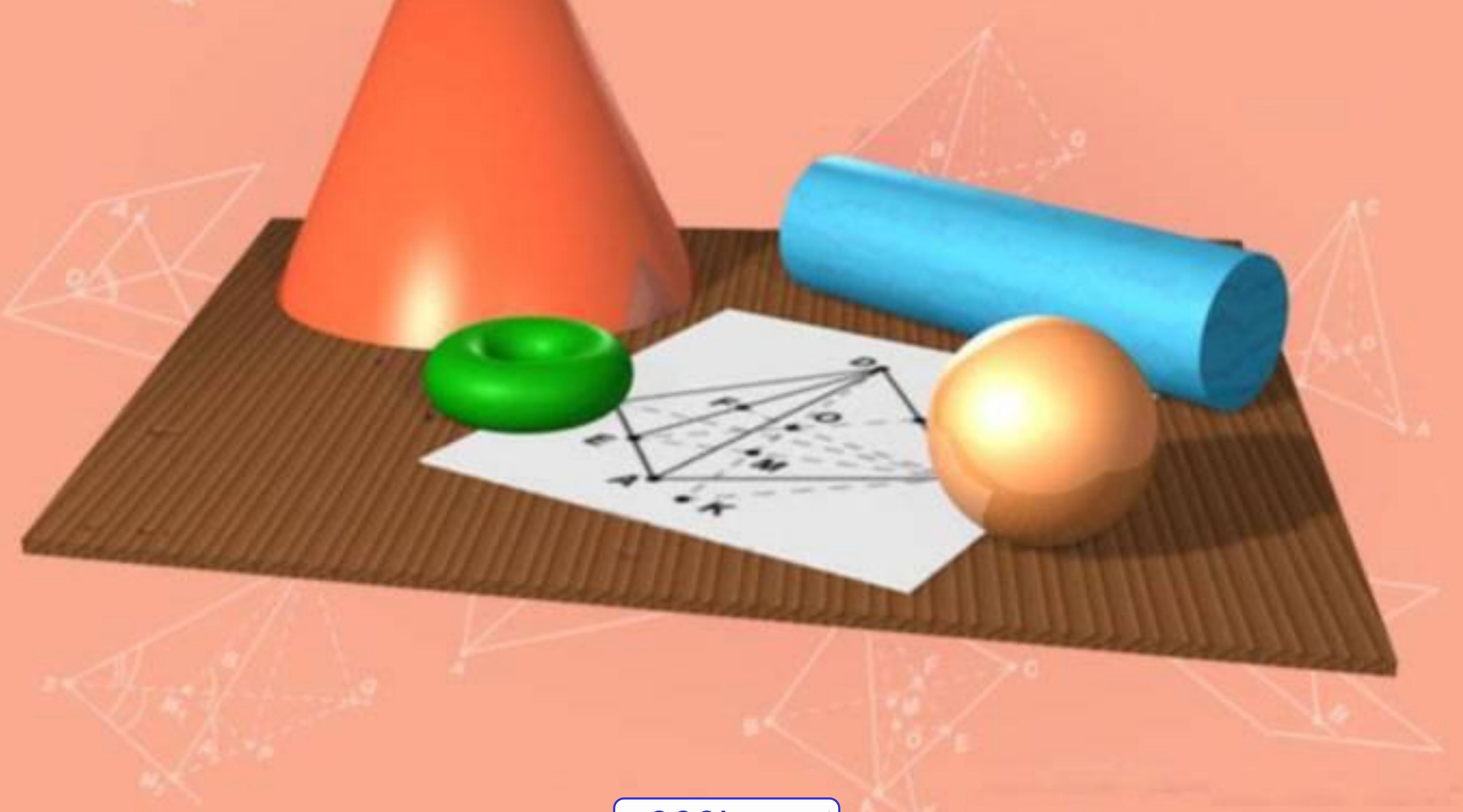
Объемы пространственных фигур



900igr.net

Вычисление объемов геометрических тел с помощью определенного интеграла.

Содержание урока :

1. Понятие объема
2. Объем прямой призмы
3. Объем цилиндра
4. Вычисление объемов тел с помощью определенного интеграла
5. Объем наклонной призмы
6. Объем пирамиды
7. Объем конуса
8. Объем шара
9. Объем шарового сегмента, шарового слоя, шарового сектора

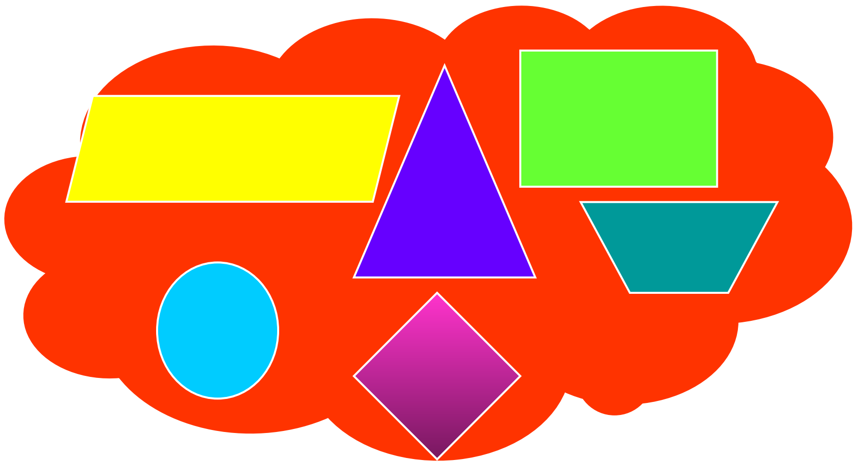
ЦЕЛИ УРОКА:

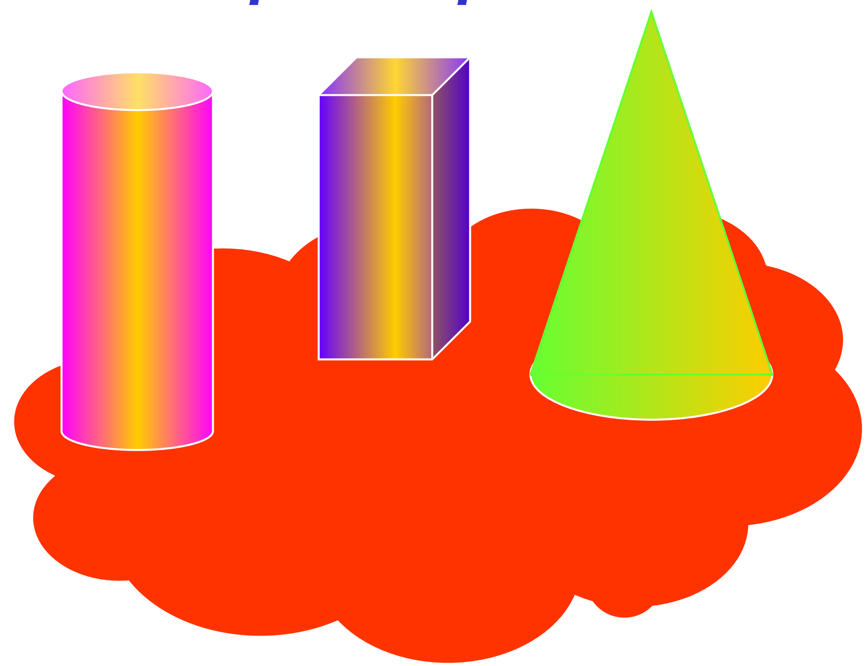
- ✔Усвоить понятие объёма пространственной фигуры;
- ✔Запомнить основные свойства объёма;
- ✔Узнать формулы объёмов пространственных фигур.
- ✔Раскрытие связи между двумя науками: алгеброй и геометрией. Вывод основной формулы для нахождения объёмов геометрических тел.

