

# Параллельные прямые в пространстве

## • ПЛОСКОСТЬ

- Прямые, не имеющие общих точек, называются *параллельными*.
- АПП: Через любую точку плоскости, не лежащую на данной прямой проходит прямая, параллельная данной и притом только одна.

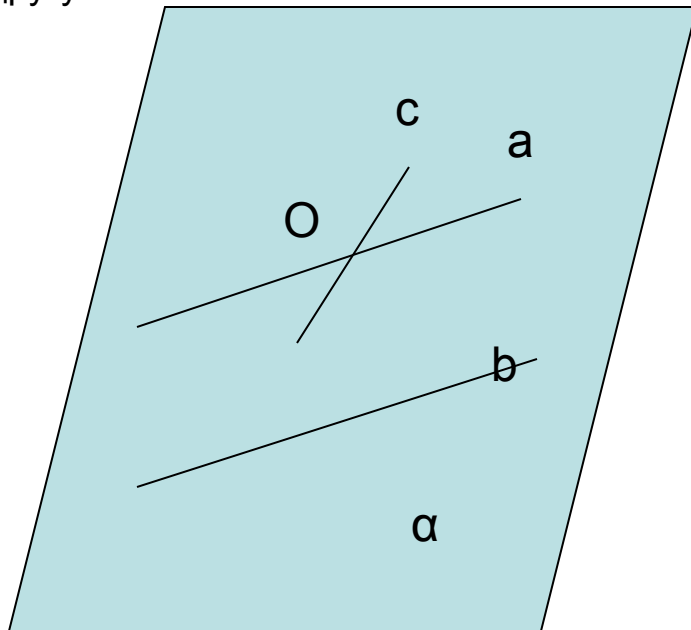
## • ПРОСТРАНСТВО

- Прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек, называются **параллельными**.
- **Теорема (о существовании и единственности прямой, параллельной данной):** Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой проходит прямая, параллельная данной и притом только одна.

Как доказывається истинность утверждения?  
Как доказывається то, что утверждение ложно?

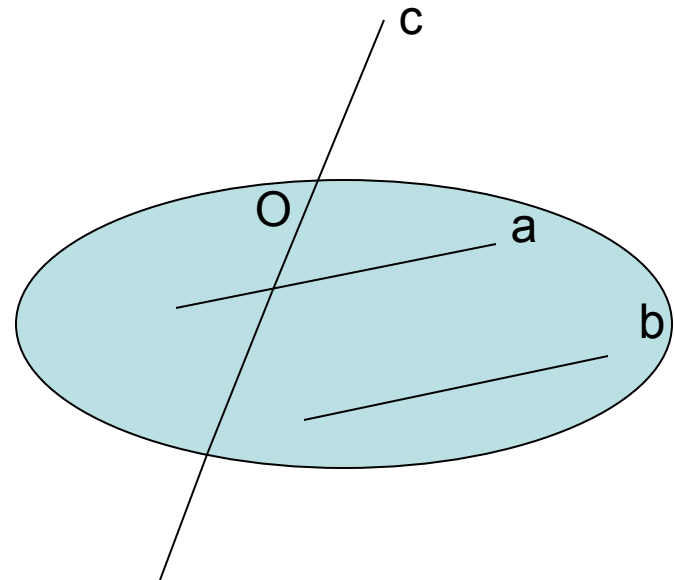
## • ПЛОСКОСТЬ

- Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.



