Компланарные векторы

Подготовила учитель математики
Баландина Наталья Михайловна

Цели урока

- **Ввести определение компланарных векторов.**
- **Рассмотреть признак компланарности трех векторов и правило параллелепипеда, сложение трех некомпланарных векторов.**

Фронтальный опрос

1. Что называется вектором в пространстве? Как обозначается вектор?
2. Что называется длиной вектора? Как она обозначается?
3. Какой вектор называется нулевым? Как он обозначается?
4. Какие векторы называются коллинеарными?
5. Какие векторы называются сонаправленными? Как они обозначаются?
6. Какие векторы называются противоположнонавленными? Как они обозначаются?
7. Какие векторы называются равными?

8. Справедливо ли утверждение:

a. Любые два противоположно направленных вектора коллинеарны
b. Любые два коллинеарных вектора сонаправлены
c. Любые два равных вектора коллинеарны
d. Любые два сонаправленных вектора равны

9. Может ли длина суммы двух векторов быть меньше длины каждого из слагаемых?

10. Может ли длина суммы нескольких ненулевых векторов быть равной сумме длин этих векторов?

11. Может ли длина разности двух ненулевых векторов быть равной сумме длин этих векторов?

12. Может ли длина разности двух ненулевых векторов быть равной длине разности этих векторов?

13. Может ли длина суммы двух ненулевых векторов быть равна длине разности этих векторов?

Новый материал

Определение.

Векторы называются компланарными, если при откладывании от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

***Иначе*: векторы называются компланарными, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.**

Любые два вектора компланарны.

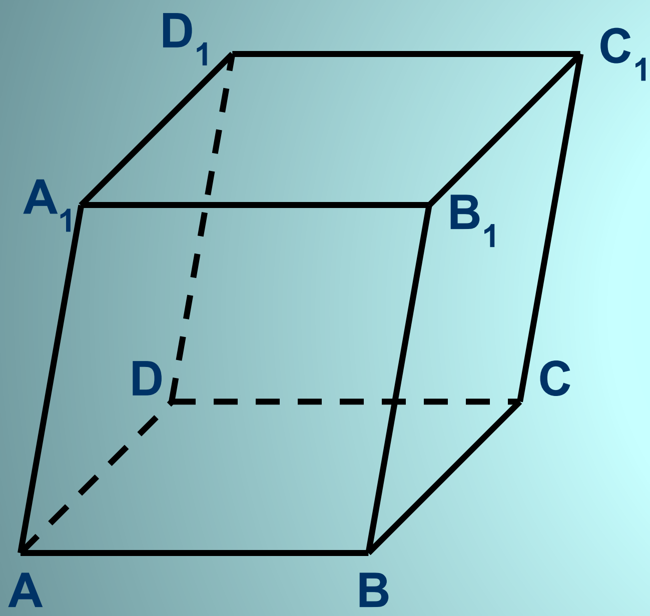
Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны.

Почему?

Три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и некомпланарными.

Новый материал

Устное решение № 355



а) да, т.к. три вектора, среди которых имеются два коллинеарных вектора, также компланарны

б)нет

в) да, т.к. векторы B_1B и DD_1 коллинеарны

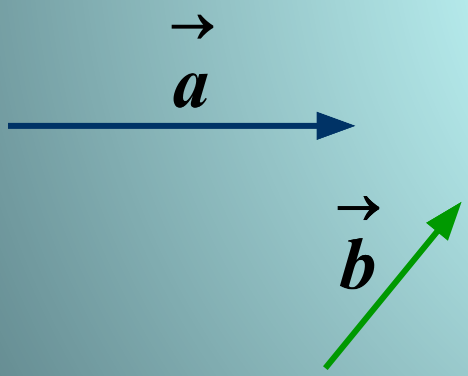
г) нет

Новый материал

Признак компланарности трех векторов:

Если вектор $\vec{c}$ *можно представить в виде* $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$,

где x *и* y *– некоторые числа, то векторы* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *компланарны.*



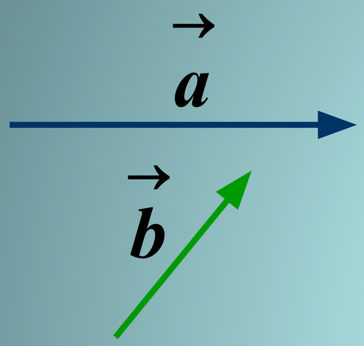
Дано: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Доказать: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *– компланарны*