Что изучают

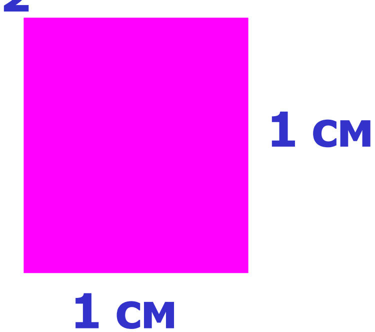
Геометрия

Стереометрия

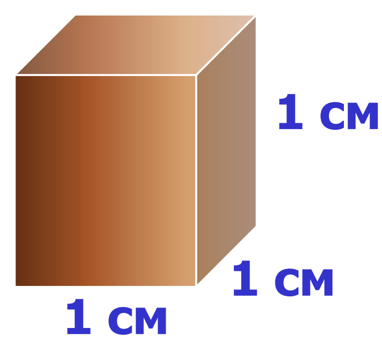




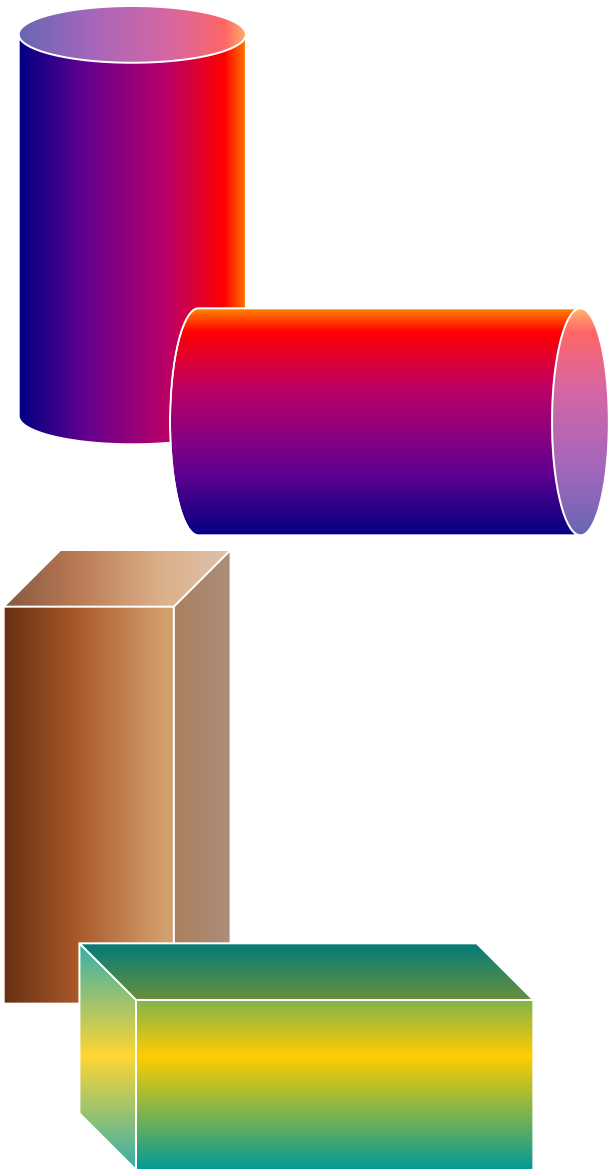
Единицы измерения площади плоской фигуры: $см^2$; $дм^2$; $м^2$



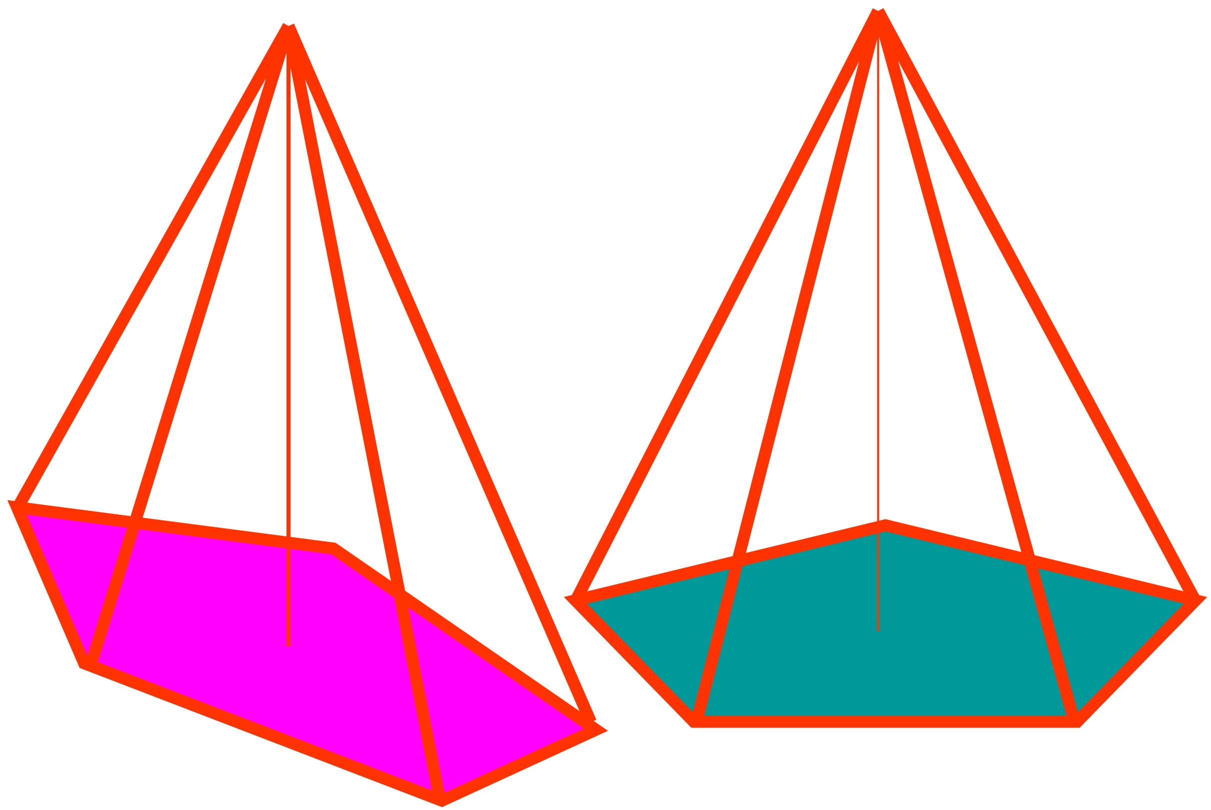
Единицы измерения объемов: $см^3$; $дм^3$; $м^3$...



Равные тела имеют равные объемы



Если тела А , В, С имеют равные размеры, то объемы этих тел – одинаковы.



Понятие объема.

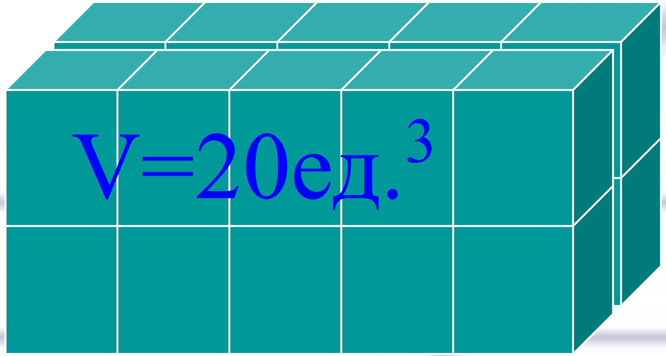
Понятие объема в пространстве вводится аналогично понятию площади для фигур на плоскости.

Определение 1. ***Объемом тела*** называется положительная величина, характеризующая часть пространства, занимаемую телом, и обладающая следующими свойствами:

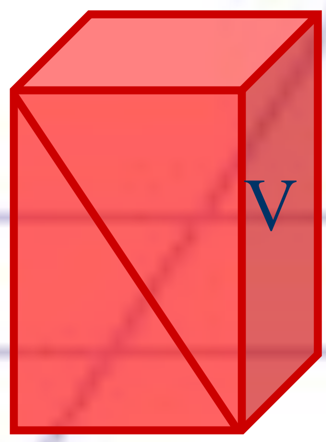
- равные тела имеют равные объемы; при параллельном переносе тела его объем не изменяется;
- если тело разбить на части, являющиеся простыми телами, то объем тела равен объему его частей;
- за единицу объема принят объем куба, ребро которого равно единице длины;

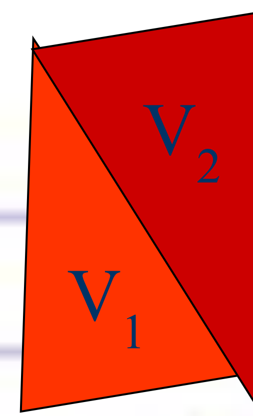
Определение 2. Тела с равными объемами называются ***равновеликими***. Из свойства 2 следует, что если тело с объемом V_1 содержится внутри тела с объемом V_2, то $V_1 < V_2$.

Чтобы найти объём многогранника, нужно разбить его на кубы с ребром, равным единице измерения.

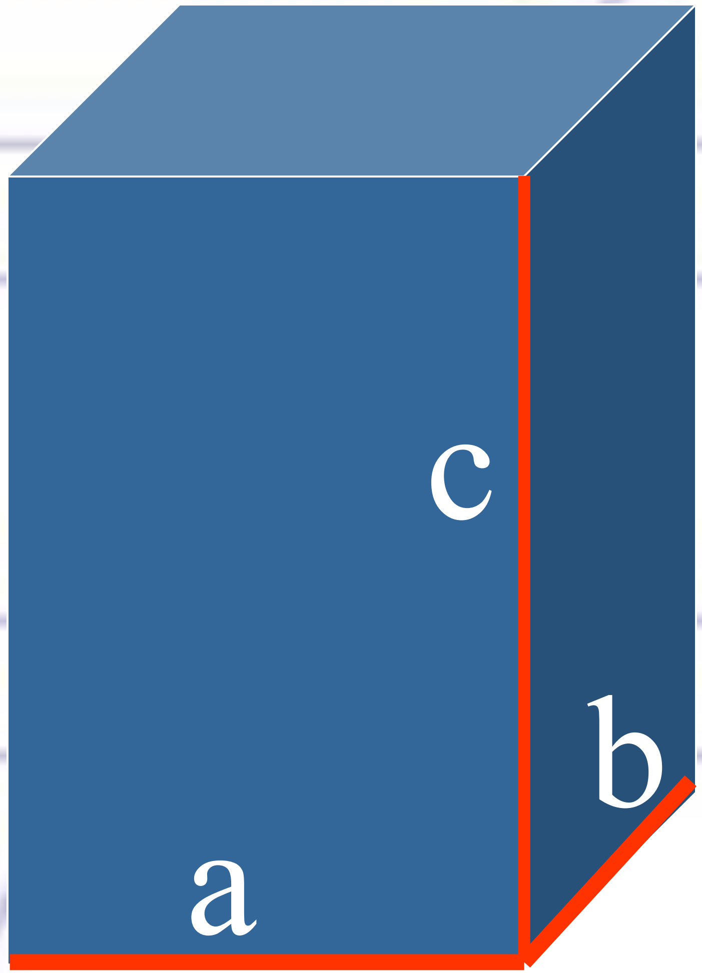


Если тело разбить на части, являющиеся простыми телами, то объем тела равен объему его частей.