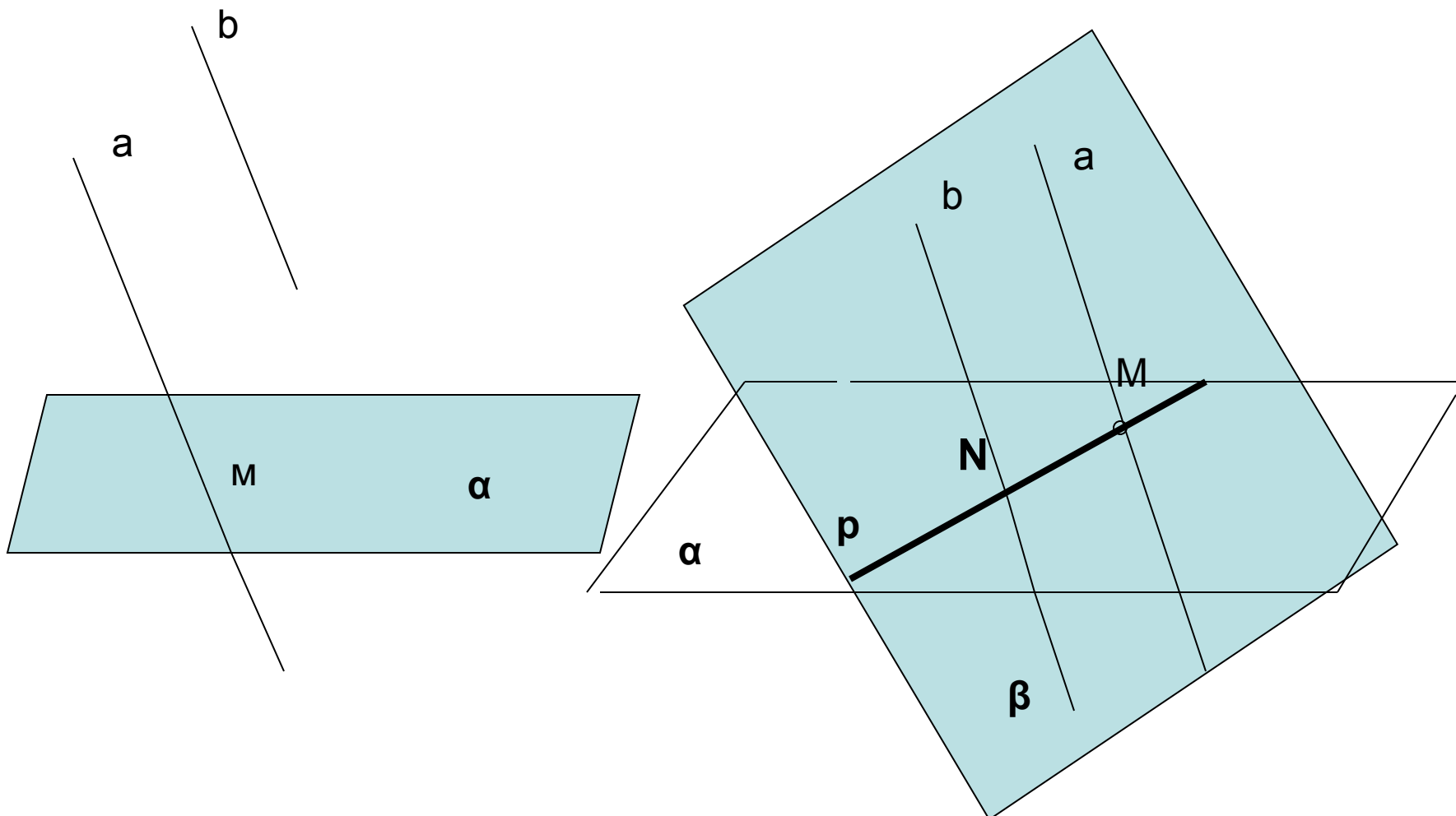
## • ПРОСТРАНСТВО

- Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

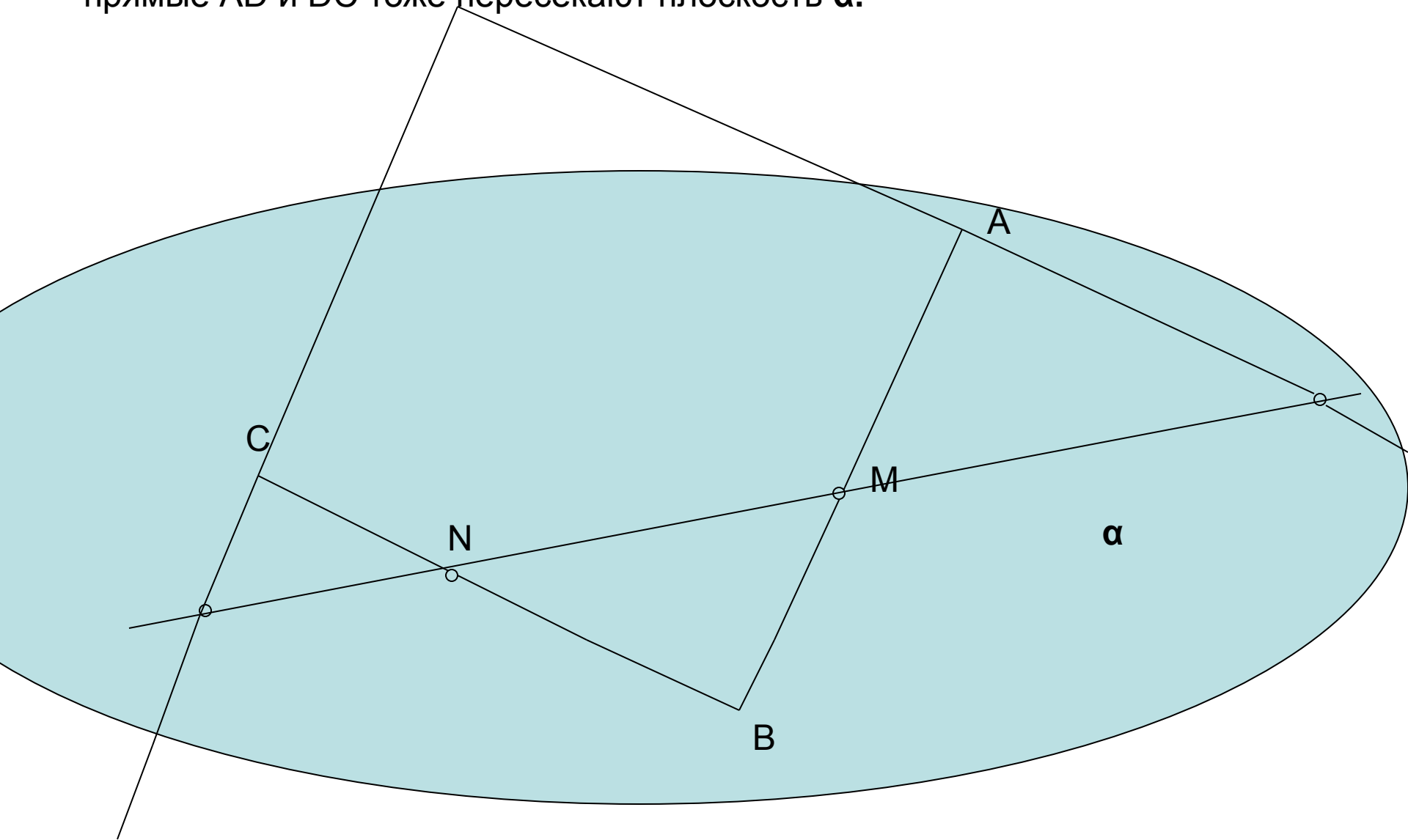


**ЛЕММА:** Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и вторая пересекает эту плоскость.

(Лемма – это утверждение, предшествующее теореме и использующееся при доказательстве этой теоремы)