Новый материал

Признак компланарности трех векторов:

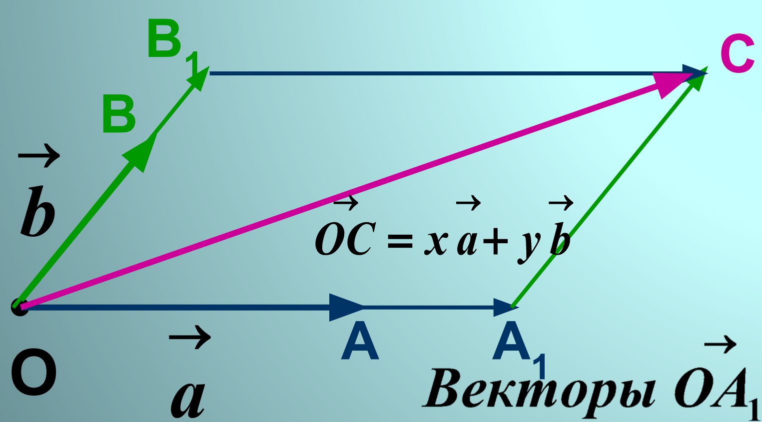


Доказательство.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны.

Отложим от некоторой точки пространства O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ лежат в плоскости OAB.



Построим векторы $x\vec{a}$ и $y\vec{b}$.

Для определенности будем считать что $x > 0$, $y > 0$. $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB_1} = y\vec{b}$.

Векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OB_1}$ также лежат в плоскости OAB.

Их сумма – вектор $\overrightarrow{OC} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$, равный вектору $\vec{c}$, лежит в плоскости OAB.

Новый материал

Итак, векторы $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ *лежат в одной плоскости,*

т. е. векторы $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b},$ *и* $\overrightarrow{c}$ *– компланарны.*

Новый материал

Определение.

Разложить вектор $\vec{p}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, это значит, представить его в виде $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Утверждение, обратное признаку компланарности векторов:

Если векторы $\vec{p}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – компланарны, то вектор $\vec{p}$ можно представить в виде $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y – некоторые числа.

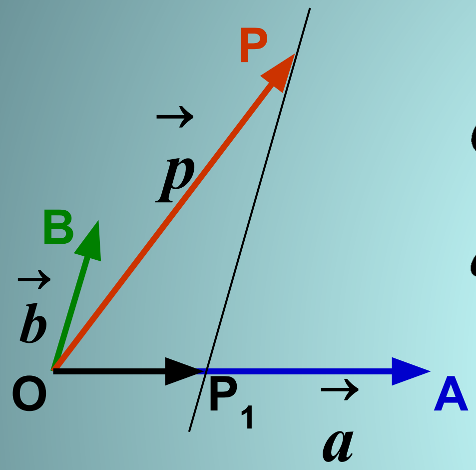
Докажем это.

Новый материал

Доказательство.

Пусть $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *неколлинеарны.*

Отложим от некоторой точки пространства O векторы $\vec{p}, \vec{a}$ *и* $\vec{b}$.



Так как векторы компланарны, то они лежат в одной плоскости.

Проведем через точку P прямую, параллельную BO.

Тогда $\vec{OP} = \vec{OP_1} + \vec{P_1P}$, *но* $\vec{OP_1} = x\vec{a}$, *т.к.* $\vec{OP_1} \parallel \vec{a}$, $\vec{P_1P} = y\vec{b}$, *т.к.* $\vec{P_1P} \parallel \vec{b}$,

