

Вписанная и описанная окружности

8 класс



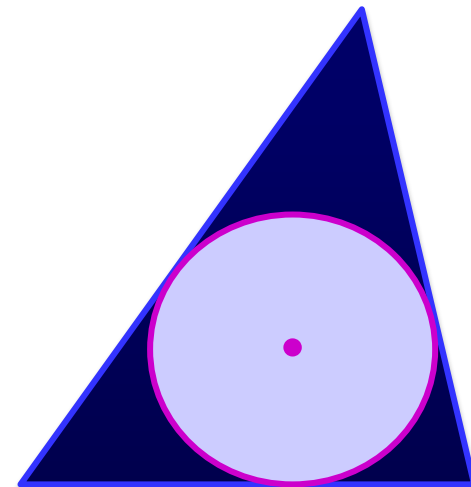
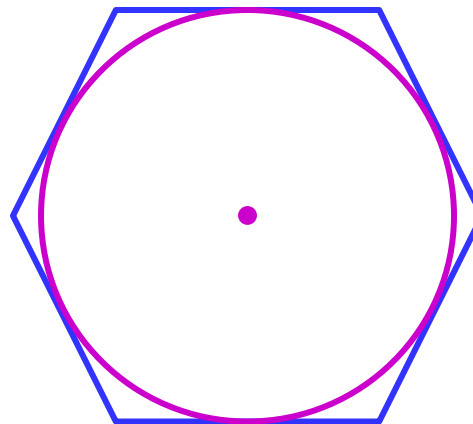
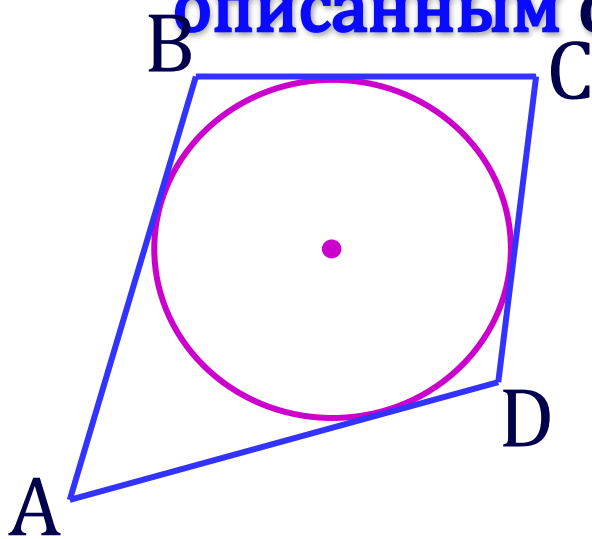
Мухина Г.Г. – учитель математики МАОУ многопрофильного лицея
№20 города Ульяновска.