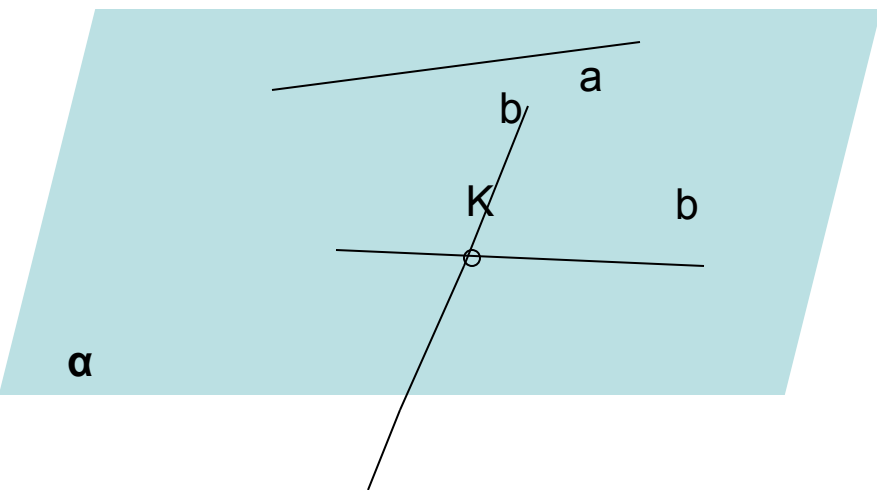
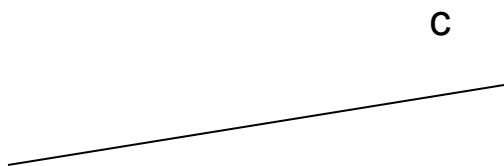


№ 19. Стороны параллелограмма  $AB$  и  $BC$  пересекают плоскость  $\alpha$ . Докажите, что прямые  $AD$  и  $DC$  тоже пересекают плоскость  $\alpha$ .

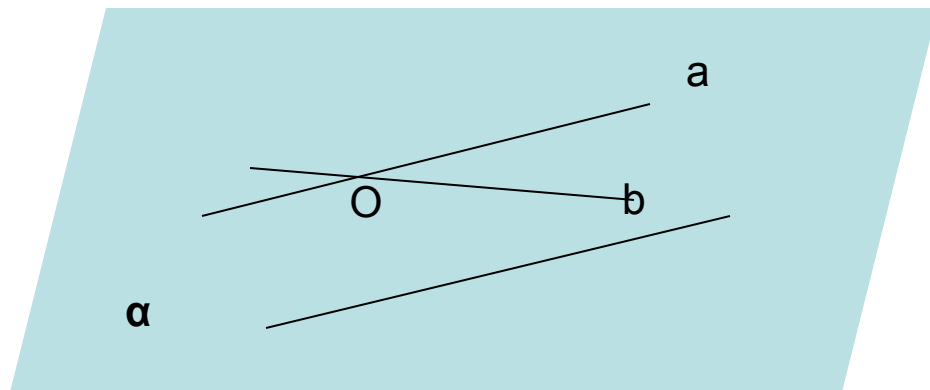
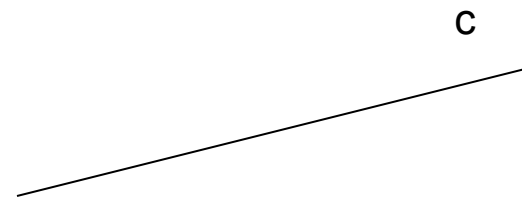