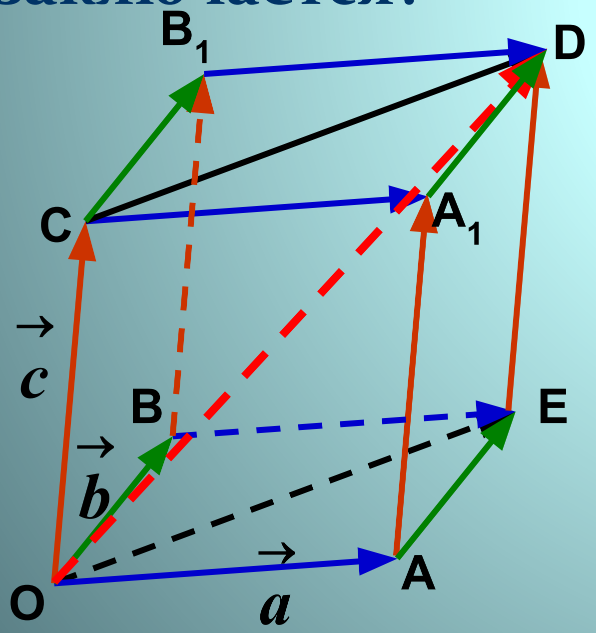
следовательно, $\vec{OP} = x\vec{a} + y\vec{b}$, *т.е,* $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, *ч.т.д.*

А если $\vec{p} \parallel \vec{b}$, *то* $\vec{p} = 0\vec{a} + y\vec{b}$.

Новый материал

Мы умеем на плоскости складывать векторы по правилу треугольника и параллелограмма. А если в пространстве?

Для сложения трех некомпланарных векторов пользуются правилом параллелепипеда. В чем оно заключается?



$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{OE}+\vec{OC}=\vec{OD}$$

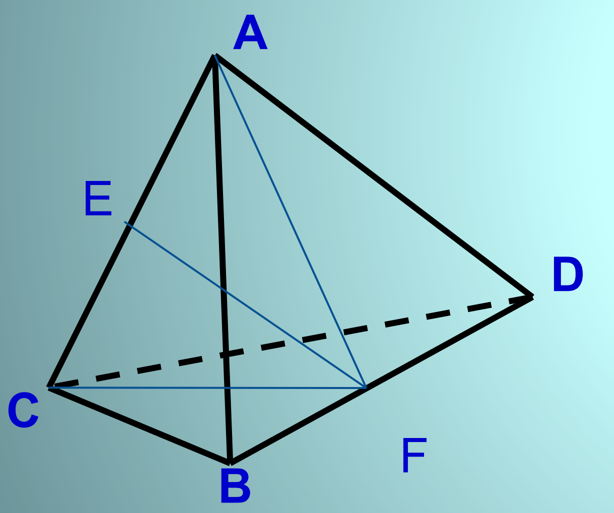
Новый материал

Определение.

Разложить вектор $\vec{p}$ по трем некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, это значит, представить его в виде $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Закрепление материала

Решение №356



Дано : $ABCD$ – *тетраэдр*

E – *середина* AC,

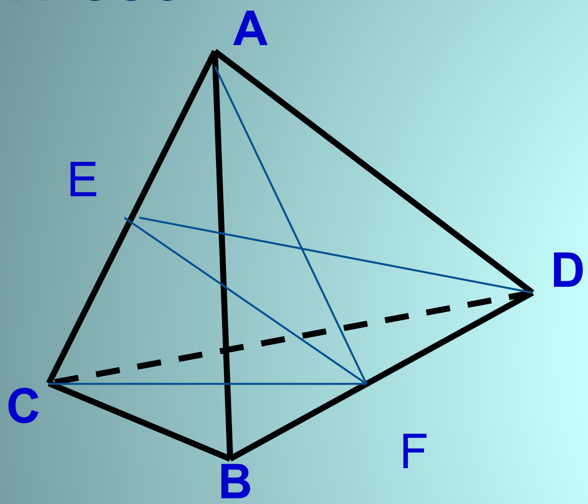
F – *середина* BD.

Доказать : $2\vec{FE} = \vec{BA} + \vec{DC}$.

Компланарны ли векторы $\vec{FE}$, $\vec{BA}$ и $\vec{DC}$?

Закрепление материала

№356



$$\vec{FE} = \vec{DE} - \vec{DF} = \frac{1}{2}\left(\vec{DA} + \vec{DC}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\vec{DD} + \vec{DB}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{DA} + \vec{DC} - \vec{DB}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{DA} - \vec{DB} + \vec{DC}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{BA} + \vec{DC}\right).$$

Следовательно, $2\vec{FE} = \vec{BA} + \vec{DC}$, *ч.т.д.*

По признаку векторы $\vec{FE}, \vec{BA}$ ***и*** $\vec{DC}$ ***– компланарны.***

Ответ : компланарны.

Домашнее задание

п. 39, 40

вопросы 13-15 стр. 97

№358, разобрать №366, 368(а, б)