Вписанная окружность

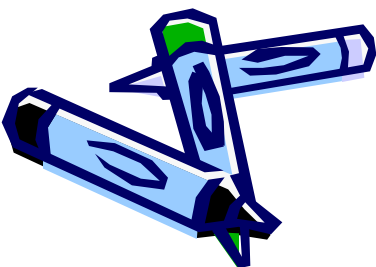
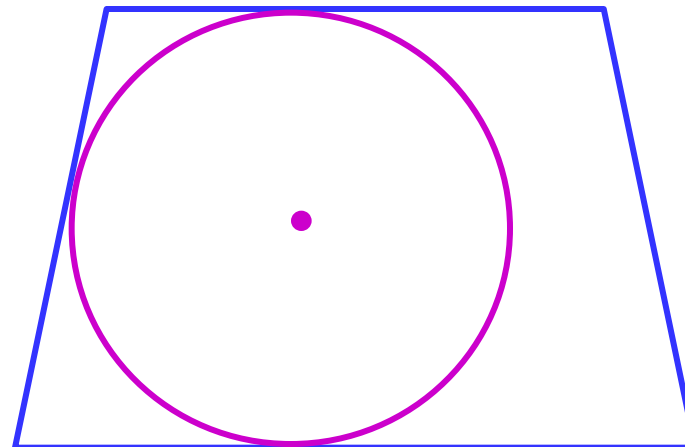
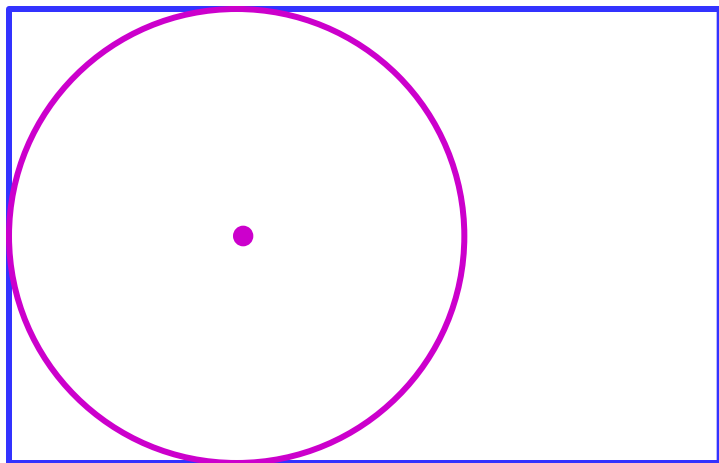
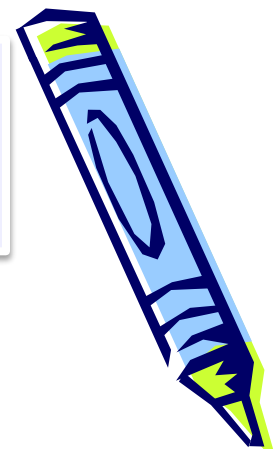
Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется **вписанной** в многоугольник, а многоугольник

– **описанным** около этой окружности.

окр. $(O;r)$ вписана в ABCD

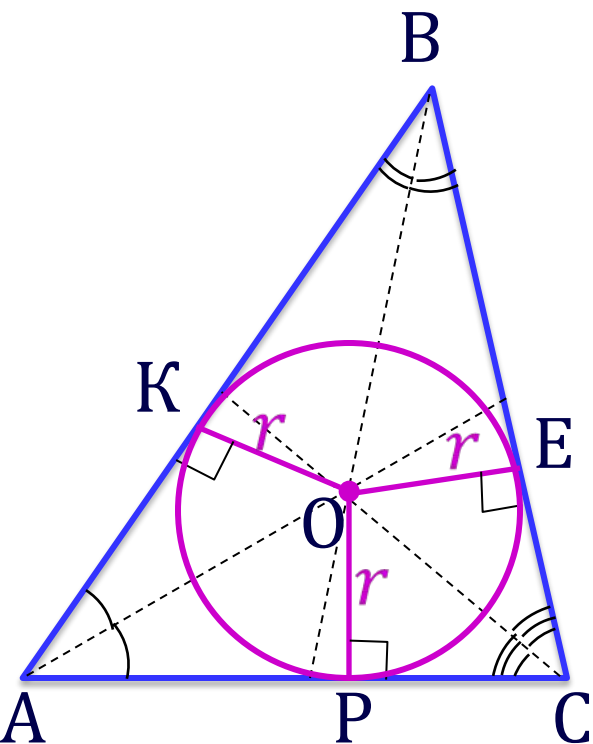


Не во всякий многоугольник можно
вписать окружность.



ТЕОРЕМА

В любой треугольник можно **вписать** окружность и притом только одну.



Дано: $\triangle ABC$

Доказать: существует окр. $(O;r)$,
вписанная в треугольник

Доказательство:

Проведём биссектрисы, которые пересекаются в одной точке – O .

$OK = OE = OP$, где $OK \perp AB$, $OE \perp BC$, $OP \perp AC$,
по свойству биссектрис.

O равноудалена от сторон $\triangle ABC$.