**Теорема:** Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.  
(признак параллельности прямых)

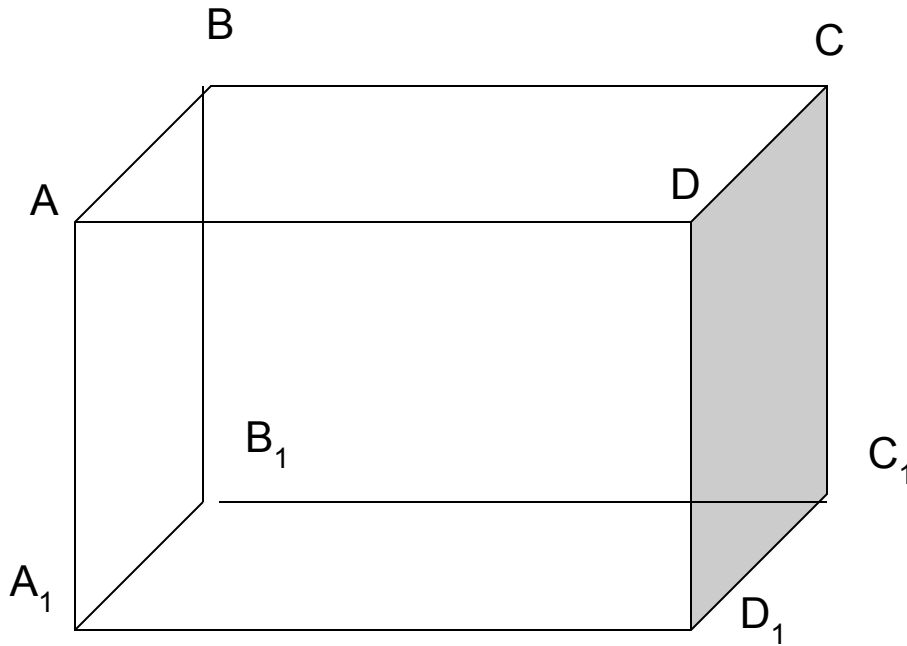
- **Дано:**  $a \parallel c, b \parallel c$ .
- **Доказать:**  $a \parallel b$ , т.е.:
  - 1)  $a$  и  $b$  лежат в одной плоскости
  - 2)  $a$  и  $b$  не пересекаются.
- **Доказательство:**
- 1)



- **Доказательство:**
- 2) от обратного
- Пусть:  $a$  и  $b$  пересекаются, тогда.....

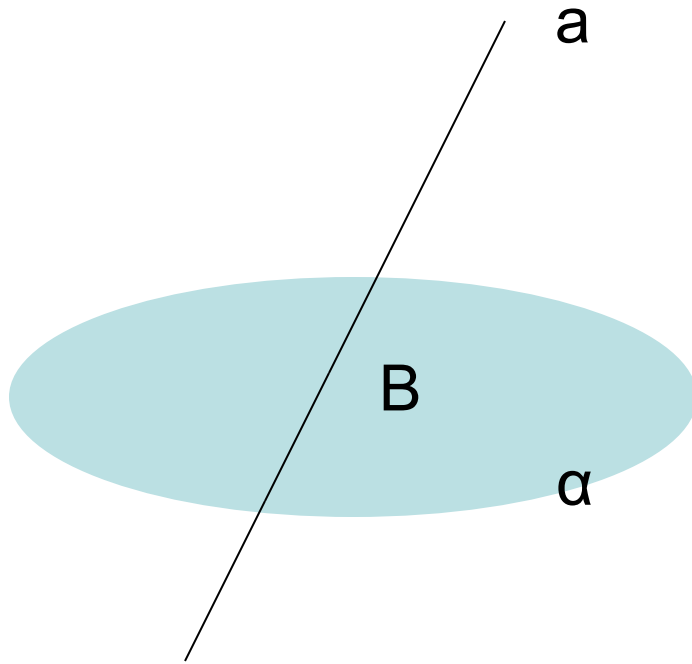


Дан параллелепипед, грани которого являются параллелограммами. Доказать: 1)  $AB \parallel D_1C_1$ ; 2)  $DD_1 \parallel BB_1$ ; 3)  $AD \parallel (A_1B_1C_1)$ ; 4) Каким плоскостям параллельна прямая  $D_1C_1$ ; 5)  $AA_1$  и  $DC$  скрещивающиеся прямые; 6)  $B_1C_1$  и  $DD_1$  скрещивающиеся прямые.