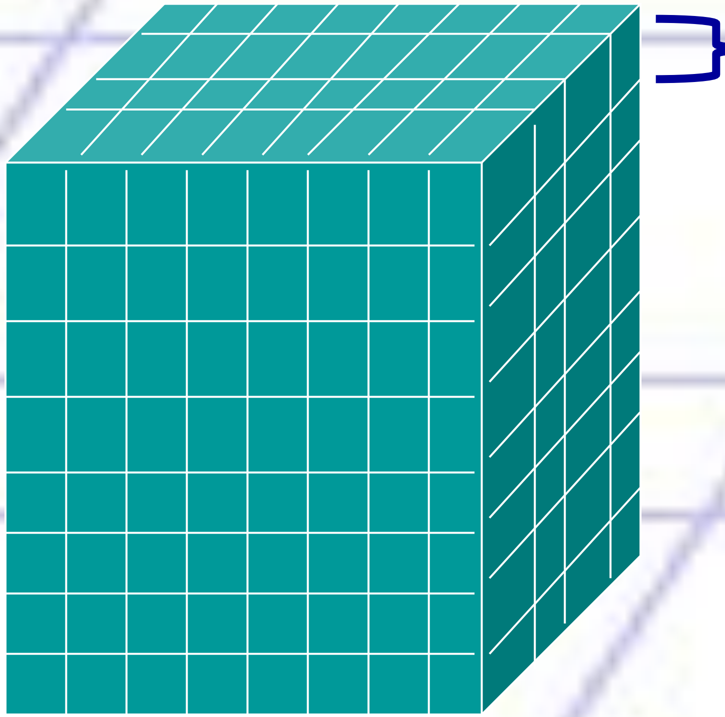


Напомним формулу объёма прямоугольного параллелепипеда.



$$V=abc$$

Объем прямоугольного параллелепипеда



V=a*b*c

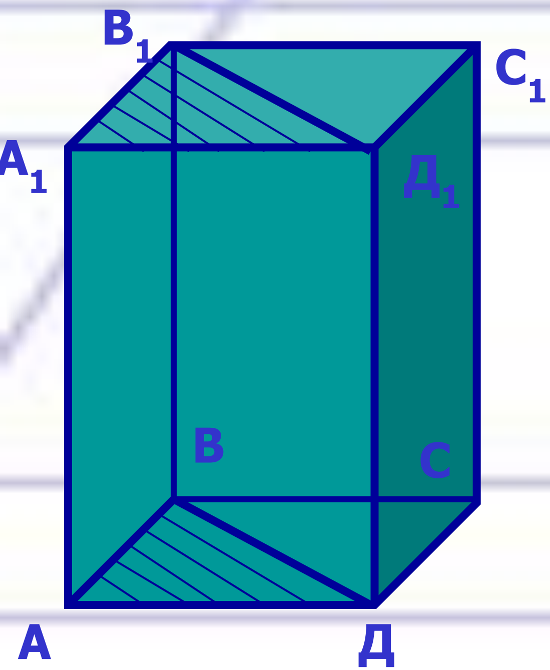
a, b, c-конечные десятичные дроби

Каждое ребро разбивается параллельными плоскостями, проведенными через точки деления ребер на равные части длиной $1/10^{n}$. объем каждого полученного кубика будет равен $1/10^{3n}$, т.к. длина ребер этого кубика $1/10^{n}$, то

a*10 n; в*10 n; c*10 n

Т.к. n→+∞, то Vn→V=авс

$V=a*b*c*10^{3n}* 1/10^{3n}=a*b*c$



Построим сечение прямоугольного параллелепипеда , проходящее через диагонали верхнего и нижнего оснований

<u>Следствие 1:</u>

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

$$V=S_{ос}*h, \text{ т.к. } S_{ос.}=a*b;h=c$$

<u>Следствие 2:</u>

Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник равен произведению площади основания на высоту.

Т.к. $\Delta ABD-1/2\ \square АВСД \rightarrow S_{ABD}=\frac{1}{2}S_{ABCD} \rightarrow V_{ABC}=\frac{1}{2}S_{АВСД}*h=$
$=S_{ABD}*h$

Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту

2. Призма с произвольным основанием:

Провели непересекающиеся диагонали оснований :АС, АД, $А_1С_1$, $А_1Д_1$; получили три треугольных призмы.

$Vпр=V_1+V_2+V_3=S_1*h+S_2*h+S_3*h =h(S_1+S_2+S_3)=h*Sос$

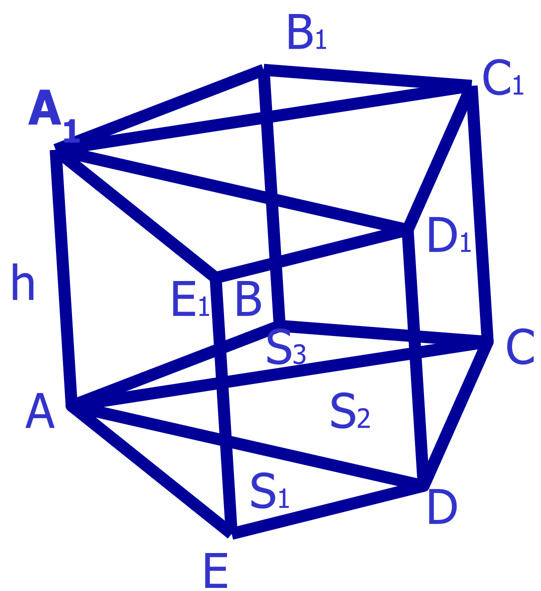
1. Призма -треугольная:

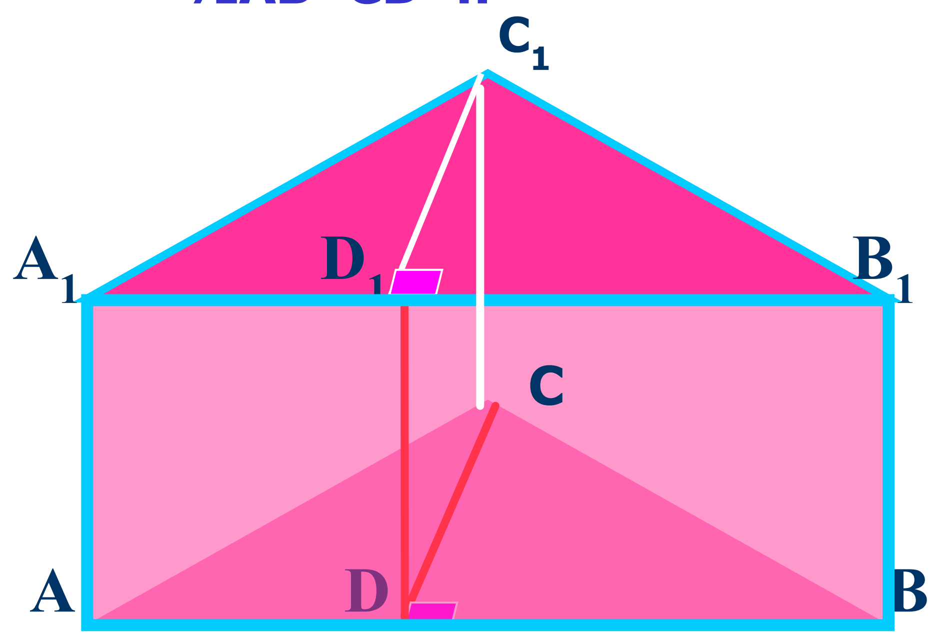
$С_1Д_1$, СД- высоты оснований

$Vпр=V_{ABD}+V_{BDC}$ (ΔАДС;ΔBCD-прямоуг-е)

