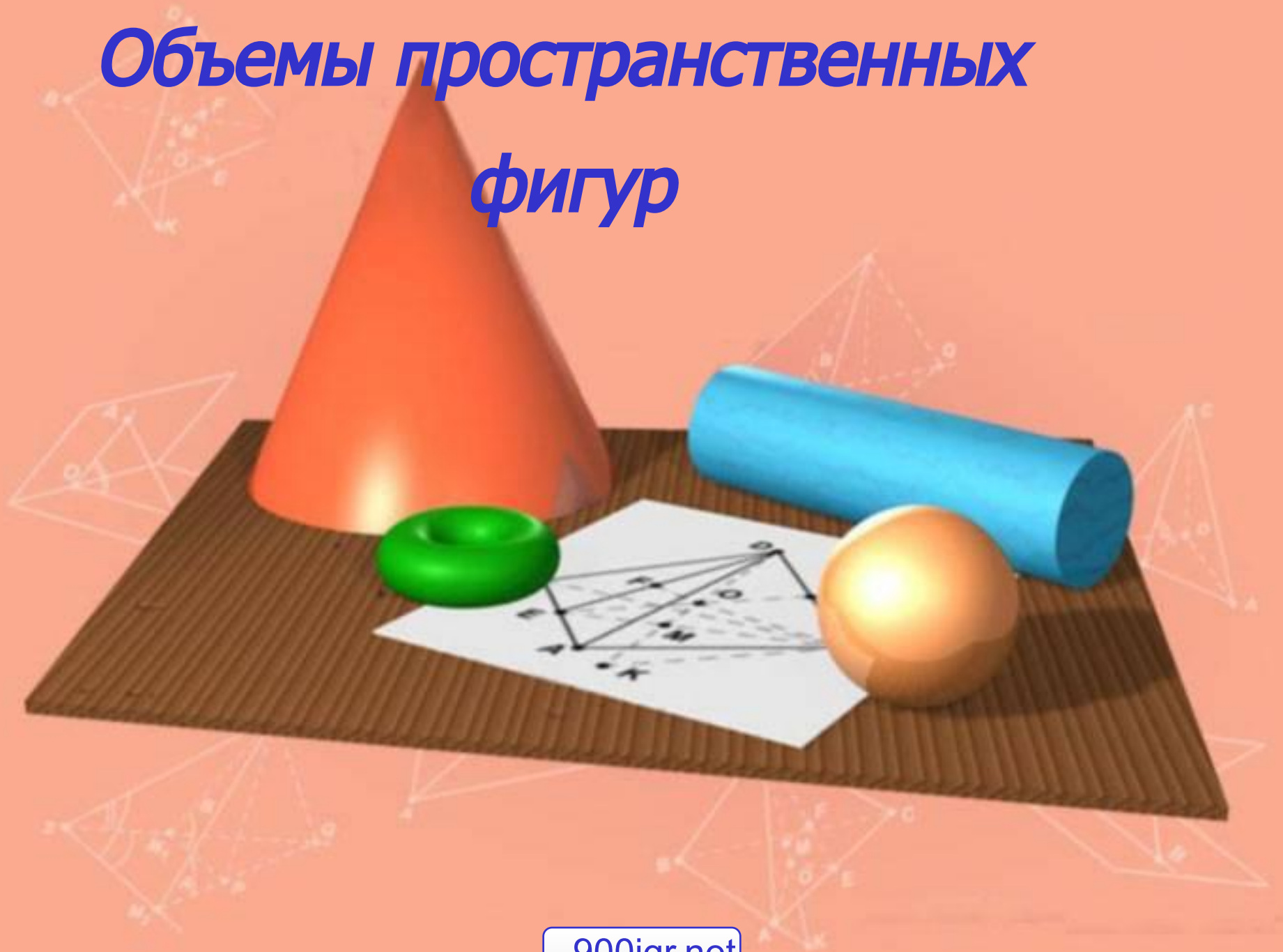



Объемы пространственных фигур



A 3D rendering of three geometric shapes: a sphere in the foreground, a cylinder behind it to the right, and a cone behind it to the left. The scene is lit from the right, creating highlights and shadows. The text is overlaid in the center.

**Вычисление объемов
геометрических тел с
помощью
определенного
интеграла.**

Содержание урока :

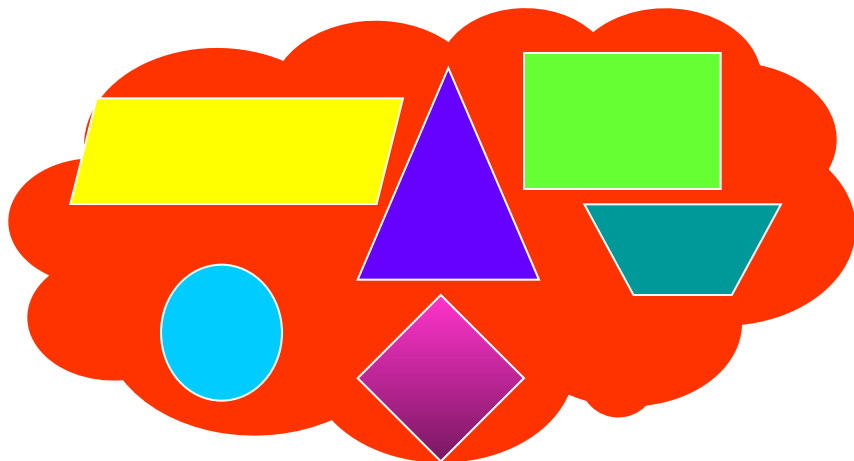
- 1. Понятие объема**
- 2. Объем прямой призмы**
- 3. Объем цилиндра**
- 4. Вычисление объемов тел с помощью определенного интеграла**
- 5. Объем наклонной призмы**
- 6. Объем пирамиды**
- 7. Объем конуса**
- 8. Объем шара**
- 9. Объем шарового сегмента, шарового слоя, шарового сектора**

ЦЕЛИ УРОКА:

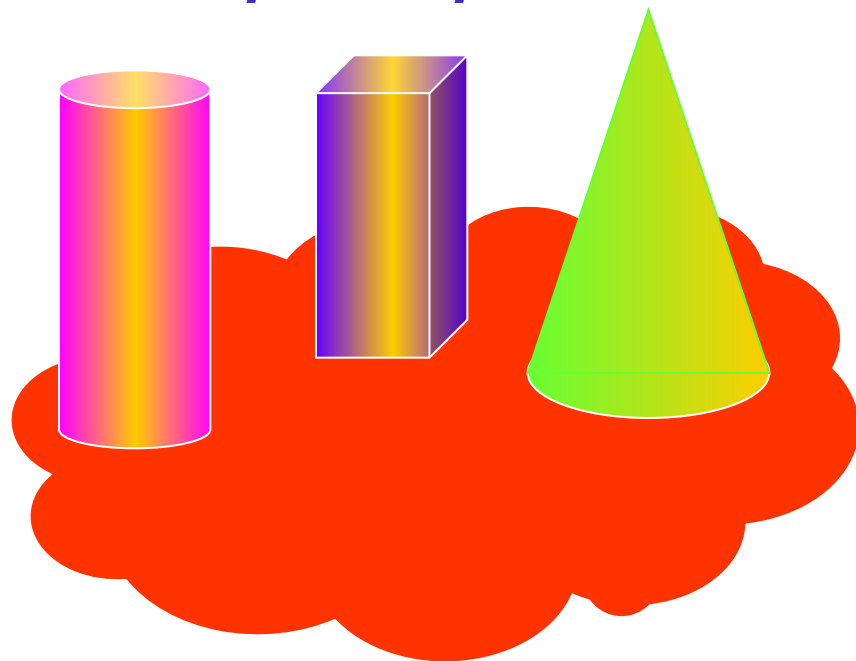
- ✓ Усвоить понятие объёма пространственной фигуры;
- ✓ Запомнить основные свойства объёма;
- ✓ Узнать формулы объёмов пространственных фигур.
- ✓ Раскрытие связи между двумя науками: алгеброй и геометрией. Вывод основной формулы для нахождения объёмов геометрических тел.

Что изучают

Геометрия



Стереометрия



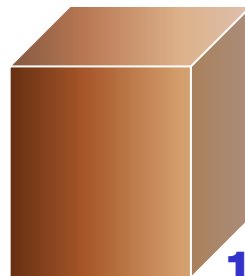
Единицы измерения
площади плоской
фигуры: см^2 ; дм^2 ;
 м^2



1 см

1 см

Единицы измерения объемов:
 см^3 ; дм^3 ; м^3 ...