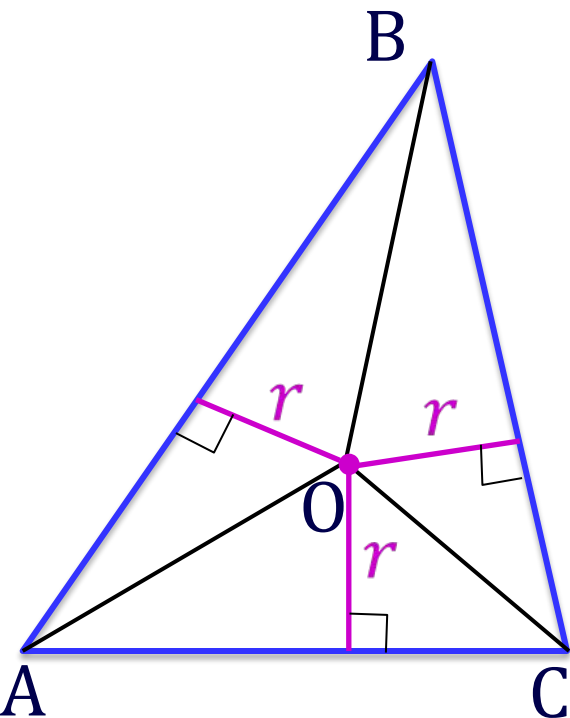
O – центр окружности, OK , OE , OP радиусы.

Значит, окружность вписана в $\triangle ABC$.

Центр вписанной окружности - точка пересечения биссектрис.

Площадь треугольника

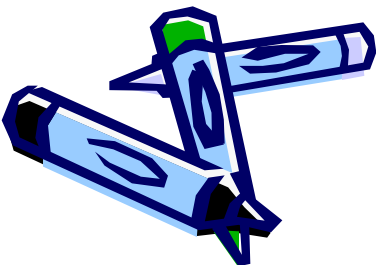
Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.



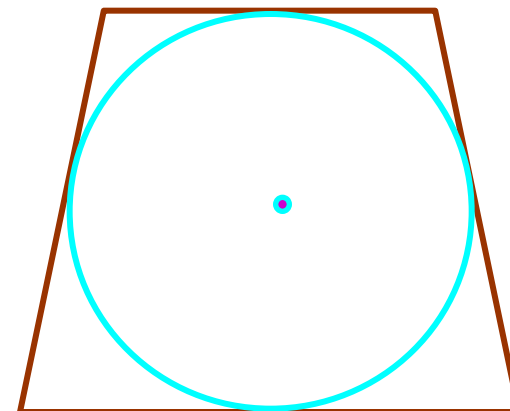
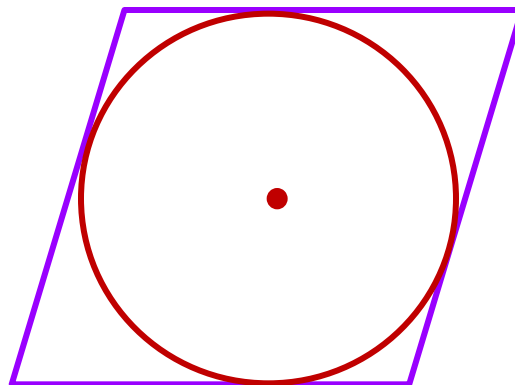
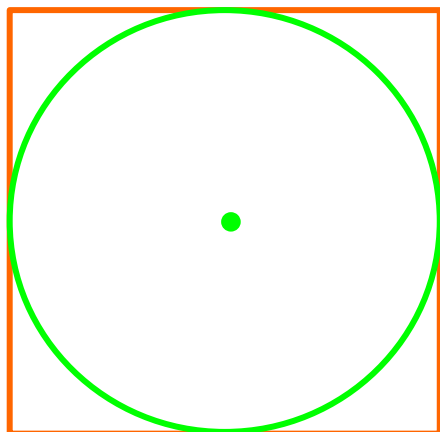
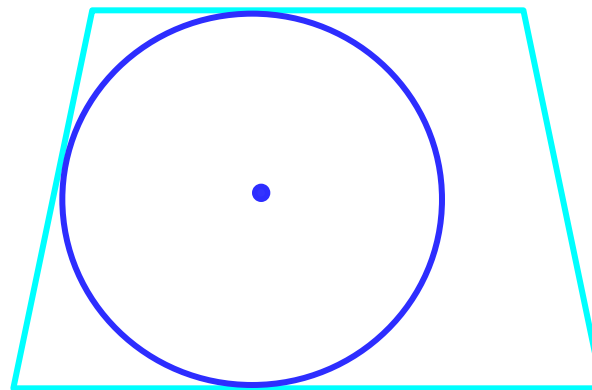
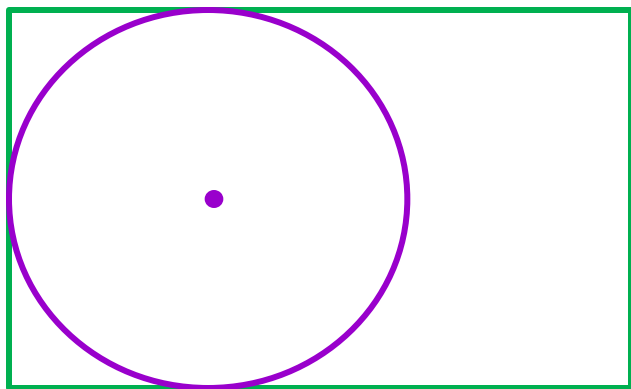
$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} AC \cdot r = \\ &= \frac{AB + BC + AC}{2} \cdot r = p \cdot r \end{aligned}$$