$\rightarrow V_{ABC}=S_{ACD}*h+S_{BCD}*h=S_{ABC}*h=$

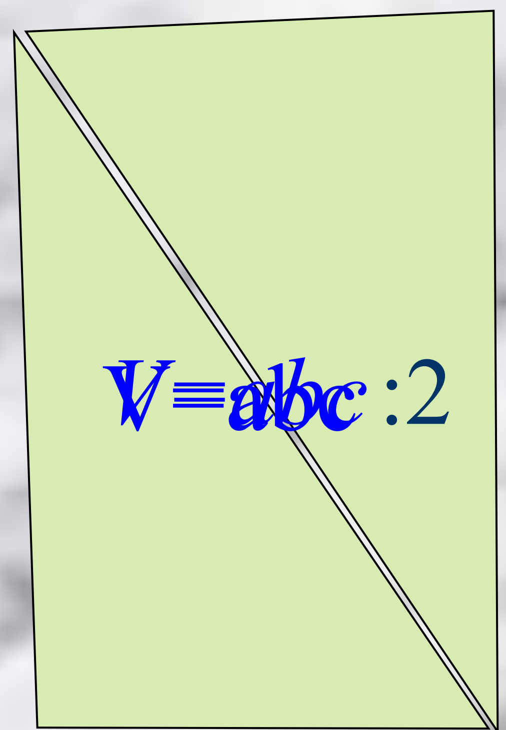
$=½AB*CD*h$





Ещё раз

:2



$V=abc:2$

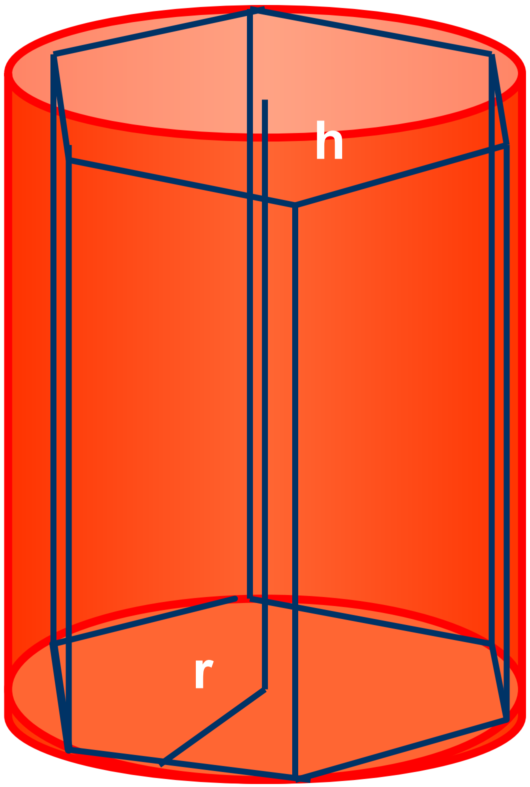
$V=Sc$

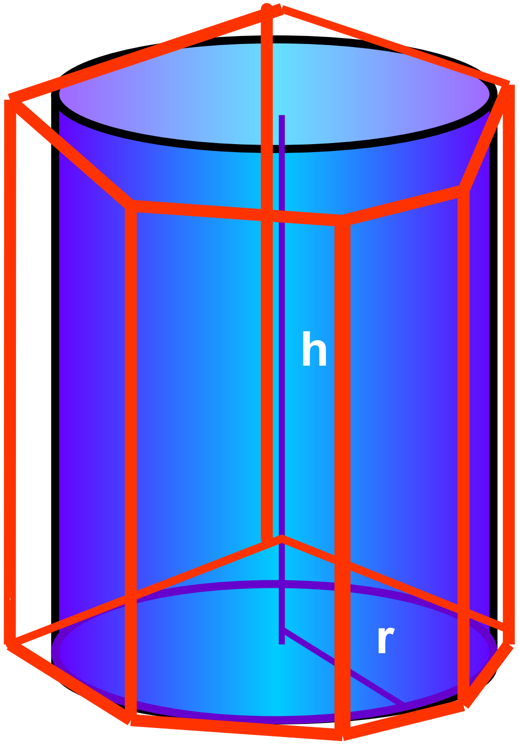
$V=Sh$

Объем цилиндра

Призмы, которые вписаны и описаны около цилиндра, и если их основание вписаны и описаны около цилиндра, то высоты этих призм равны высоте самого цилиндра.

Вписанная призма



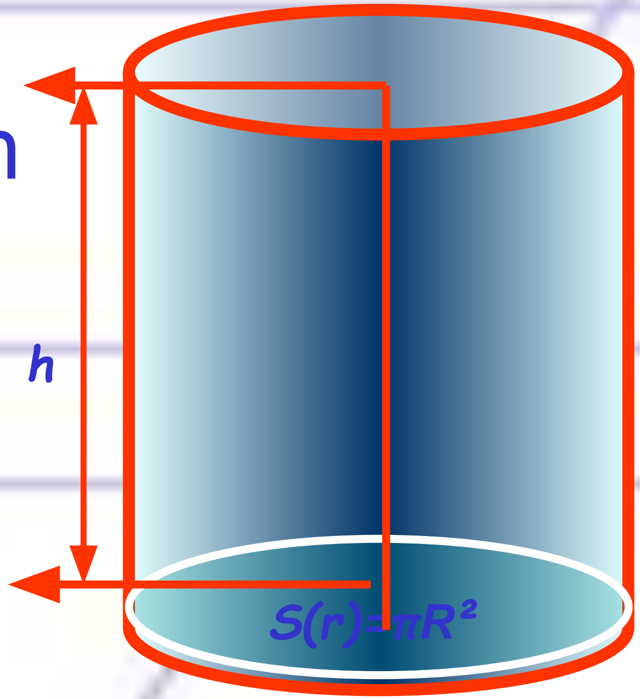


Описанная призма

Теорема:

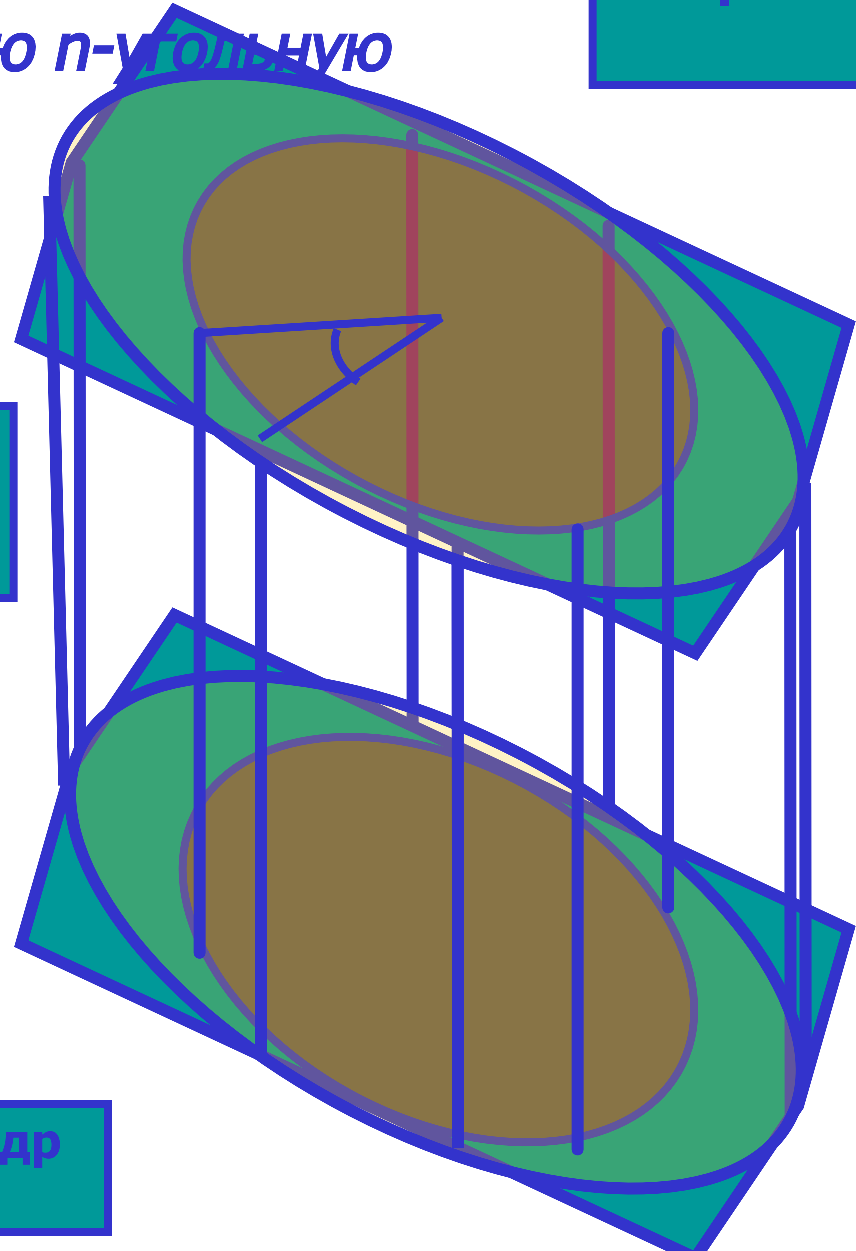
- Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.
- $V=S*h$

$V=h*S(r)=\pi R^2*h$



Доказательство:

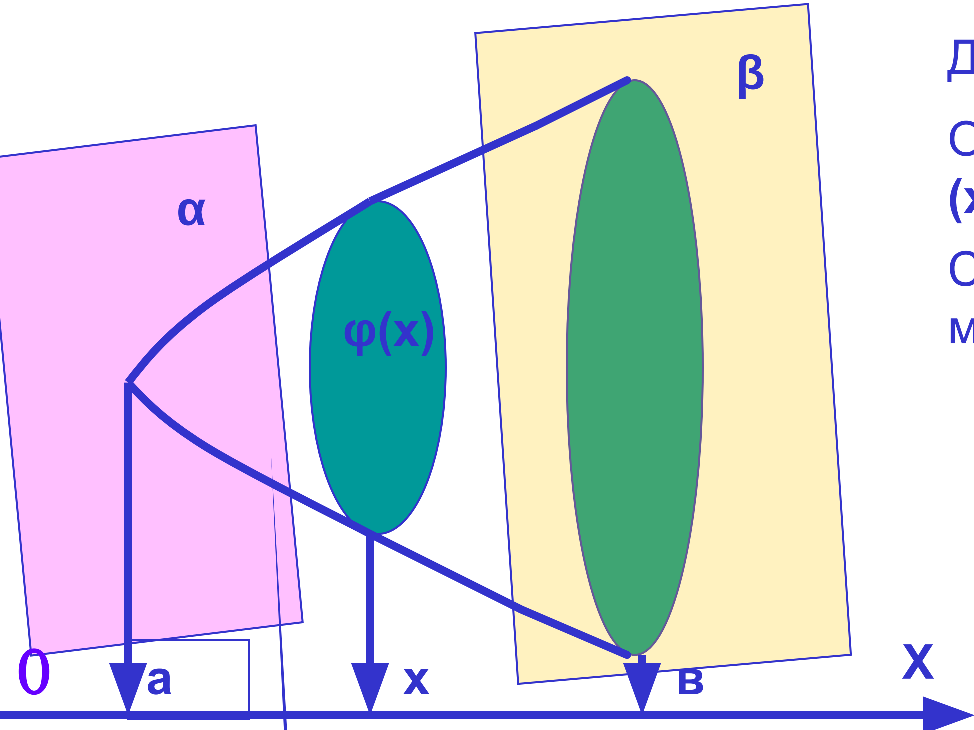
- **Впишем в цилиндр правильную n-угольную призму Fn,а в Fn впишем**
- **цилиндр Pn.**