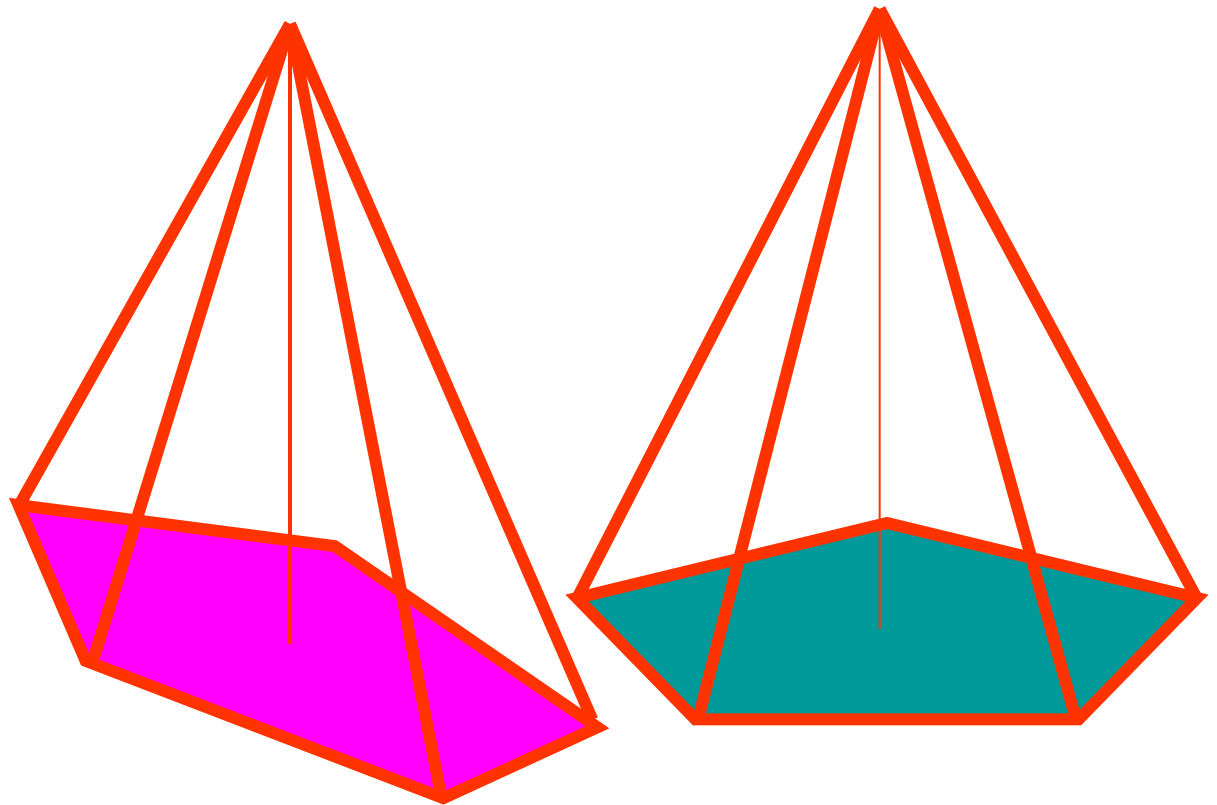
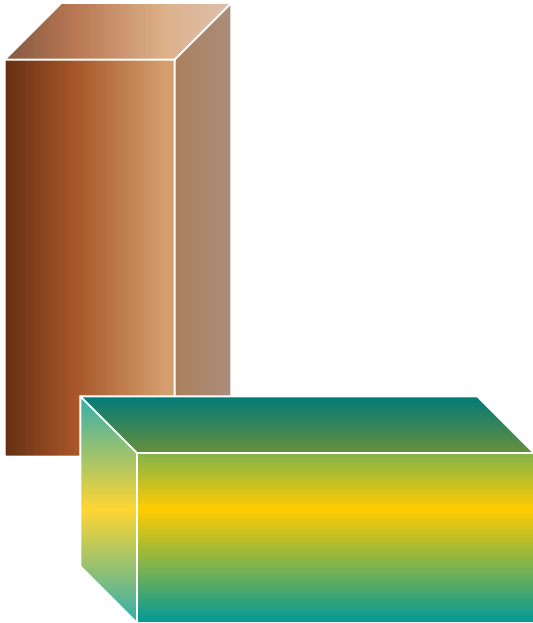
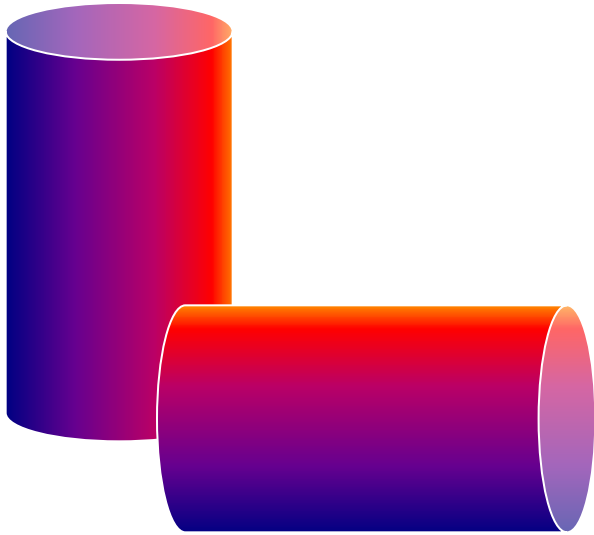
1 см

1 см

1 см

Равные тела имеют равные объемы

Если тела А, В, С имеют равные размеры,
то объемы этих тел – одинаковы.



Понятие объема.



Понятие объема в пространстве вводится аналогично понятию площади для фигур на плоскости.

Определение 1. *Объемом тела* называется положительная величина, характеризующая часть пространства, занимаемую телом, и обладающая следующими свойствами:

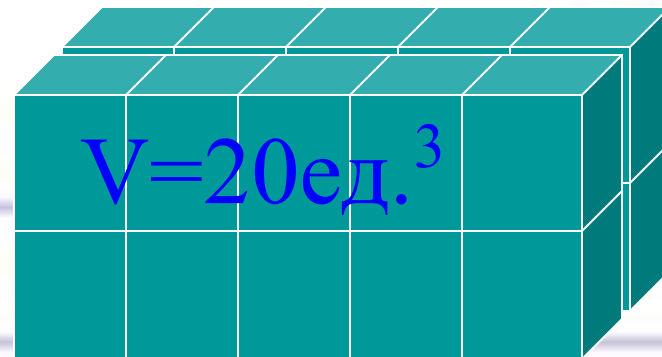
равные тела имеют равные объемы; при параллельном переносе тела его объем не изменяется;

если тело разбить на части, являющиеся простыми телами, то объем тела равен объему его частей;

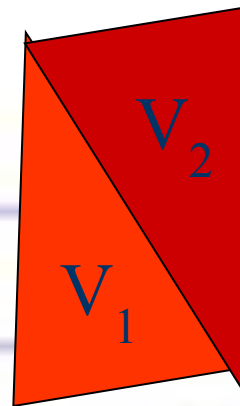
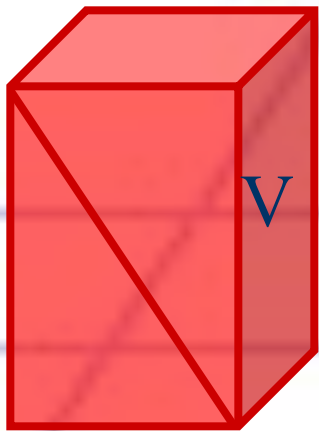
за единицу объема принят объем куба, ребро которого равно единице длины;

Определение 2. Тела с равными объемами называются *равновеликими*. Из свойства 2 следует, что если тело с объемом V_1 содержится внутри тела с объемом V_2 , то $V_1 < V_2$.

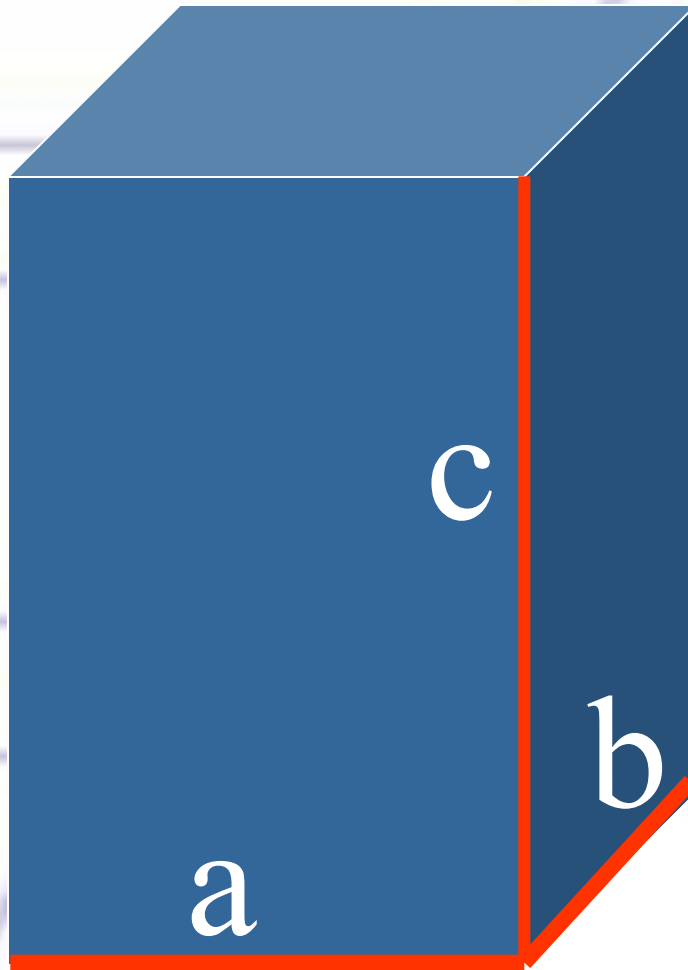
Чтобы найти объём многогранника,
нужно разбить его на кубы с ребром,
равным единице измерения.