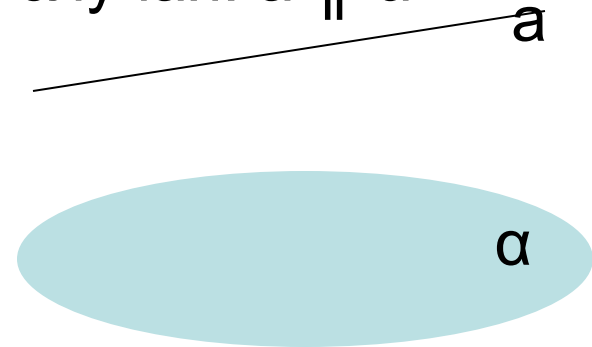


# Взаимное расположение прямой и плоскости

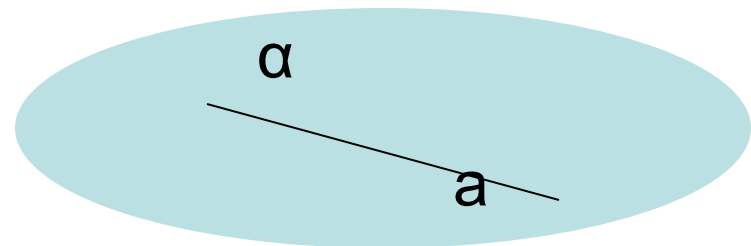
- 1 случай:  $a \cap \alpha$



- 3 случай:  $a \parallel \alpha$



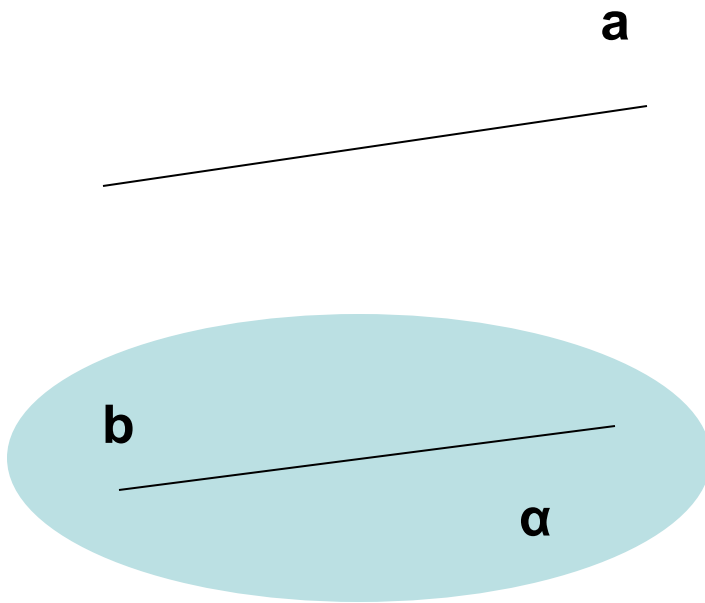
- 2 случай:  $a$  содержится в  $\alpha$  или плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $a$



## Признак параллельности прямой и плоскости

Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна и самой плоскости

- *Дано*:  $a$  не содержится в  $\alpha$ ,  $b$  содержится в  $\alpha$ ,  $a \parallel b$ .
- *Доказать*:  $a \parallel \alpha$



- *Доказательство*

Метод «от обратного»

*Пусть  $a$  не параллельна  $\alpha$* . Тогда...  
 $a$  содержится в  $\alpha$ .

или

$a$  пересекает  $\alpha$ .

По лемме, так как  $a \parallel b$ , то  $b$  тоже пересекает  $\alpha$ .