Fn=Sn*h где Sn- площадь основания призмы
Цилиндр P содержит призм
которая в свою очередь, содержит цилиндр Pn.
Тогда Vn< Sn*h<V (1)
Будем увеличивать число n =>Rn=r cos 180/n*r при n → +∞
Поэтому: limVn=V
Из неравенства (1) следует, что LimSn*h=V
Но LimSn=Пr² таким образом V=Пr²h
Пr ²=S => V=Sh

Цели :

- *Научиться применять интегрирование функций в качестве одного из способов решения задач на нахождение объёмов геометрических тел.*
- *Развитие логического мышления, пространственного воображения, умений действовать по алгоритму, составлять алгоритмы действий.*
- *Воспитание познавательной активности, самостоятельности.*



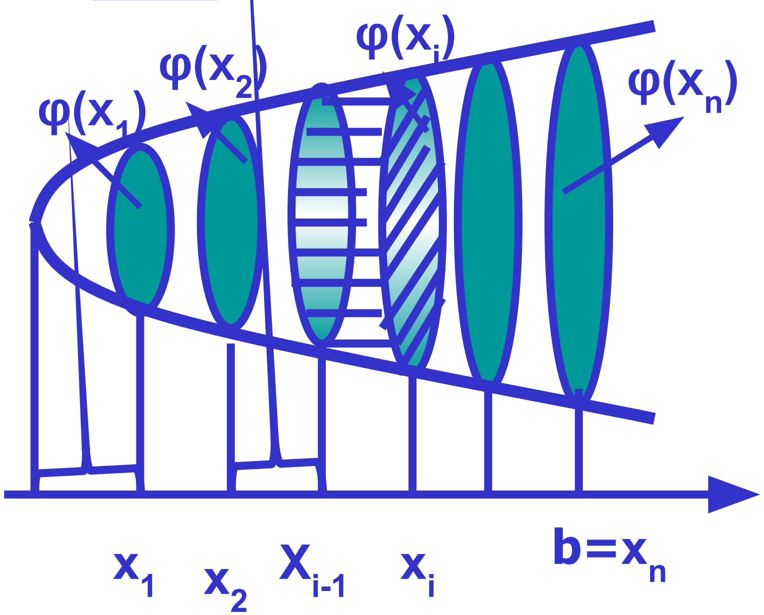
Дано :тело Т, $\alpha \parallel \beta$, ОХ-ось, $OX \perp \alpha$, $OX \perp \beta$

$OX \cap \alpha = a$, $OX \cap \beta = b$, $a < b$, **φ(x)-сечение, $\varphi(x) \perp OX$, $\varphi(x) \cap OX = x$**

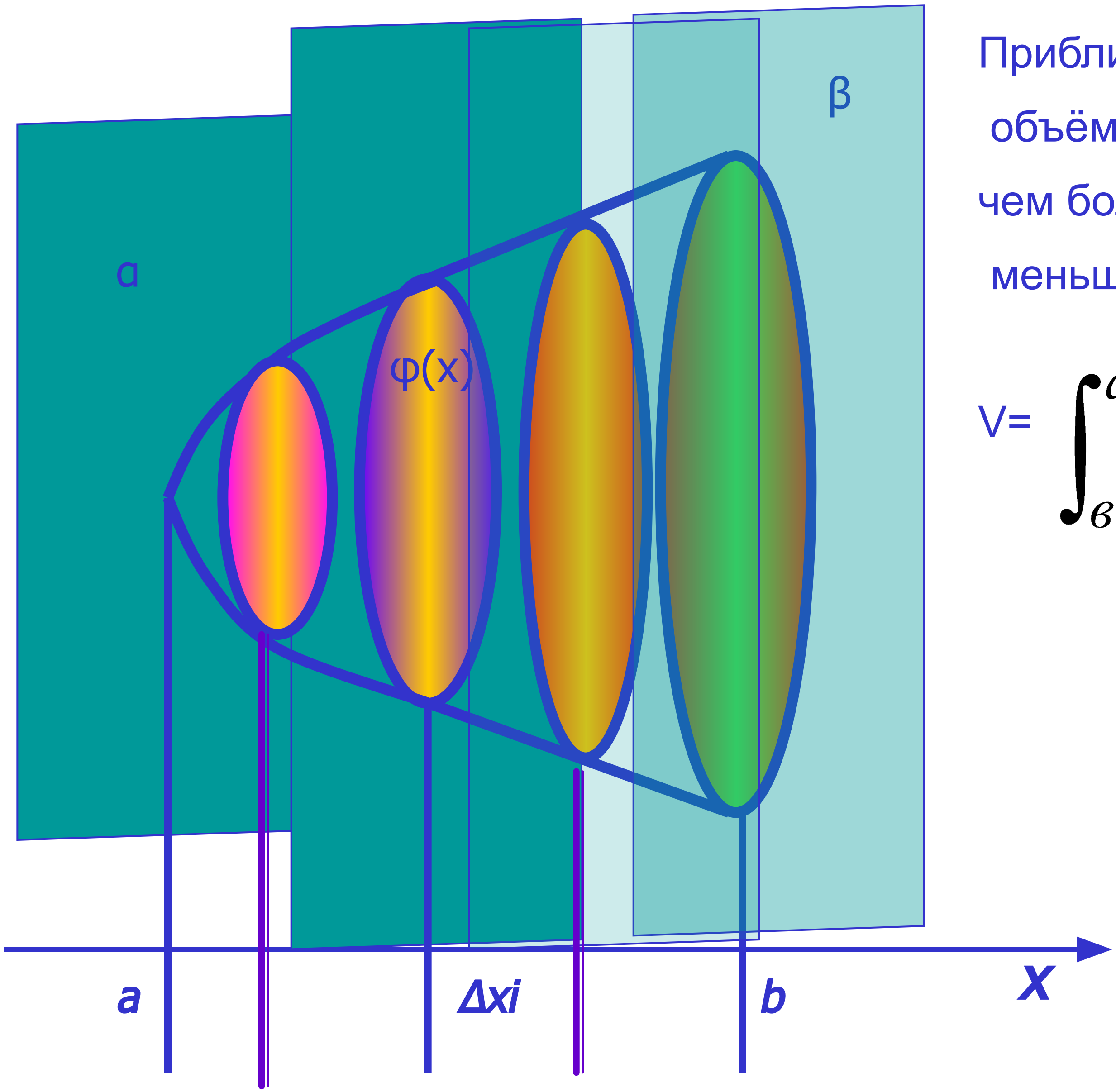
Сечение имеет форму круга либо многоугольника для любого $x \in [a;b]$

(при x = a и x = b сечение может вырождаться в точку, как, например, при x = a на рисунке). Обозначим площадь фигуры Ф(x) через S(x) и предположим, что S(x) – непрерывная функция на числовом отрезке [a;b].

Разобьем числовой отрезок [a;b] на n равных отрезков **$X_2 - x_1 = (в - а):n$**



Если сечение Ф(xi) – круг, то объём тела Ti (заштрихованного на рисунке) приближённо равен объему цилиндра с основанием Фi и высотой Если Ф(xi) – многоугольник, то объём тела Ti приближённо равен объёму прямой призмы с основанием Ф(xi) и высотой Δxi.



Приближённое значение Vn

объёма тела Т тем точнее,

чем больше n и, следовательно,

меньше Δxi

$$V = \int_{в}^{a} S(x)dx = ?$$

Объем наклонной призмы

Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту

1. *Треугольная призма*

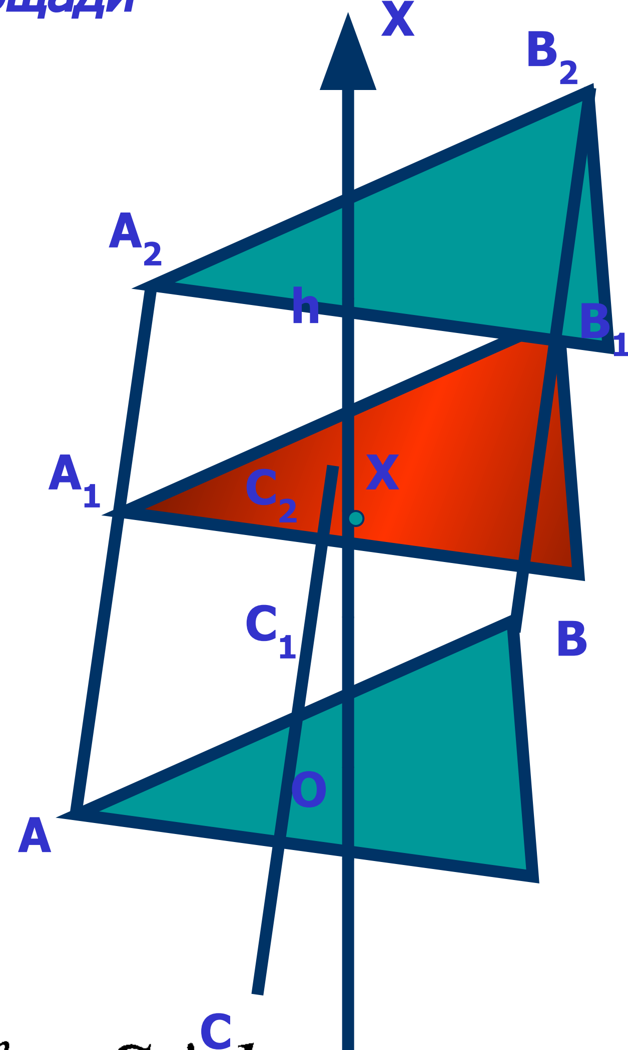
Т.п. имеет S основания и высоту h.