Если тело разбить на части, являющиеся простыми телами, то объем тела равен объему его частей.



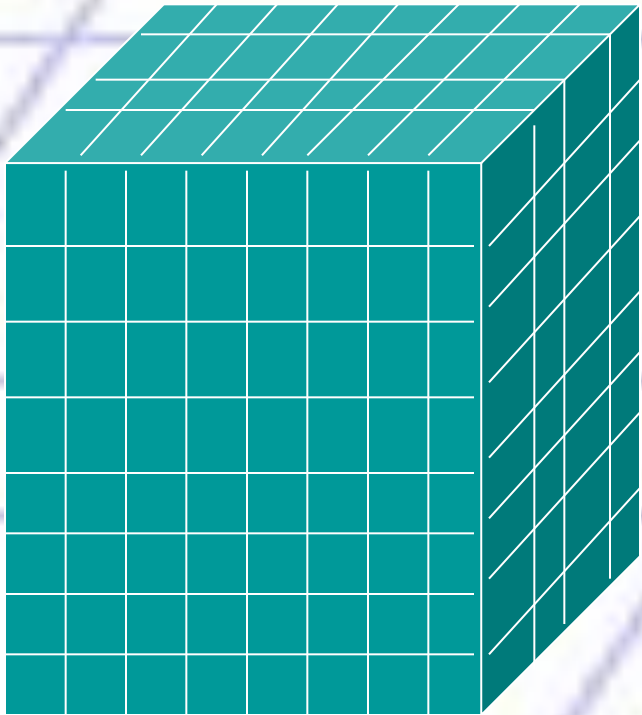
Напомним формулу объёма
прямоугольного параллелепипеда.



$$V=abc$$

Объем прямоугольного параллелепипеда

$1/10^n$



$$V = a * b * c$$

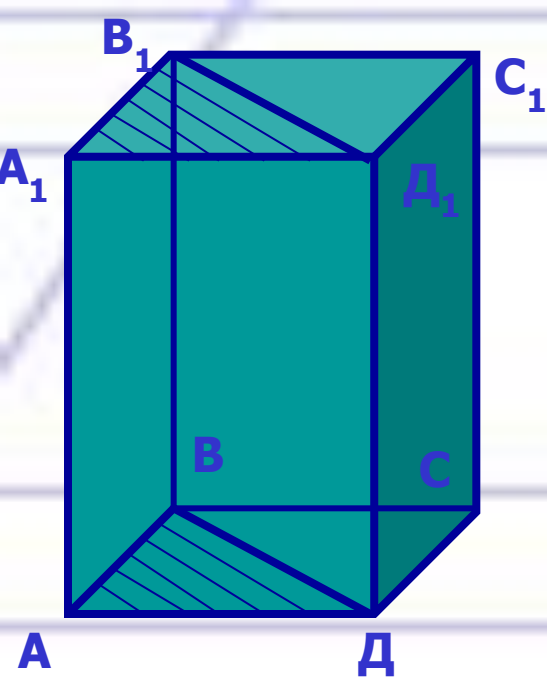
a, b, c - конечные десятичные дроби

Каждое ребро разбивается параллельными плоскостями, проведенными через точки деления ребер на равные части длиной $1/10^n$.
объем каждого полученного кубика будет равен $1/10^{3n}$, т.к. длина ребер этого кубика $1/10^n$, то

$$a * 10^n; b * 10^n; c * 10^n$$

Т.к. $n \rightarrow +\infty$, то $V_n \rightarrow V = abc$

$$V = a * b * c * 10^{3n} * 1/10^{3n} = a * b * c$$



Построим сечение прямоугольного параллелепипеда, проходящее через диагонали верхнего и нижнего оснований

Следствие 1:

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

$$V = S_{oc} * h, \text{ т.к. } S_{oc} = a * b; h = c$$

Следствие 2:

Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник равен произведению площади основания на высоту.

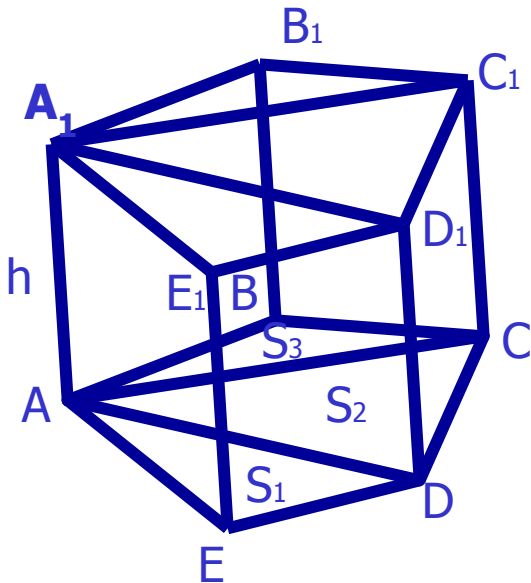
$$\text{Т.к. } \triangle ABD = 1/2 \square ABCD \rightarrow S_{ABD} = 1/2 S_{ABCD} \rightarrow V_{ABC} = 1/2 S_{ABCD} * h = S_{ABD} * h$$

Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту

2. Призма с произвольным основанием:

Провели непересекающиеся диагонали оснований :AC, AD, A₁C₁, A₁D₁; получили три треугольных призмы.

$$V_{np} = V_1 + V_2 + V_3 = S_1 * h + S_2 * h + S_3 * h \\ = h(S_1 + S_2 + S_3) = h * S_{oc}$$



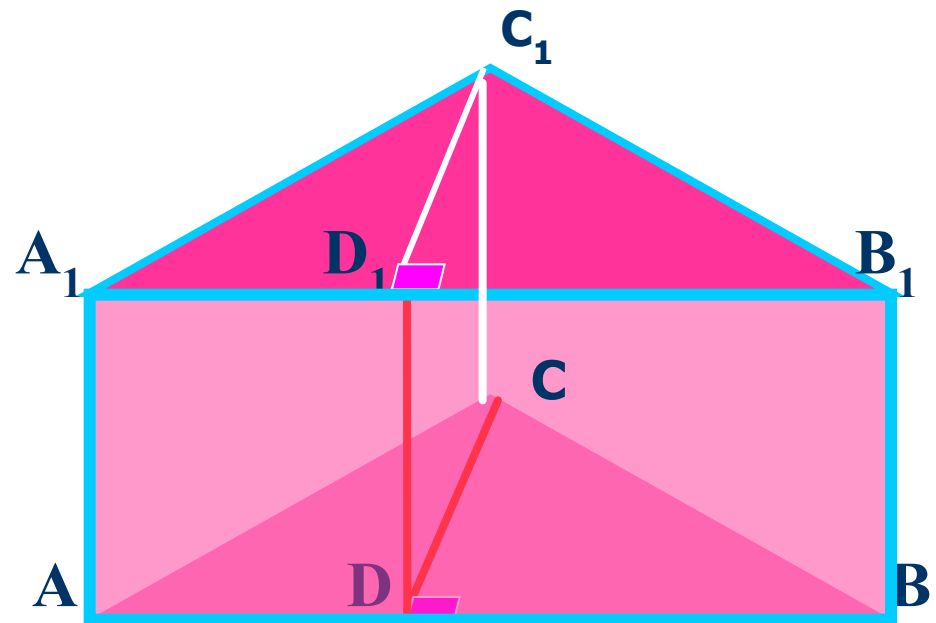
1. Призма -треугольная:

C₁D₁, CD- высоты оснований

$V_{np} = V_{ABD} + V_{BDC}$ (ΔADC; ΔBCD-прямоуг-е)

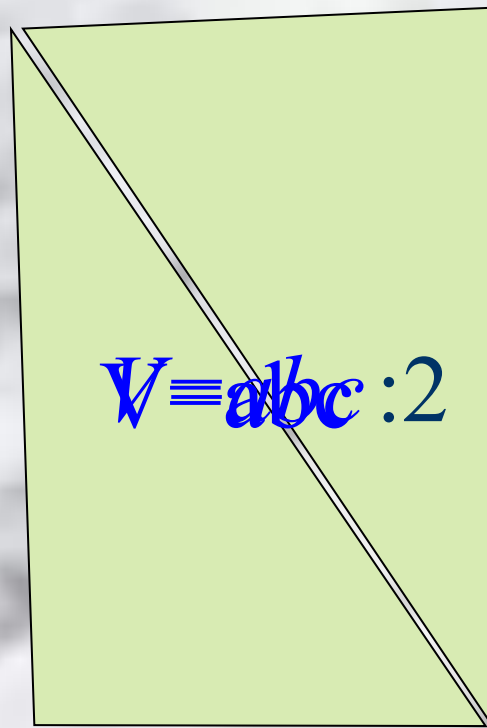
$$\rightarrow V_{ABC} = S_{ACD} * h + S_{BCD} * h = S_{ABC} * h$$