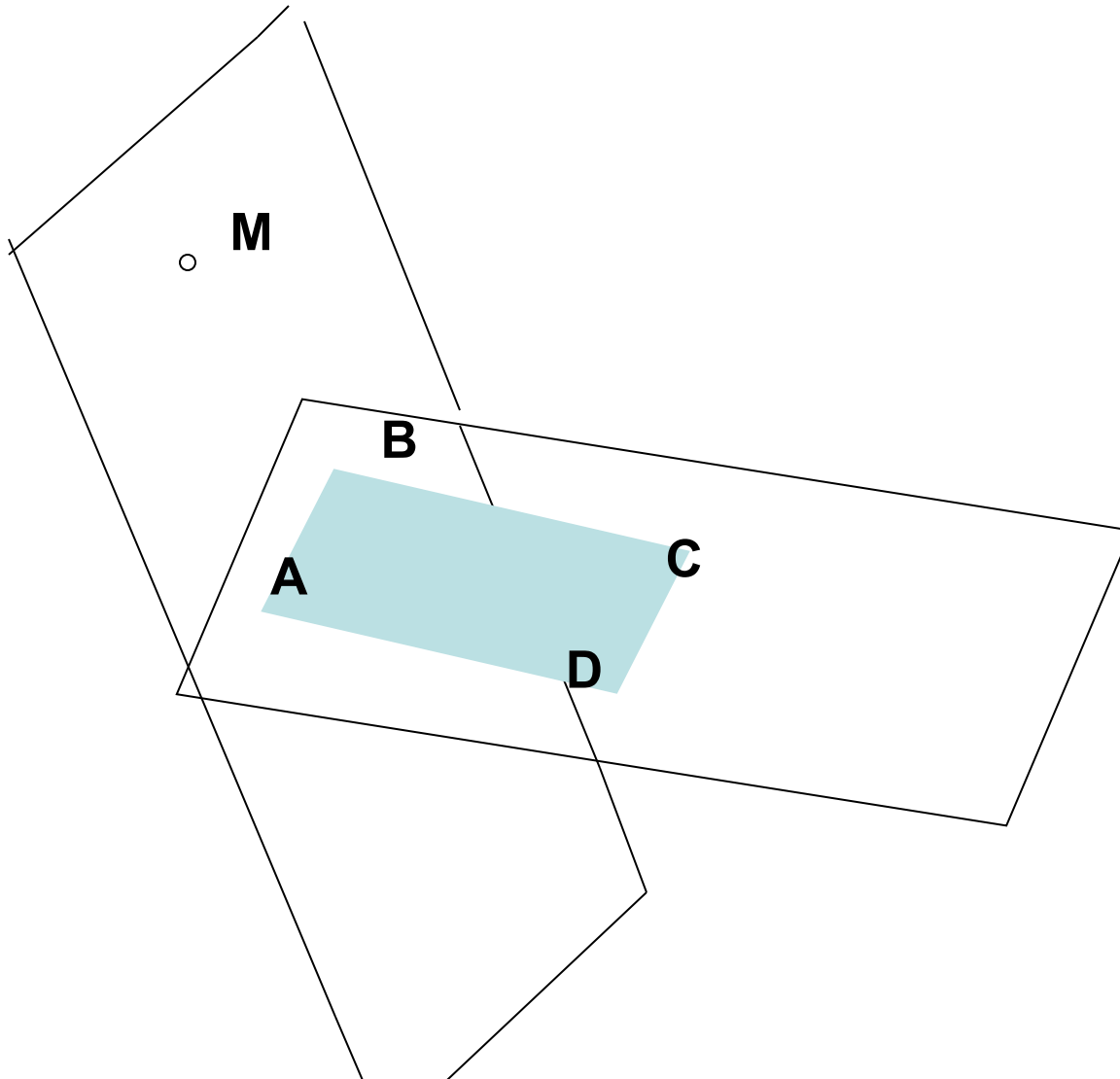
Это противоречит условию теоремы.

Значит, наше предположение неверно.