$O = OX \cap (ABC)$; $OX \perp (ABC)$; $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$;

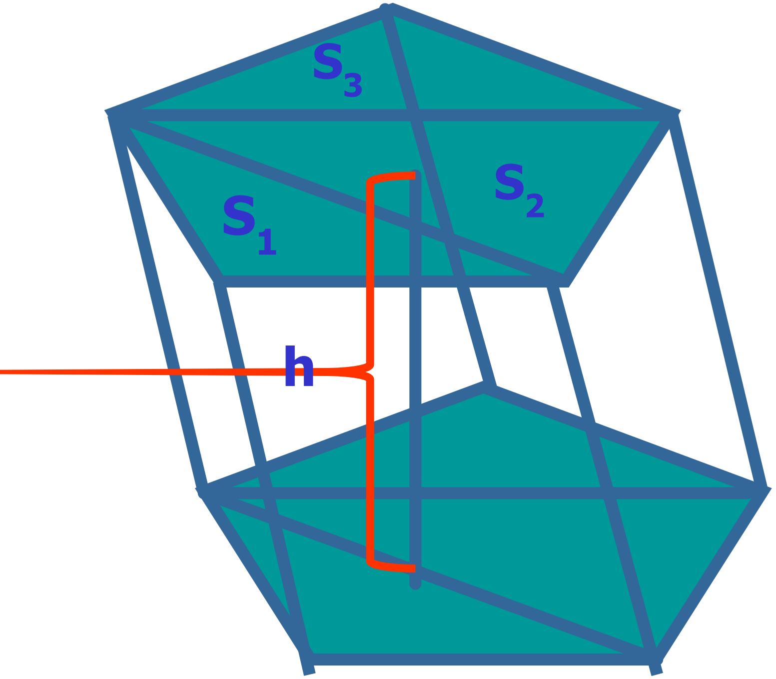
$(A_1B_1C_1)$-плоскость сечения: $(A_1B_1C_1) \perp OX$

S(x)-площадь сечения; S=S(x), т.к.

$(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$ и $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (AA_1C_1C-параллелограмм $\rightarrow$ AC=A1C1, $BC = B_1C_1$, $AB = A_1B_1$)



$$v = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h Sdx = S\int_0^h dx = Sx\Big|_0^h = S * h$$



2. Наклонная призма с многоугольником в основании

$$V=V_1+V_2+V_3=$$
$$=S_1*h+S_2*h+S_3*h=$$
$$=h(S_1+S_2+S_3)=S*h$$

Объем наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь перпендикулярного ребру сечения

Объем пирамиды

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту

1. ***Дана треугольная пирамида***

$OX \perp (ABC)$, $OX \cap (ABC) = M$; $OX \cap (A_1B_1C_1) = M1$
X- абсцисса точки M; S(x)-площадь сечения; S-площадь основания

$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ так, как $AB \parallel A_1B_1$; $AC \parallel A_1C_1$; $BC \parallel B_1C_1$

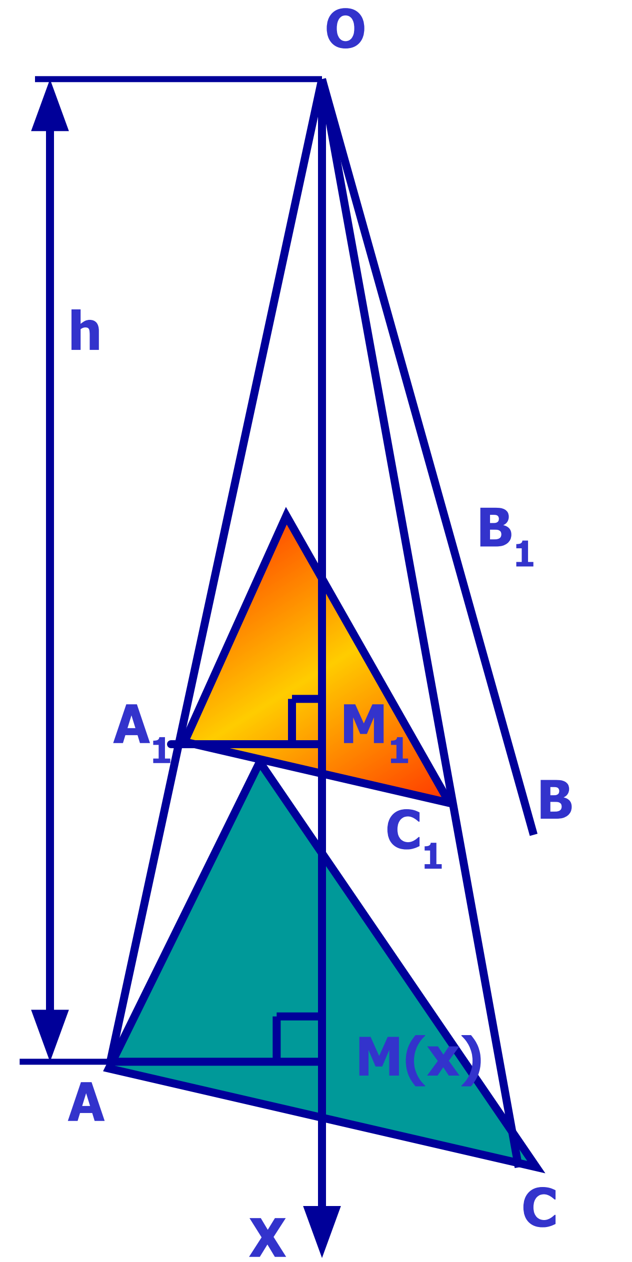
$AB:A_1B_1 = k \rightarrow OA:OA_1 = k$; аналогично

$BC:B_1C_1 = AC:A_1C_1 = k$; $S:S(x) = k^2$;

$\Delta AMO \backsim \Delta M_1A_1O_1 \rightarrow OM:OM_1 = k$; $OM_1:OM = X:h$

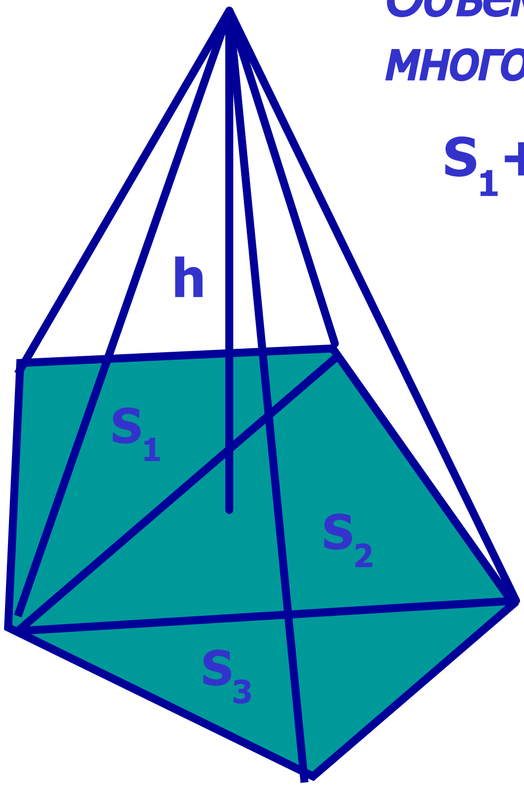
$k = X:h$; $S:S(x) = (X:h)^2 = k^2$ $S(x) = (S * x^2):h^2$

$$V = \int_0^h \frac{Sx^2}{h^2}dx = \frac{S}{x^2}\int_0^h x^2 dx = \frac{S}{h^2} * \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}S * h$$



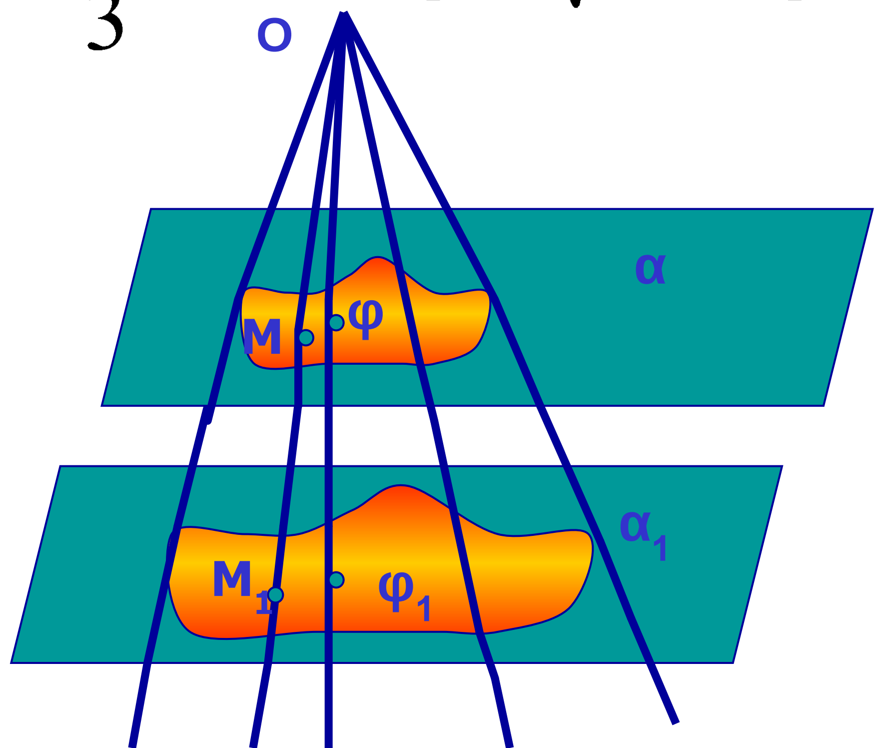
Объем пирамиды, имеющей в основании многоугольник.