$$= \frac{1}{2} AB * CD * h$$



Ещё раз

:2



$$V=abc:2$$

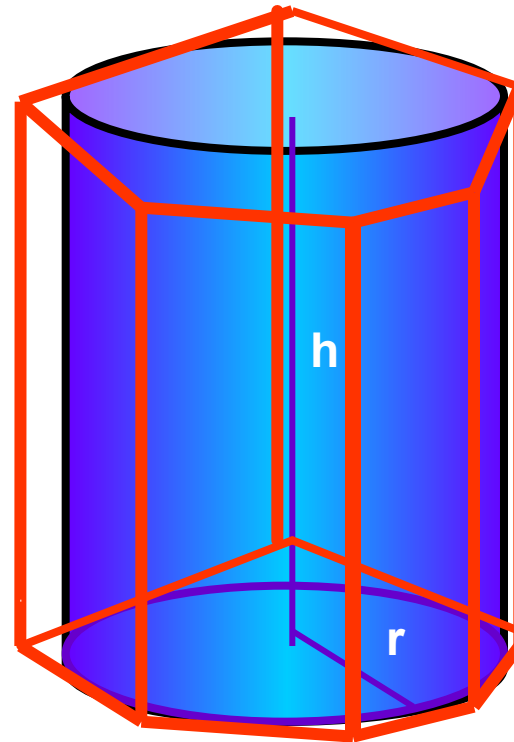
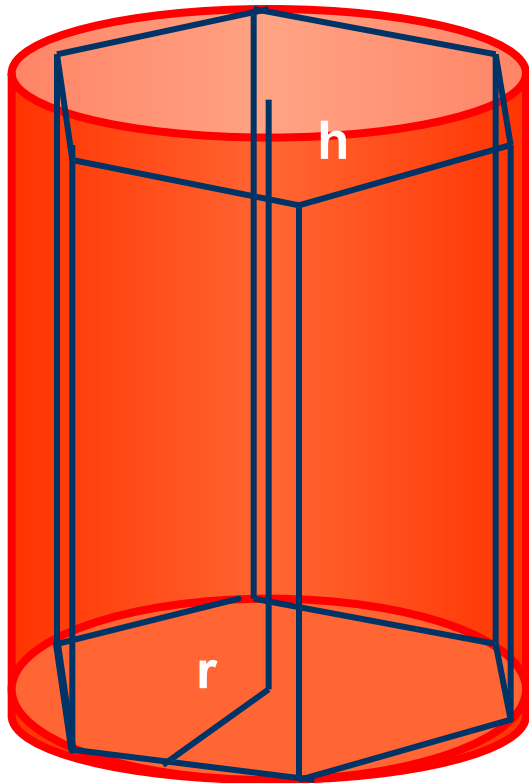
$$V=Sc$$

$$V=Sh$$

Объем цилиндра

Вписанная
призма

Призмы, которые вписаны и описаны около цилиндра, и если их основание вписаны и описаны около цилиндра, то высоты этих призм равны высоте самого цилиндра.



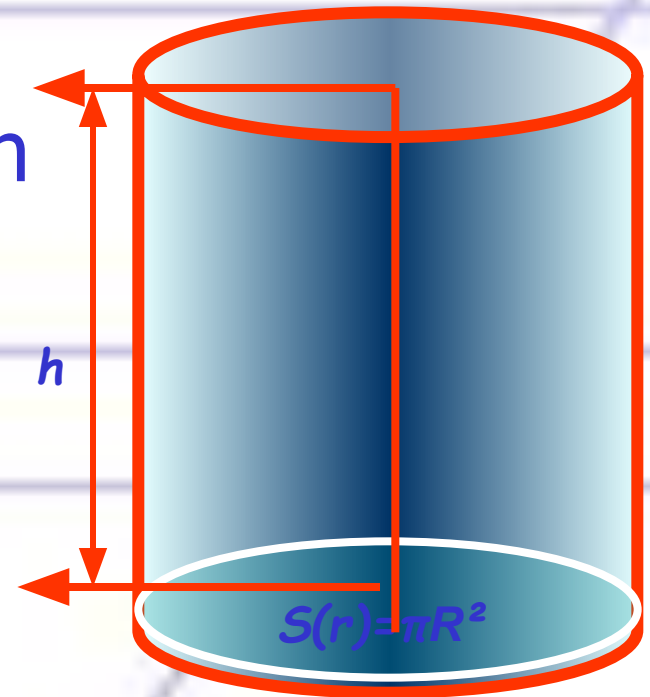
Описанная
призма

Теорема:

- Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

$$V = S * h$$

$$V = h * S(r) = \pi R^2 * h$$



Доказательство:

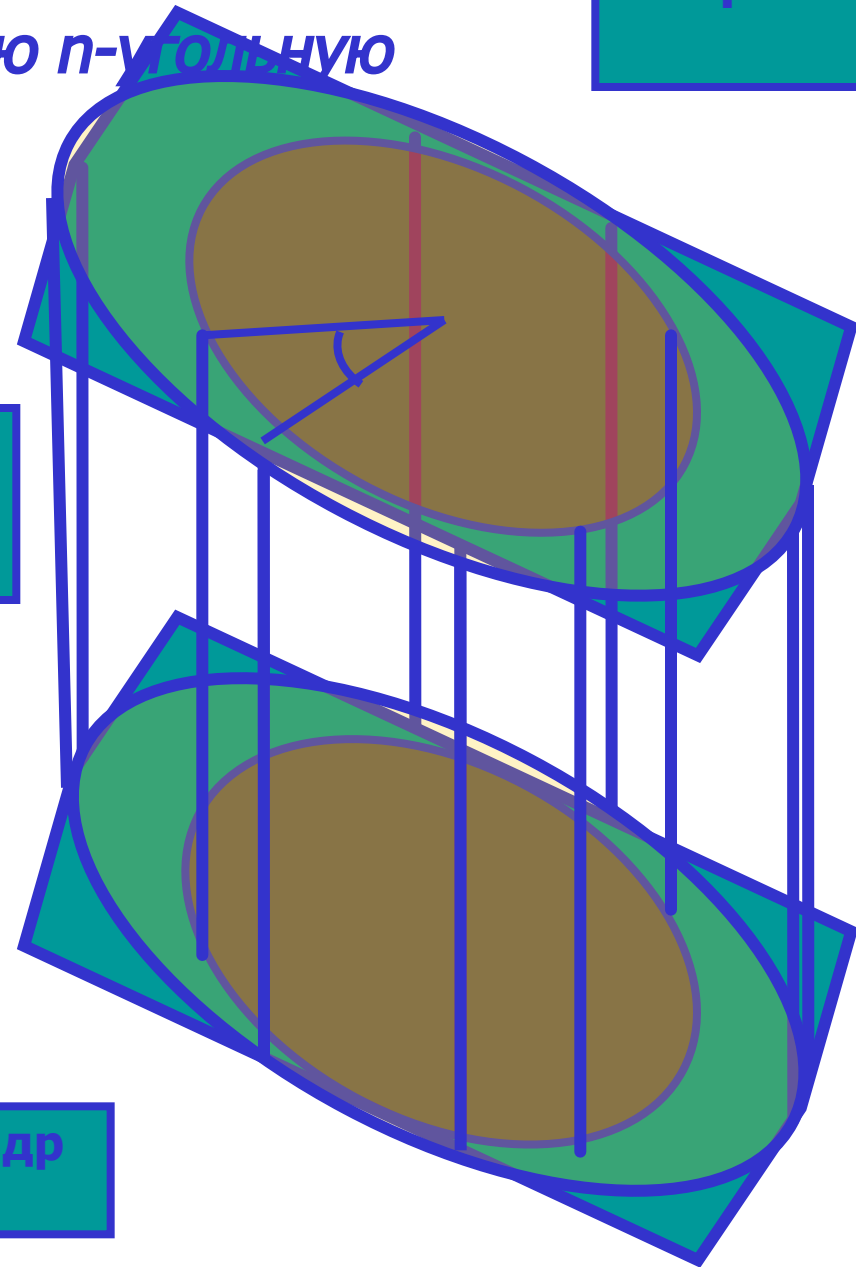
- Впишем в цилиндр правильную n -угольную призму F_n , а в F_n впишем цилиндр P_n .