$$S_{ABC} = p \cdot r$$

$$r = \frac{S}{p}$$

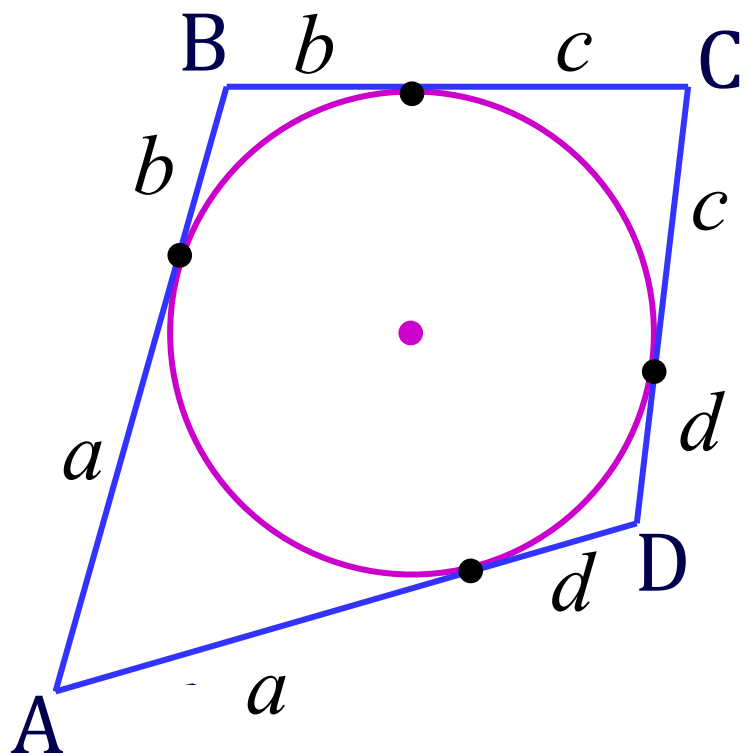
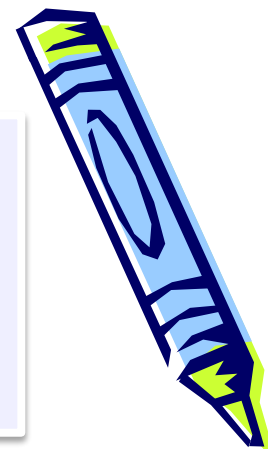


Не во всякий четырёхугольник можно
вписать окружность.



ТЕОРЕМА

В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны.