$S_1 + S_2 + S_3$ V=1/3*(**S1+ S2+ S3)*h**



Следствие : Объем усеченной пирамиды, высота которой h, а площади оснований SuS_1, вычисляется по формуле:

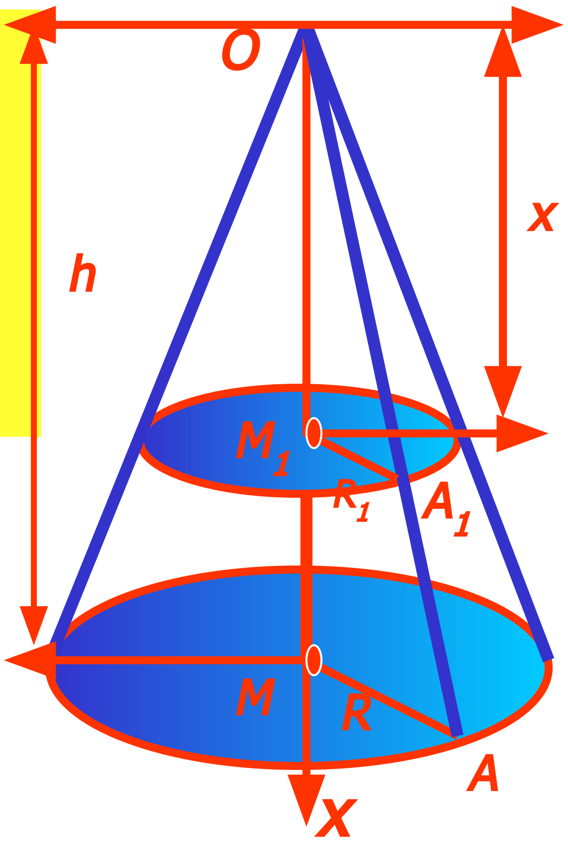
$$V = \frac{1}{3} h(S + S_1 + \sqrt{S * S_1})$$



Теорема

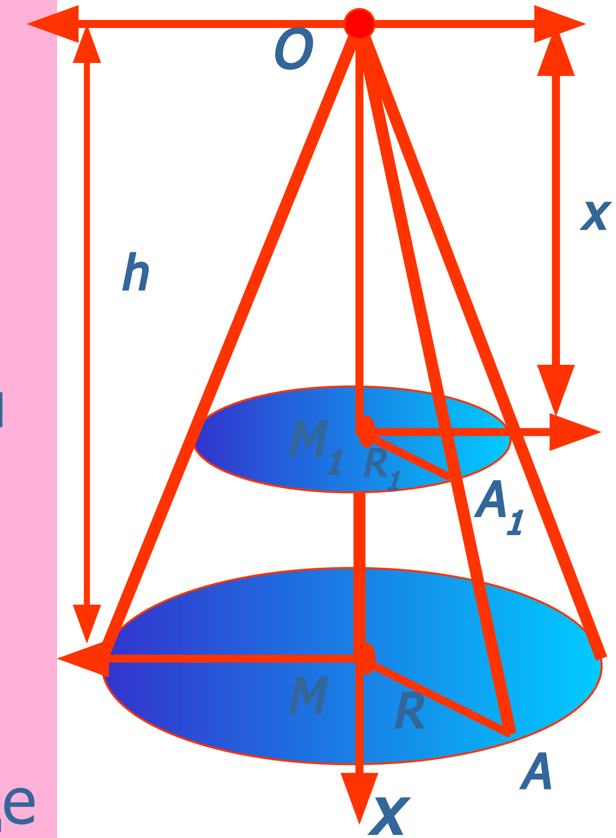
Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

$$V = \frac{1}{3} S * h$$



Доказательство

- Дано: конус с объемом V, радиусом основания R, высотой h и вершиной в точке O.
- Введем ось OX (OM – ось конуса). Произвольное сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к оси OX, является кругом с центром в точке M1 - пересечения этой плоскости с осью OX.
- Обозначим радиус этого круга через R1, а площадь сечения через S(x), где x – абсцисса точки M1.



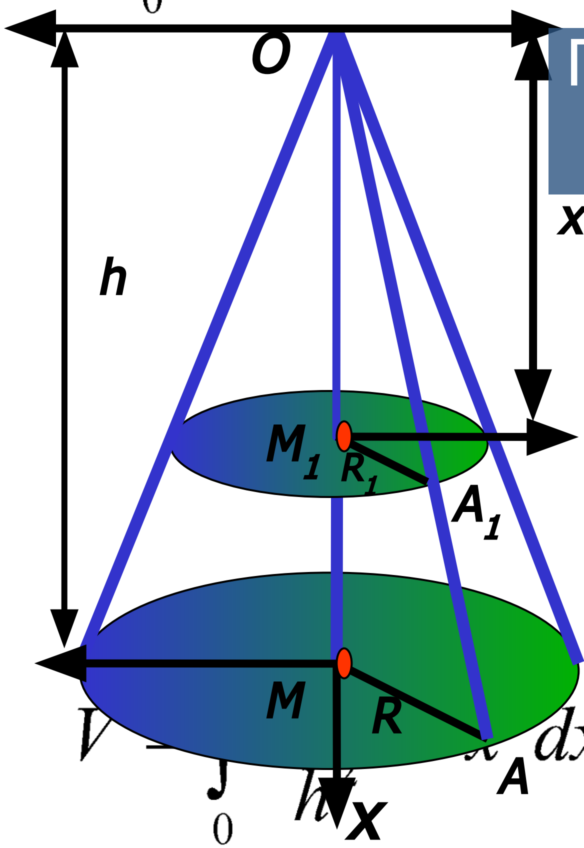
$\Delta OMA \sim \Delta OM_1A_1$

$$\frac{OM_1}{OM} = \frac{R_1}{R}, или\ \frac{x}{h} = \frac{R_1}{R}, откуда\ R_1 = \frac{xR}{h}$$

$$Так\ как\ S(x) = ПR_1^2, то\ S(x) = \frac{ПR^2}{h^2}x^2$$

Применяя основную формулу для вычисления объемов тел при a=0, b=h, получаем

$$V=\int_0^h \frac{\Pi R^2}{h^2}*x^2dx=\frac{\Pi R^2}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{\Pi R^2}{h^2}*\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\Pi R^2 h$$



Площадь S основания конуса равна ПR ², поэтому

$$V=\frac{1}{3}S*h$$

Следствие

Объем V усеченного конуса, высота которого равна h, а площади оснований равны S и S1, вычисляется по формуле

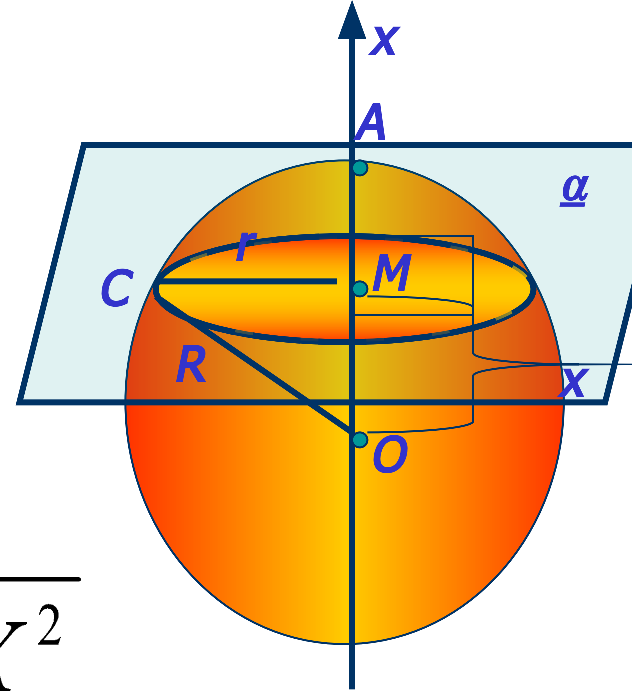
$$V=\frac{1}{3}h(S+S_1+\sqrt{S*S_1})$$

$$V=\int_0^h \frac{\Pi R^2}{h^2}*x^2dx=\frac{\Pi R^2}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{\Pi R^2}{h^2}*\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\Pi R^2 h$$

Объем шара

Теорема : ***Объем шара радиуса R равен 4/3πR³***

Дано: шар, $R_ш$, O- центр шара; OX – ось шара; $\alpha \perp OX$;M- центр круга сечения; OC=r; $S_{сеч.}$ = S (x); x- абсцисса M