$F_n = S_n \cdot h$ где S_n - площадь основания призмы
Цилиндр P содержит призму F_n , которая в свою очередь, содержит цилиндр P_n .
Тогда $V_n < S_n \cdot h < V$ (1)
Будем увеличивать число $n \Rightarrow R_n = r \cos 180/n$
при $n \rightarrow +\infty$
Поэтому: $\lim V_n = V$
Из неравенства (1) следует, что $\lim S_n \cdot h = V$
Но $\lim S_n = \pi r^2$ таким образом
 $V = \pi r^2 h$
 $\pi r^2 = S \Rightarrow V = Sh$

Призма
 F_n

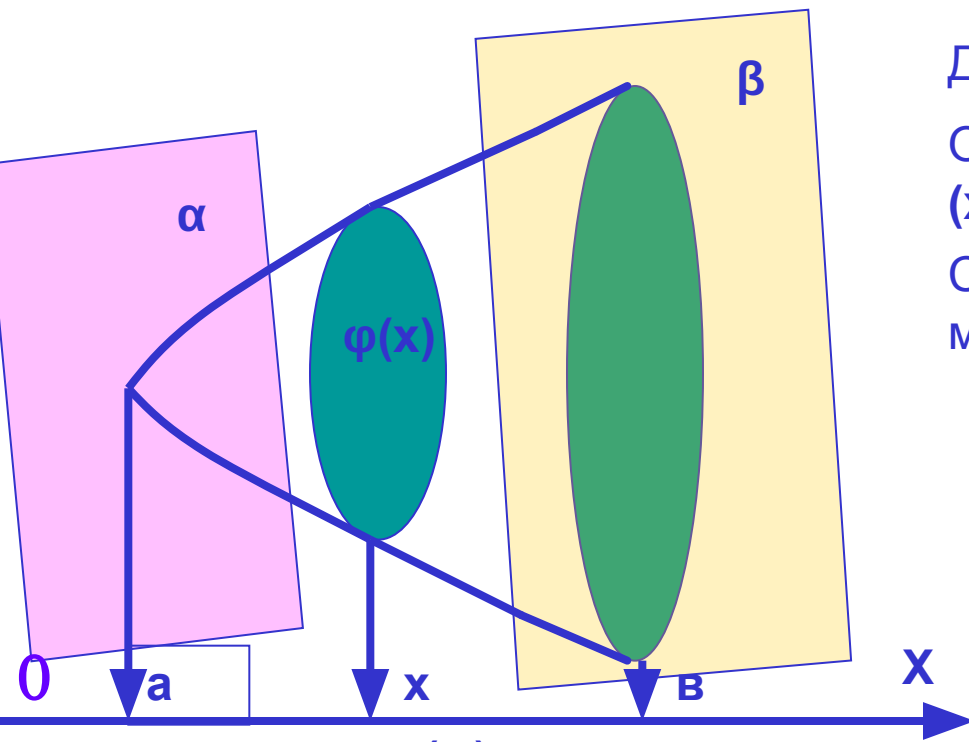
Цилиндр
 P_n

Цилиндр
 P



Цели :

- *Научиться применять интегрирование функций в качестве одного из способов решения задач на нахождение объёмов геометрических тел.*
- *Развитие логического мышления, пространственного воображения, умений действовать по алгоритму, составлять алгоритмы действий.*
- *Воспитание познавательной активности, самостоятельности.*

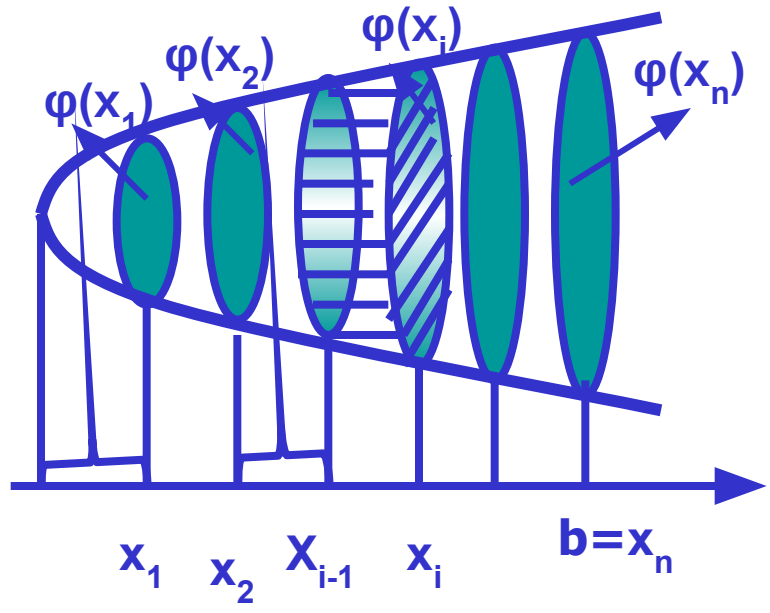


Дано : тело $T, \alpha \perp \beta, Ox$ -ось, $Ox \perp \alpha, Ox \perp \beta$
 $Ox \cap \alpha = a, Ox \cap \beta = b, a < b, \varphi(x)$ -сечение, $\varphi(x) \perp Ox, \varphi(x) \cap Ox = x$

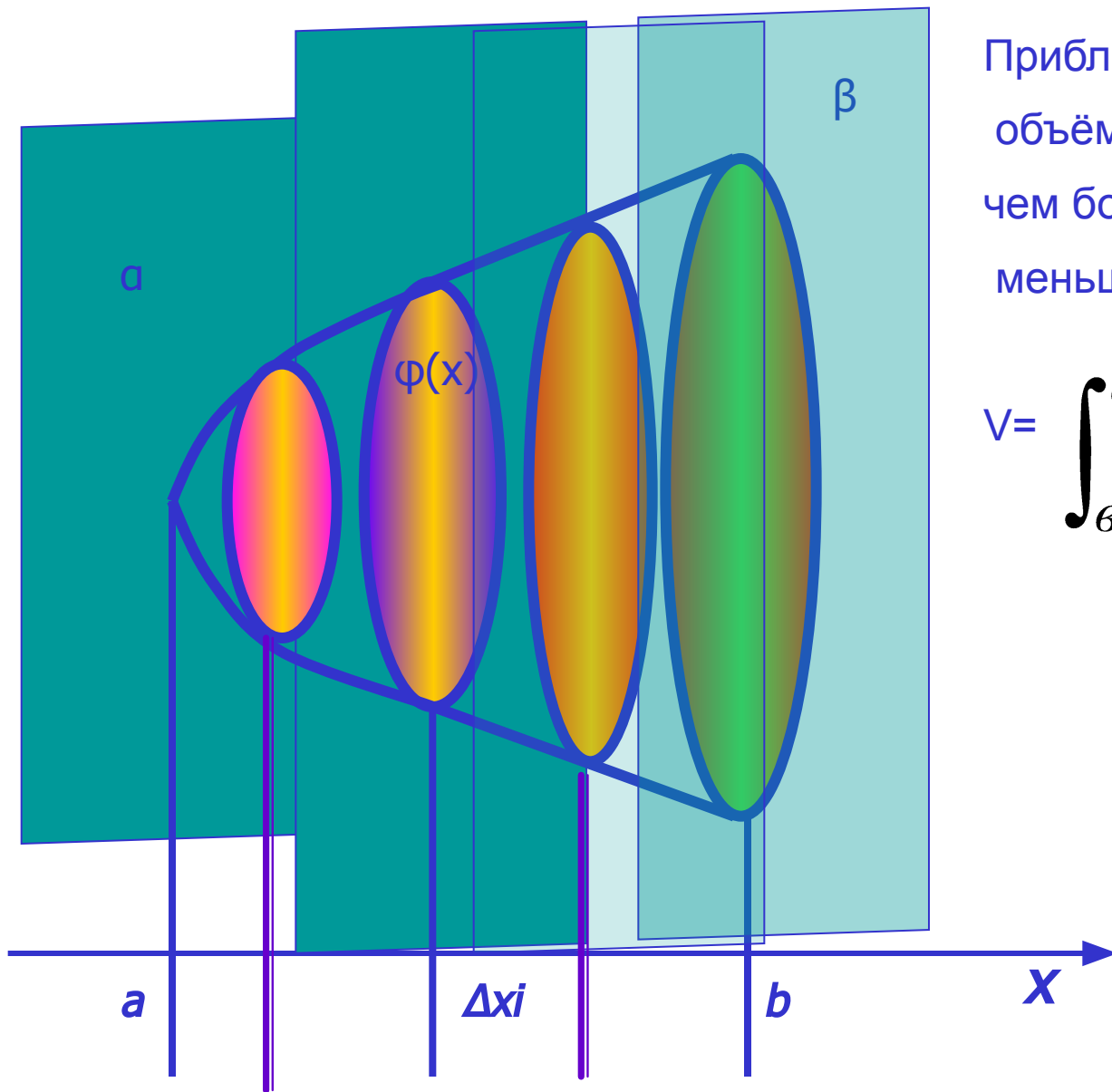
Сечение имеет форму круга либо многоугольника для любого $x \in [a; b]$ (при $x = a$ и $x = b$ сечение может вырождаться в точку, как, например, при $x = a$ на рисунке).

Обозначим площадь фигуры $\Phi(x)$ через $S(x)$ и предположим, что $S(x)$ – непрерывная функция на числовом отрезке $[a; b]$.

Разобьем числовой отрезок $[a; b]$ на n равных отрезков $x_2 - x_1 = (b - a) : n$



Если сечение $\Phi(x_i)$ – круг, то объём тела T_i (заштрихованного на рисунке) приближён равно объёму цилиндра с основанием Φ_i и высотой Δx_i . Если $\Phi(x_i)$ – многоугольник, то объём тела T_i приближён равно объёму прямой призмы с основанием $\Phi(x_i)$ и высотой Δx_i .



Приближённое значение V_n
объёма тела T тем точнее,
чем больше n и, следовательно,
меньше Δx_i

$$V = \int_a^b S(x) dx = ?$$

Объем наклонной призмы

Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту

1. Треугольная призма

Т.п. имеет S основания и высоту h .