Дано: окр.(O;r) вписана в ABCD

Доказать: $AB + CD = BC + AD$

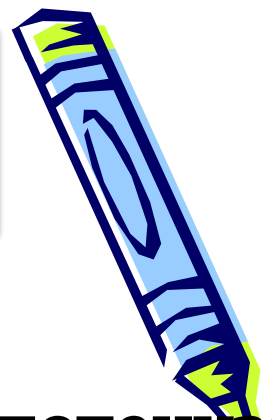
Доказательство: обозначим равные отрезки касательных буквами:
 a, b, c, d

$$\left. \begin{array}{l} AB + CD = a + b + c + d \\ BC + AD = a + b + c + d \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$AB + CD = BC + AD$$

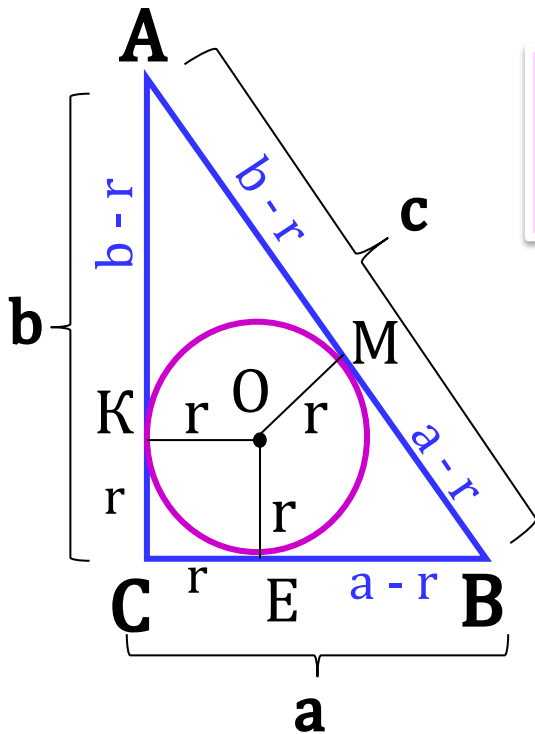
Доказательство обратной теоремы см. № 724 в учебнике.

Формула для радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник



$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

а, b- катеты, с - гипотенуза



Доказательство:

АС, ВС, АВ – касательные и

СКОЕ – квадрат, значит, СК = СЕ = r

По свойству касательных:

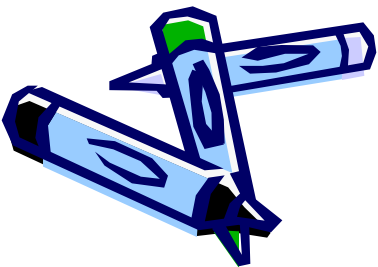
$$BE = BM = a - r$$

$$AK = AM = b - r$$

$$AB = AM + BM$$

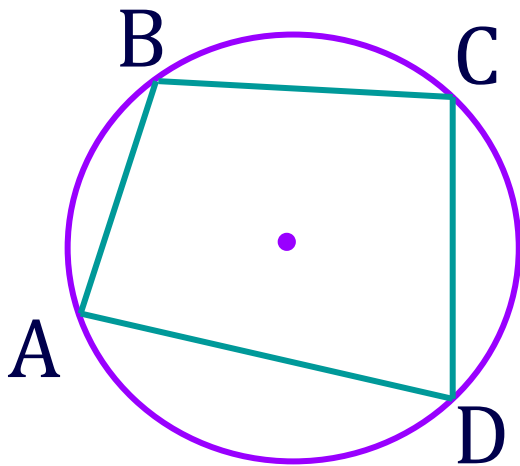
$$c = b - r + a - r$$

$$2r = a + b - c \Rightarrow r = \frac{a + b - c}{2}$$

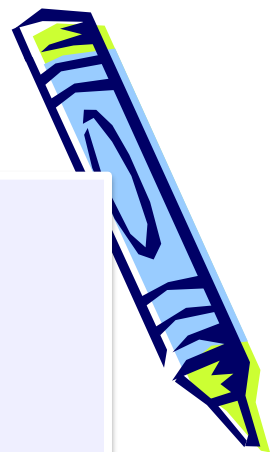
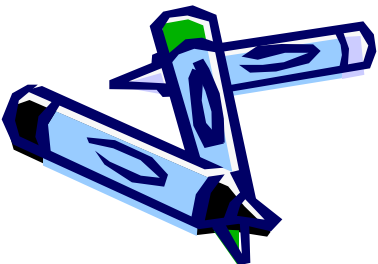
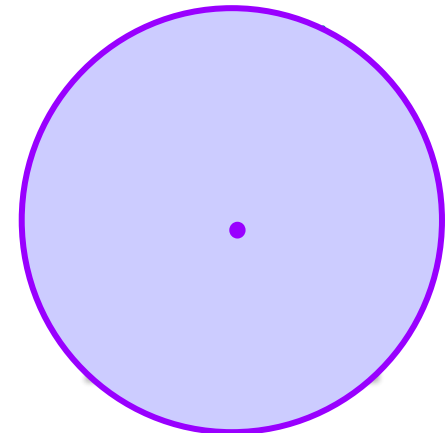
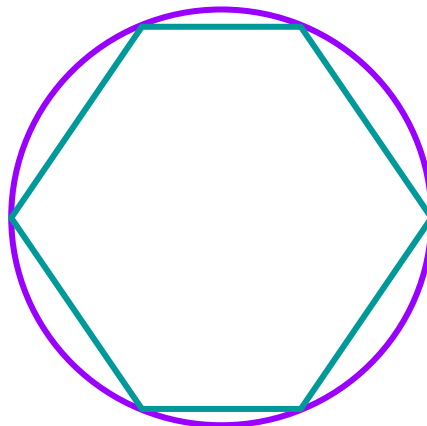


Описанная окружность

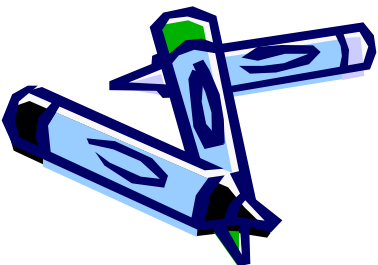
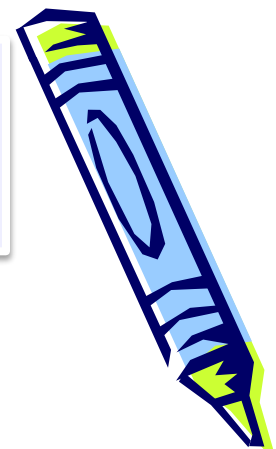
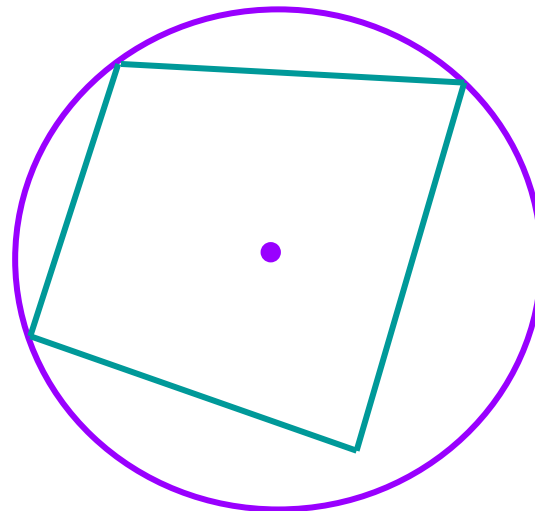
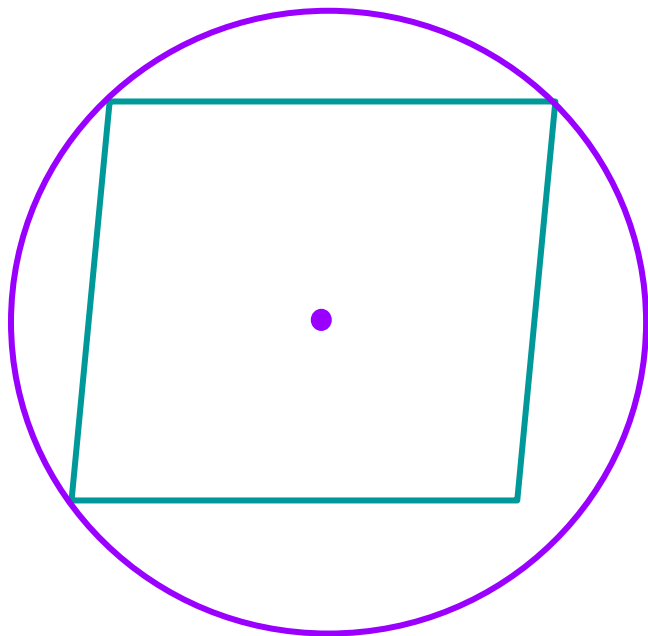
Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется **описанной** около многоугольника, а многоугольник – **вписанным** в эту окружность.