Найти : V

$$r = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - X^2}$$

S (x)=πr² → ***S (x)=π(R²-x²)***

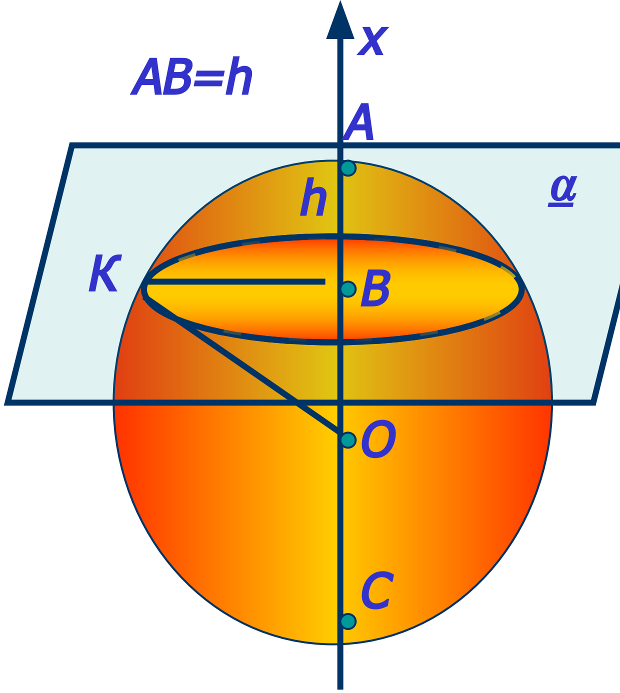
-R≤ x ≤R

Применяя основную формулу для вычисления объемов имеем :a =-R; b=R

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi R^2 \int_{-R}^{R} dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 dx = \pi R^2 x \,|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

<u>*Шаровым сегментом*</u> **называется часть шара , отсекаемая от него плоскостью. На чертеже два шаровых сегмента- верхний и нижний. Круг , полученный в сечении – основание сегмента, АВ- высота верхнего сегмента, ВС- высота нижнего сегмента**

(оба отрезка –части диаметра АС. ОК=$R_{ш}$.)



$V_{ш.с.} = \pi h^2(R - 1/3h)$

$OX \perp \alpha$

$S(x) = \pi x^2$, где $R-h \le x \le R$

где $S(x)$- площадь сечения

$S(x)$- непрерывная функция на $[a; b]$

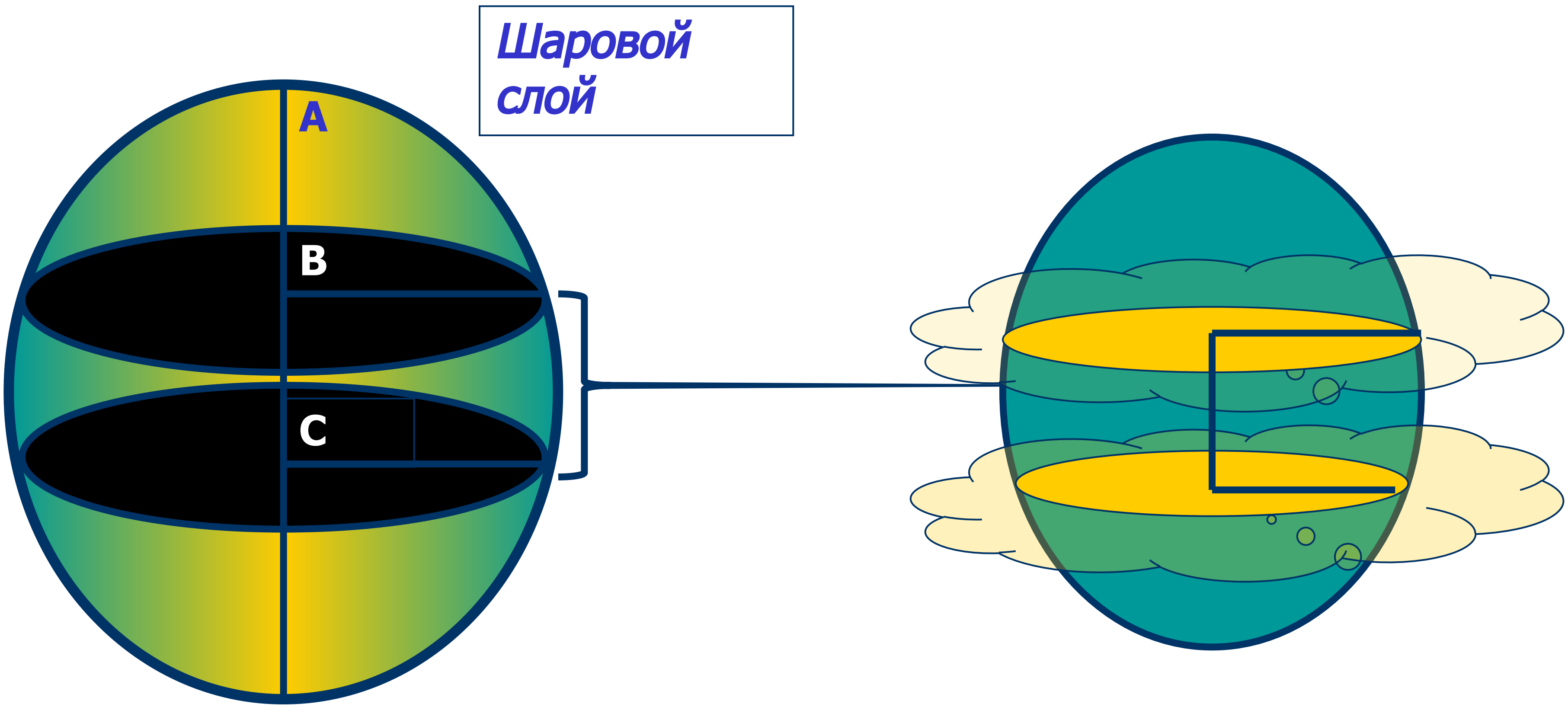
По определению правила вычислению объемов $a=R-h$; $b=R$

$$V = \pi \int_{R-h}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi (R^2x - x^3/3)\Big|_{R-h}^{R} = \pi h^2(R - 1/3h)$$

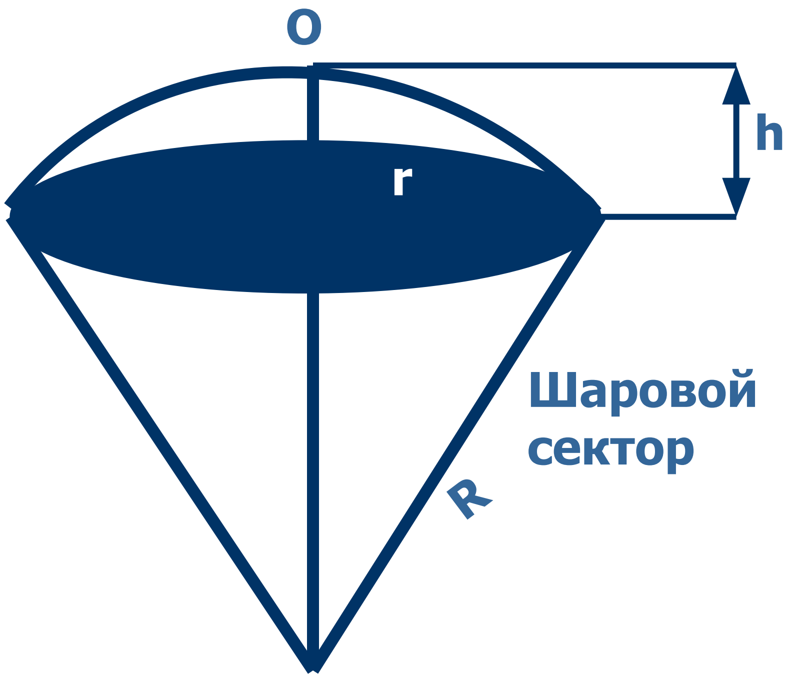
Шаровым слоем называется часть шара, заключенная между двумя секущими параллельными плоскостями.

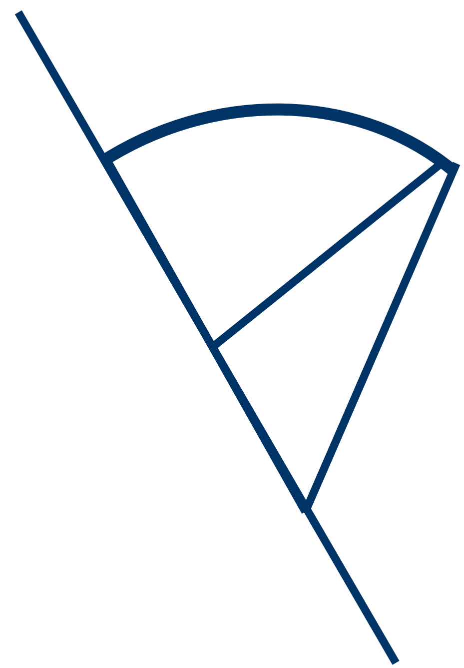
Круги , полученные в сечениях- основания *шарового слоя*, расстояние между этими плоскостями- *высота* шарового слоя.

Объем шарового слоя – разность объемов двух шаровых сегментов с высотой АС и АВ.



<u>Шаровым сектором</u> **называется тело, полученное вращением кругового сектора с углом меньше *90°*, вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов.** *<u>Шаровой сектор</u>* **состоит из конуса и шарового сегмента с высотой *h***





$V=2/3\pi R^2h$