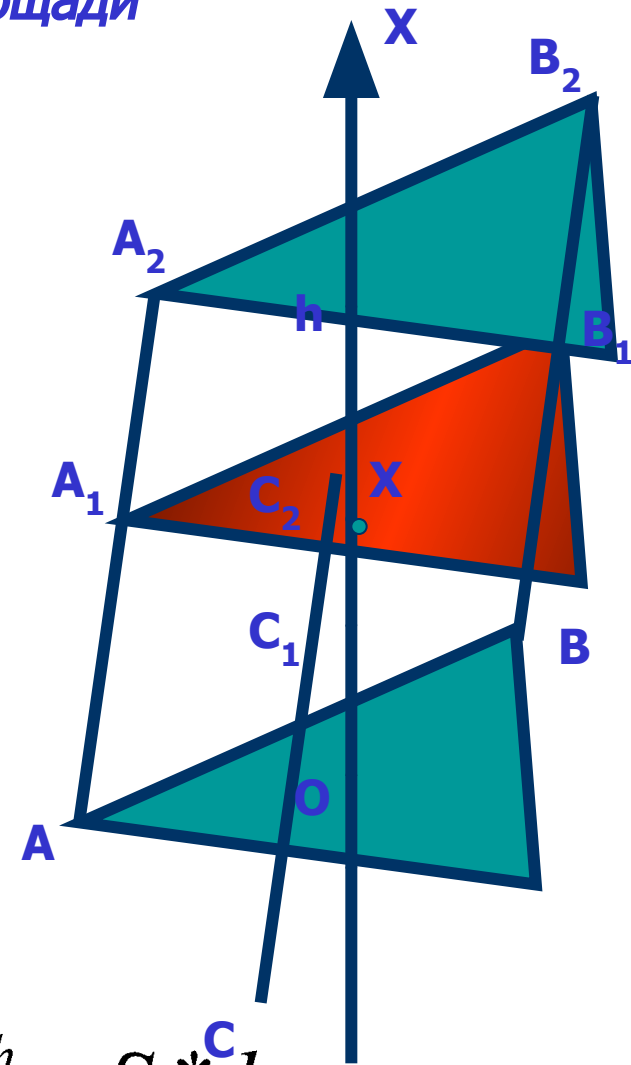
$O = OX \cap (ABC)$; $OX \perp (ABC)$; $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$;

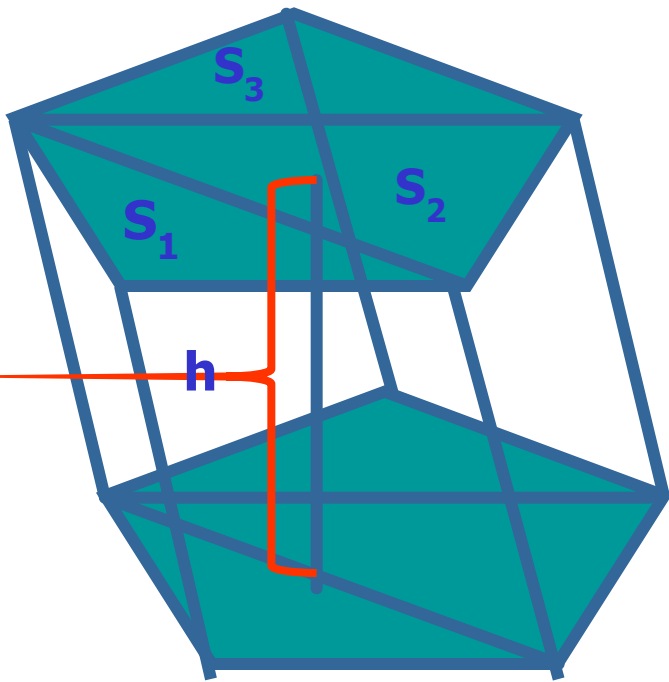
$(A_1B_1C_1)$ -плоскость сечения: $(A_1B_1C_1) \perp OX$

$S(x)$ -площадь сечения; $S = S(x)$, т.к.

$(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$ и
 $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (AA_1C_1C -
параллелограмм $\rightarrow AC = A_1C_1, BC = B_1C_1,$
 $AB = A_1B_1$)

$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h S dx = S \int_0^h dx = Sx \Big|_0^h = S * h$$





2. Наклонная призма с многоугольником в основании

$$\begin{aligned}V &= V_1 + V_2 + V_3 = \\ &= S_1 * h + S_2 * h + S_3 * h = \\ &= h(S_1 + S_2 + S_3) = S * h\end{aligned}$$

Объем наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь перпендикулярного ребру сечения

Объем пирамиды

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту

1. Дана треугольная пирамида

$OX \perp (ABC)$, $OX \cap (ABC) = M$; $OX \cap (A_1B_1C_1) = M_1$
 X - абсцисса точки M ; $S(x)$ -площадь сечения; S -площадь основания
 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ так, как $AB \parallel A_1B_1$; $AC \parallel A_1C_1$;
 $BC \parallel B_1C_1$

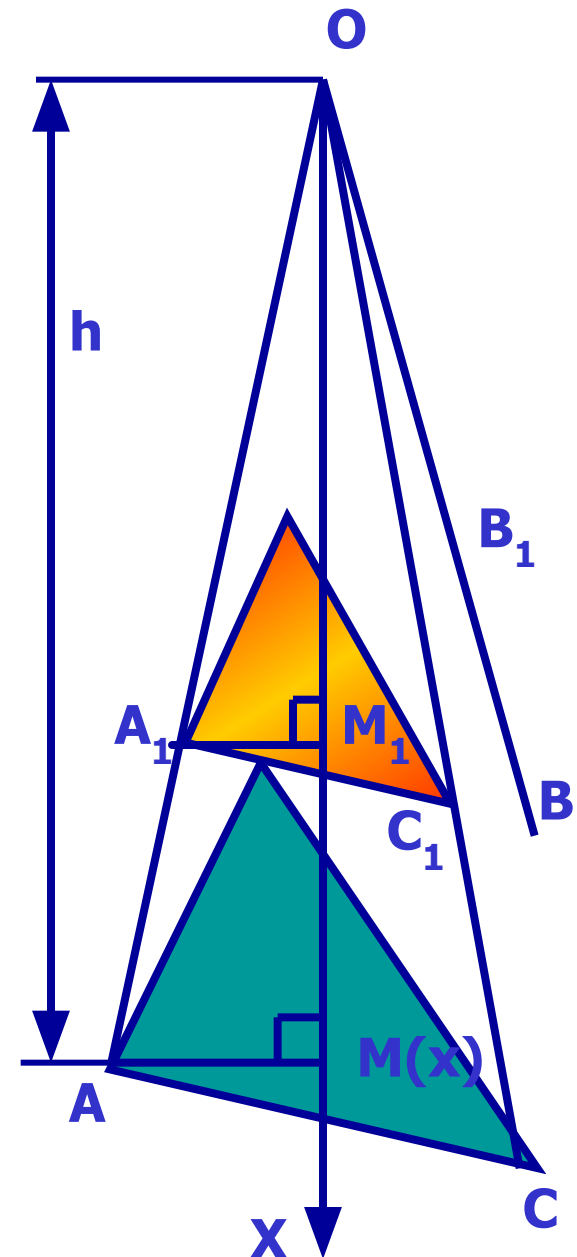
$AB:A_1B_1 = k \rightarrow OA:OA_1 = k$; аналогично

$BC:B_1C_1 = AC:A_1C_1 = k$; $S:S(x) = k^2$;

$\triangle AMO \sim \triangle M_1A_1O_1 \rightarrow OM:OM_1 = k$; $OM_1:OM = X:h$

$k = X:h$; $S:S(x) = (X:h)^2 = k^2$ $S(x) = (S * x^2):h^2$

$$V = \int_0^h \frac{Sx^2}{h^2} dx = \frac{S}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{S}{h^2} * \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} S * h$$

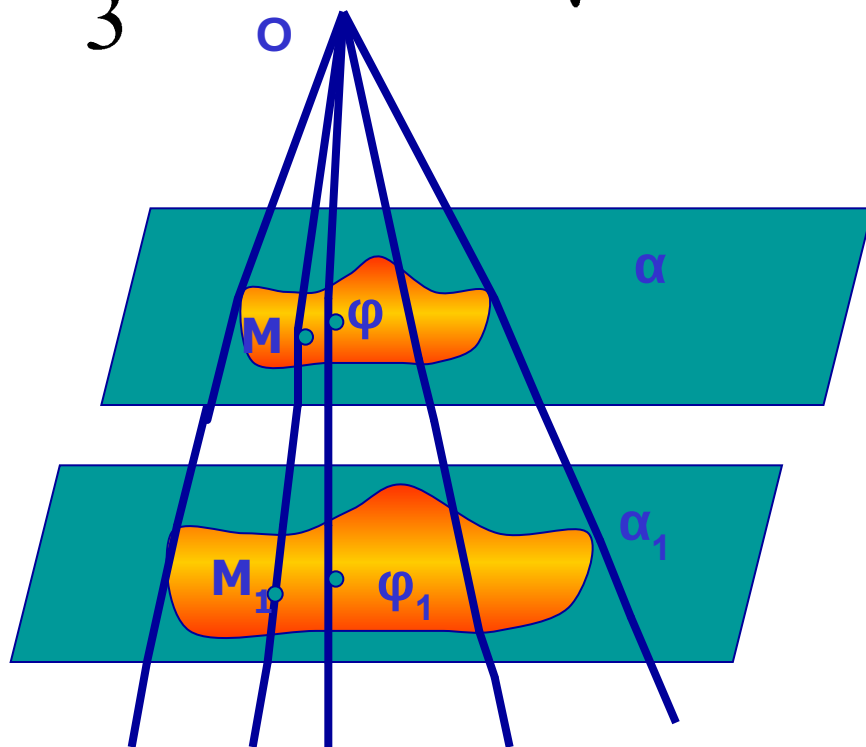
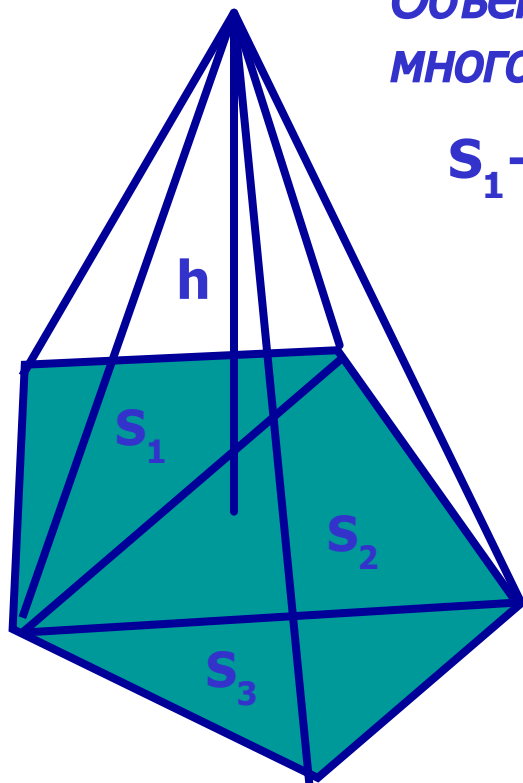