окр. $(O; R)$ описана около ABCD

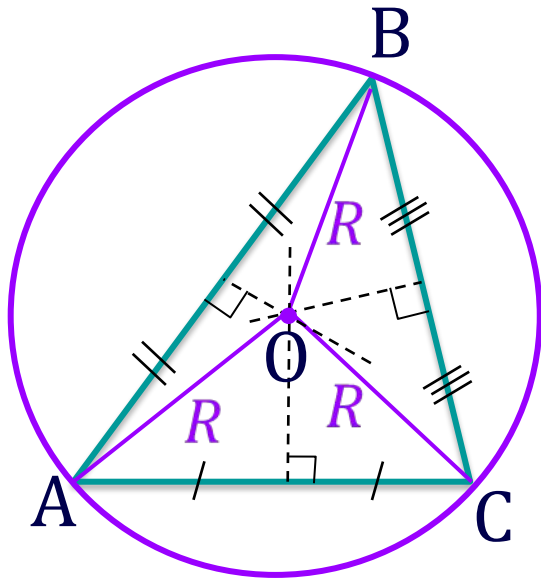


Не около всякого **многоугольника** можно
описать **окружность**.



ТЕОРЕМА

Около любого **треугольника** можно **описать окружность** и притом **только одну.**



Дано: $\triangle ABC$

Доказать: существует окр. $(O; R)$, описанная около треугольника

Доказательство:

Проведём серединные перпендикуляры $OA = OB = OC$, по свойству серединных перпендикуляров.

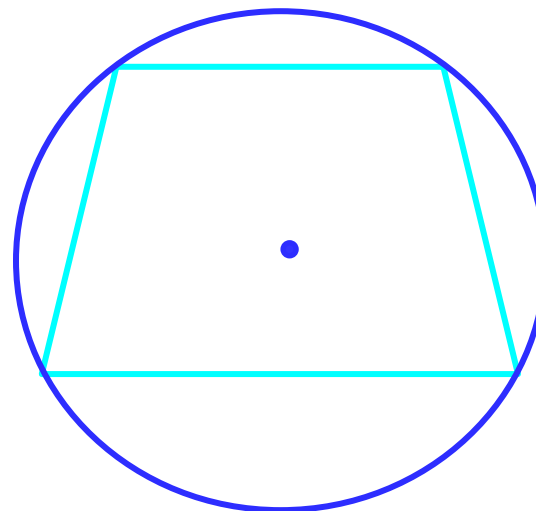
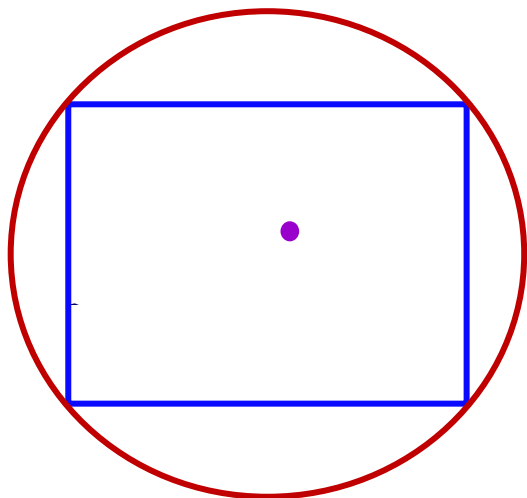
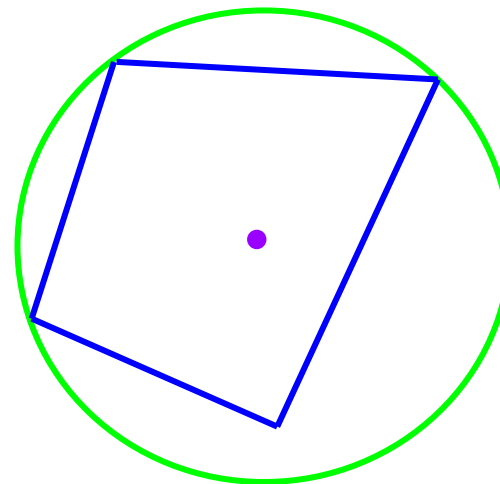
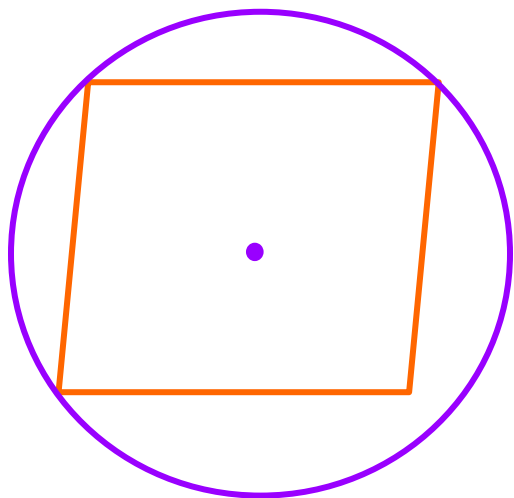
O равноудалена от вершин $\triangle ABC$.