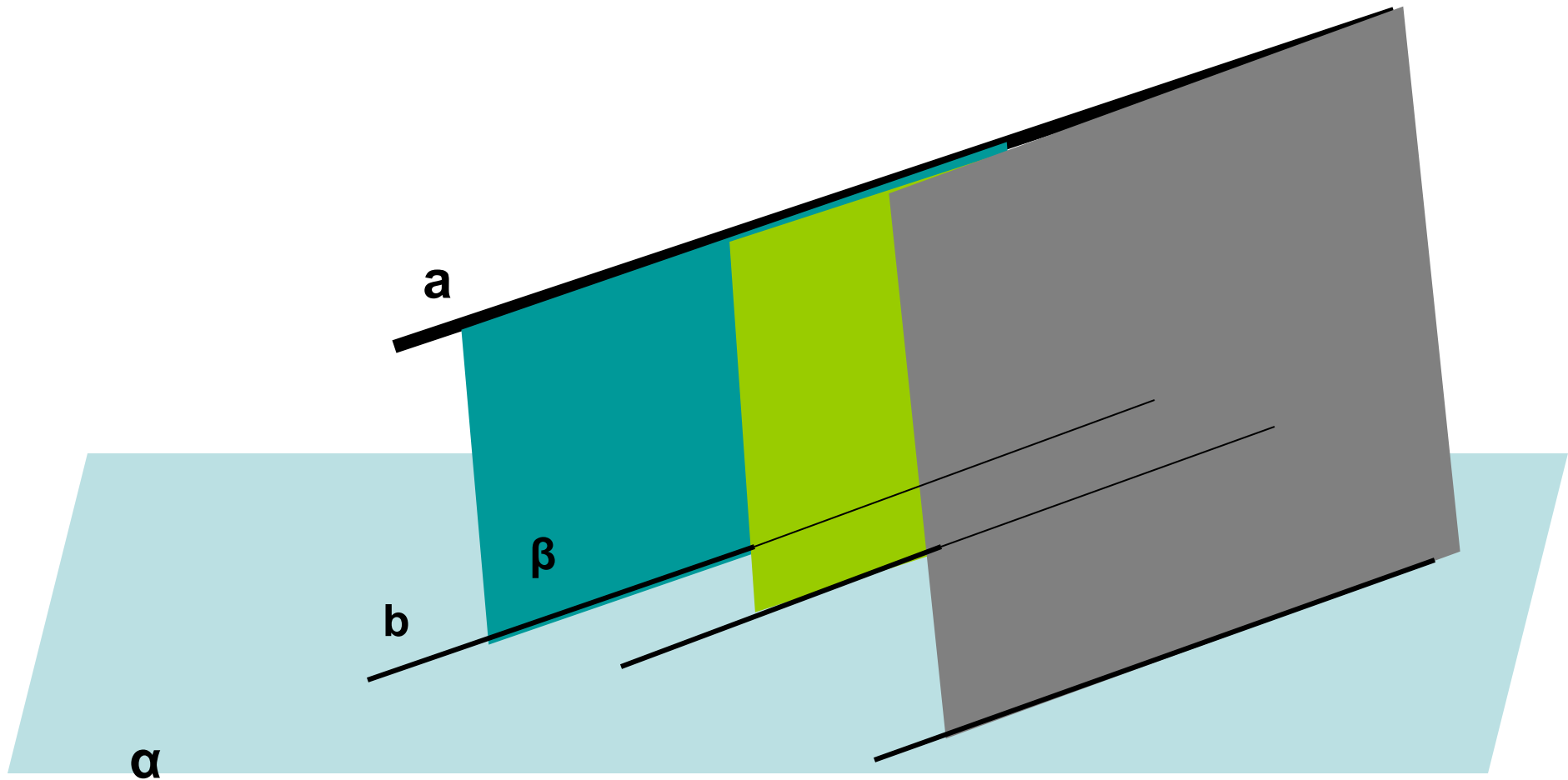
Следовательно  $a \parallel \alpha$



**№ 23** Точка  $M$  не лежит в плоскости прямоугольника  $ABCD$ .  
Докажите, что  $CD \parallel (ABM)$



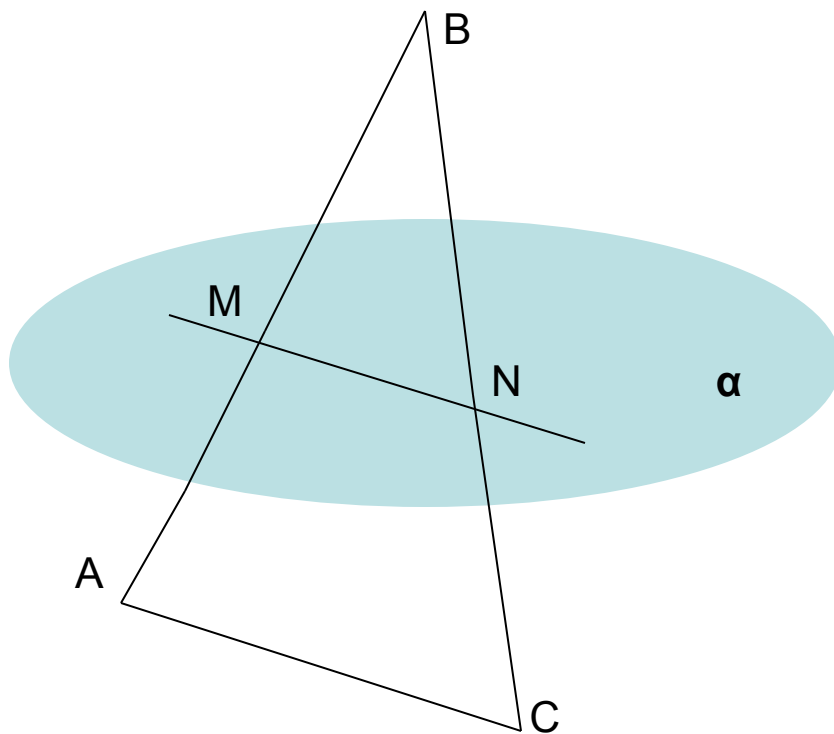
**Свойство 1.** Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости и пересекает ее, то линия пересечения параллельна данной прямой



**Задача.** Плоскость  $\alpha$  пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Известно, что  $AC \parallel \alpha$ ,  $AB:AM=8:3$ .