Объем пирамиды, имеющей в основании многоугольник.

$$S_1 + S_2 + S_3 \quad V = 1/3 * (S_1 + S_2 + S_3) * h$$

Следствие : Объем усеченной пирамиды, высота которой h , а площади оснований S и S_1 , вычисляется по формуле:

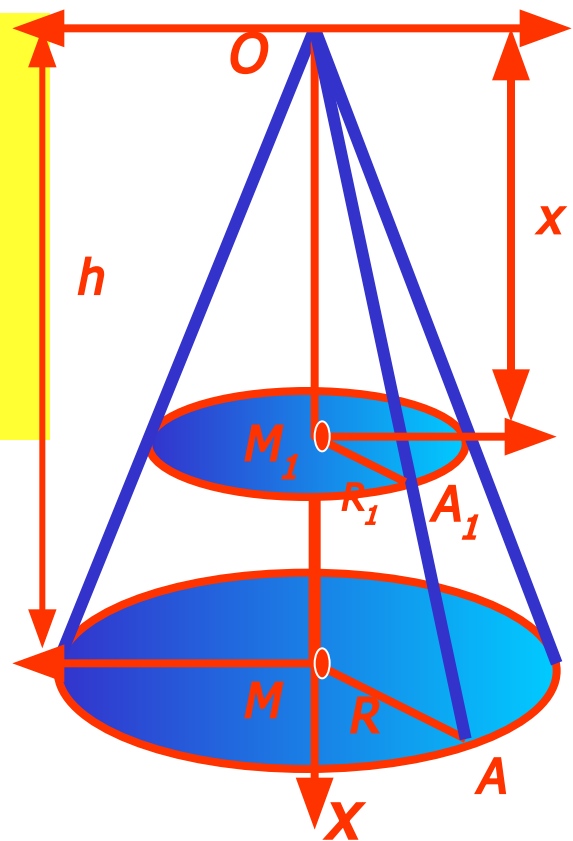
$$V = \frac{1}{3} h (S + S_1 + \sqrt{S * S_1})$$



Теорема

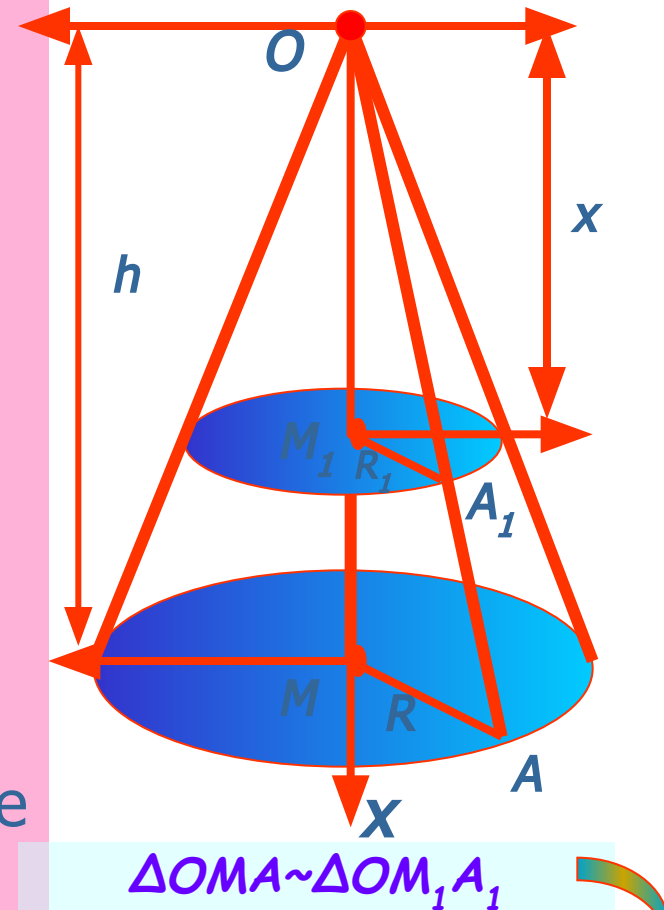
Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

$$V = \frac{1}{3} S * h$$



Доказательство

- Дано: конус с объемом V , радиусом основания R , высотой h и вершиной в точке O .
- Введем ось Ox (OM – ось конуса). Произвольное сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к оси Ox , является кругом с центром в точке M_1 – пересечения этой плоскости с осью Ox .
- Обозначим радиус этого круга через R_1 , а площадь сечения через $S(x)$, где x – абсцисса точки M_1 .



$$\frac{OM_1}{OM} = \frac{R_1}{R}, \text{ или } \frac{x}{h} = \frac{R_1}{R}, \text{ откуда } R_1 = \frac{xR}{h}$$

$$\text{Так как } S(x) = \pi R_1^2, \text{ то } S(x) = \frac{\pi R^2}{h^2} x^2$$

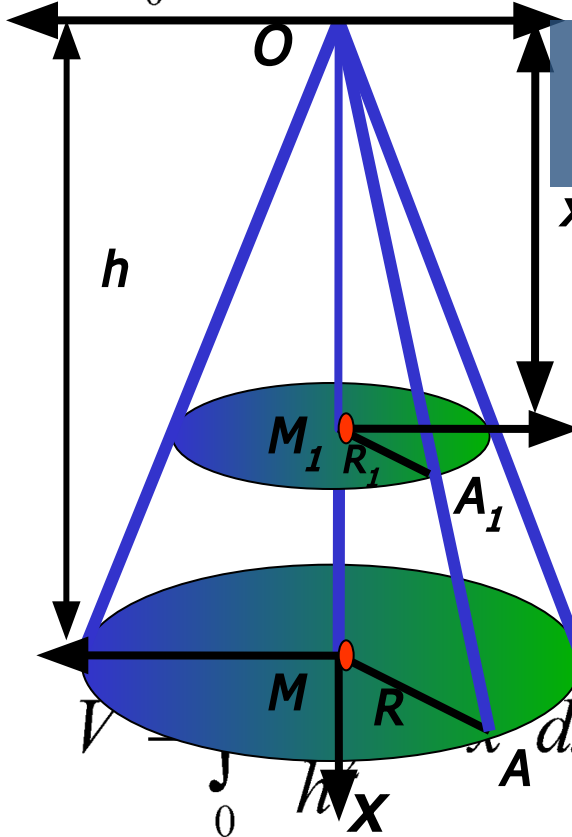
Применяя основную формулу для вычисления объемов тел при $a=0$, $b=h$, получаем

$$V = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2} * x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} * \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Площадь S основания конуса равна πR^2 , ПОЭТОМУ

$$V = \frac{1}{3} S * h \quad \text{Следствие}$$

Объем V усеченного конуса, высота которого равна h , а площади оснований равны S и S_1 , вычисляется по формуле



$$V = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2} x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} * \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Объем шара

Теорема : Объем шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$

Дано: шар, $R_{ш}$; O - центр шара; OX – ось шара; $\alpha \perp OX$; M - центр круга сечения; $OC=r$; $S_{сеч.} = S(x)$; x - абсцисса M