O – центр окружности, OA, OB, OC – радиусы.

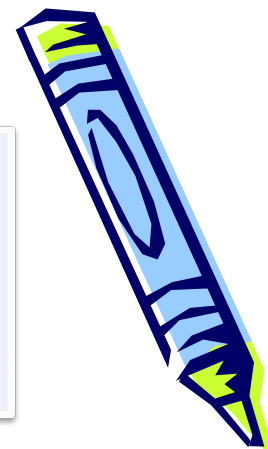
Значит, окружность описана около $\triangle ABC$.

Центр описанной окружности - **точка пересечения серединных перпендикуляров.**

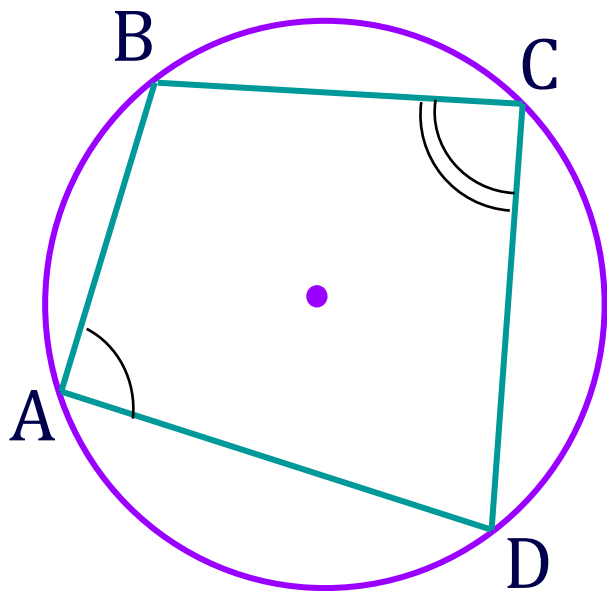
Не около всякого **четырёхугольника**
можно описать **окружность**.



ТЕОРЕМА



Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных углов равны 180° .



Дано: окр.(O;R) описанна около четырехугольник ABCD

Доказать: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^{\circ}$

Доказательство:

$\angle A$ и $\angle C$ вписанные \Rightarrow

$$\angle A = \frac{1}{2} \overline{DCB}, \angle C = \frac{1}{2} \overline{BAD} \Rightarrow$$

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\overline{BCD} + \overline{BAD}) = \frac{1}{2} \cdot 360^{\circ} = 180^{\circ}$$

Доказательство обратной теоремы см. № 729 в учебнике.