Найти : V

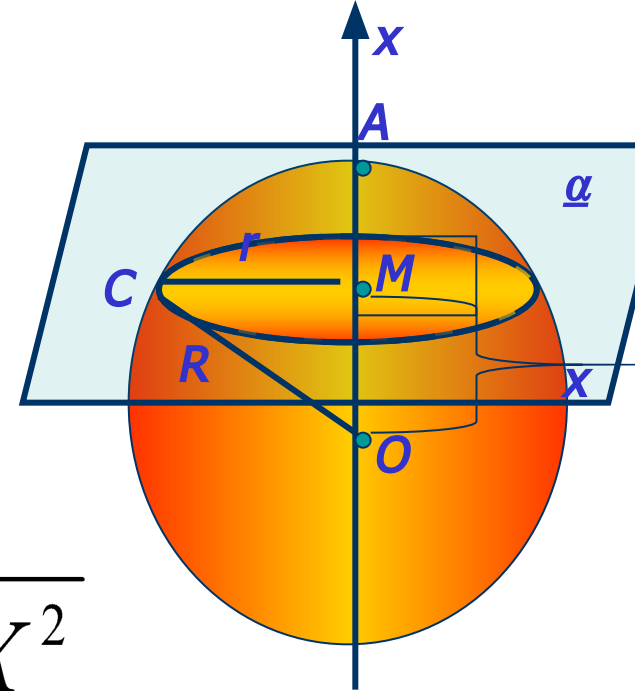
$$r = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - X^2}$$

$$S(x) = \pi r^2 \rightarrow S(x) = \pi(R^2 - x^2)$$

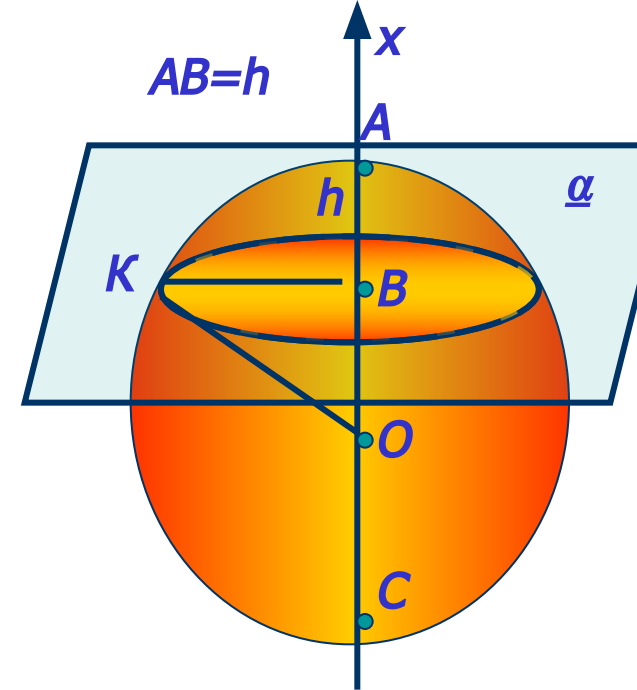
$$-R \leq x \leq R$$

Применяя основную формулу для вычисления объемов имеем : $a = -R$; $b = R$

$$V = \int_{-R}^R \pi(R^2 - x^2) dx = \pi R^2 \int_{-R}^R dx - \pi \int_{-R}^R x^2 dx = \pi R^2 x \Big|_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3$$



Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью. На чертеже два шаровых сегмента- верхний и нижний. Круг, полученный в сечении – основание сегмента, АВ- высота верхнего сегмента, ВС- высота нижнего сегмента



(оба отрезка – части диаметра АС. $OK=R_{ш.}$.)

$$V_{ш. с.} = \pi h^2 (R - 1/3h)$$

$$OX \perp \alpha \quad S(x) = \pi x^2, \text{ где } R-h \leq x \leq R$$

где $S(x)$ - площадь сечения

$S(x)$ - непрерывная функция на $[a; b]$

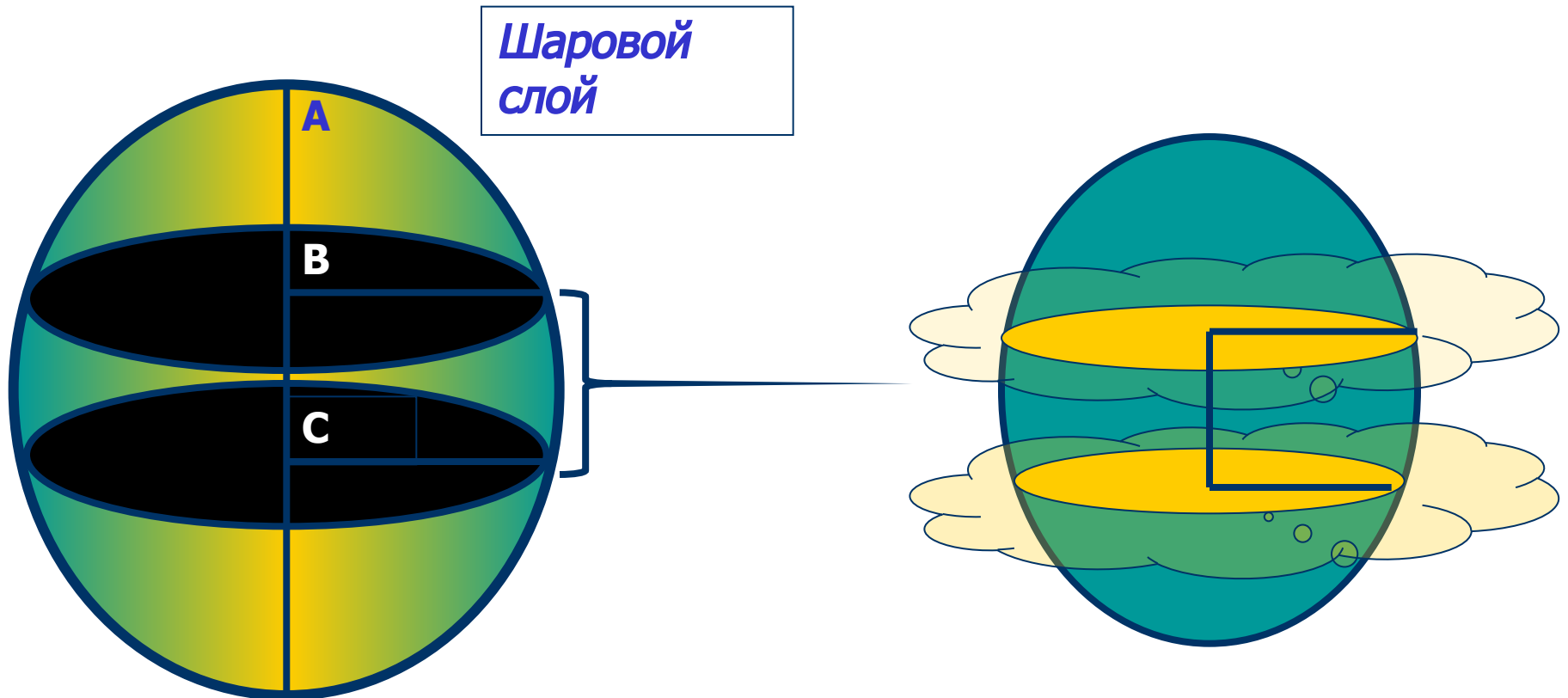
По определению правила вычисления объемов $a=R-h; b=R$

$$V = \pi \int_{R-h}^R (R^2 - x^2) dx = \pi (R^2 x - x^3/3) \Big|_{R-h}^R = \pi h^2 (R - 1/3h)$$

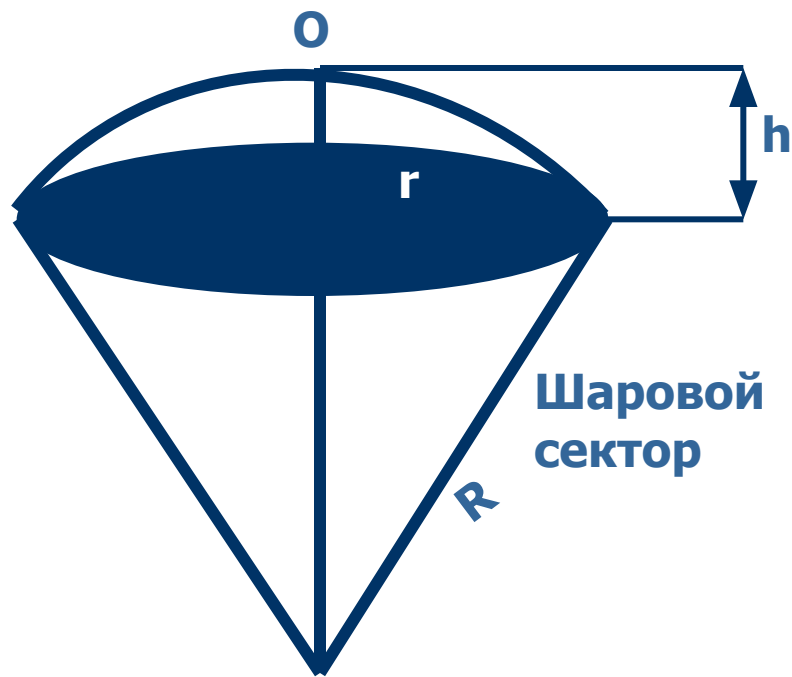
Шаровым слоем называется часть шара, заключенная между двумя секущими параллельными плоскостями.

Круги, полученные в сечениях- основания шарового слоя, расстояние между этими плоскостями- высота шарового слоя.

Объем шарового слоя – разность объемов двух шаровых сегментов с высотой АС и АВ.



Шаровым сектором называется тело, полученное вращением кругового сектора с углом меньше 90° , вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов. Шаровой сектор состоит из конуса и шарового сегмента с высотой h



$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$