1) Докажите, что  $BN:BC=5:8$ ;

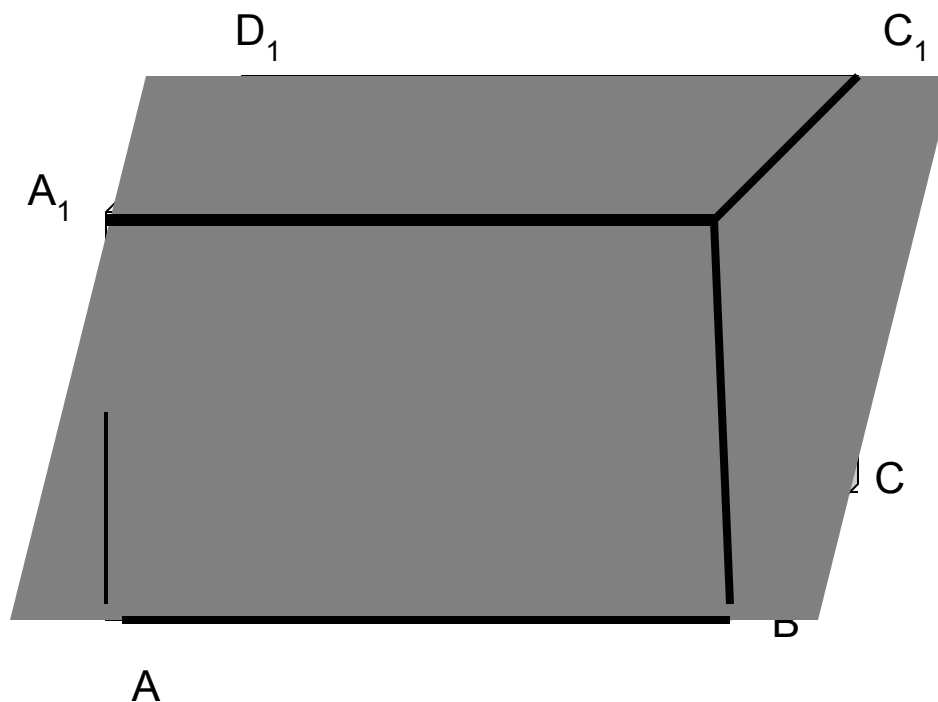
2) Найдите  $BN$ .



## Свойство 2

- **Лемма:** Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая пересекает эту плоскость.
- **Свойство 2.** Если одна из двух параллельных прямых параллельна плоскости, то другая прямая...
  - либо также параллельна данной плоскости,
  - либо лежит в этой плоскости.

Взаимное расположение прямых в пространстве  
назвать несколько пар **параллельных** прямых  
несколько пар **пересекающихся** прямых  
несколько пар прямых, **не лежащих** в одной плоскости



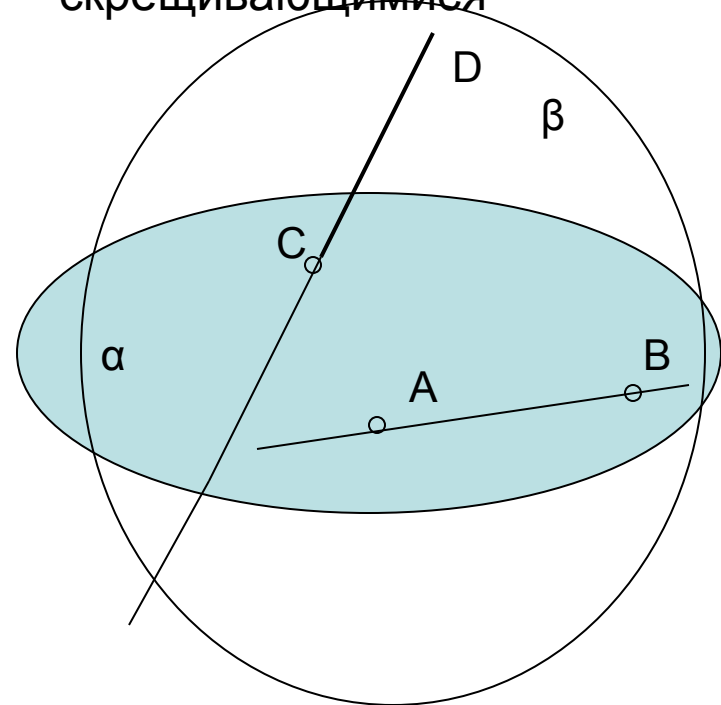
# СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

- **Определение**

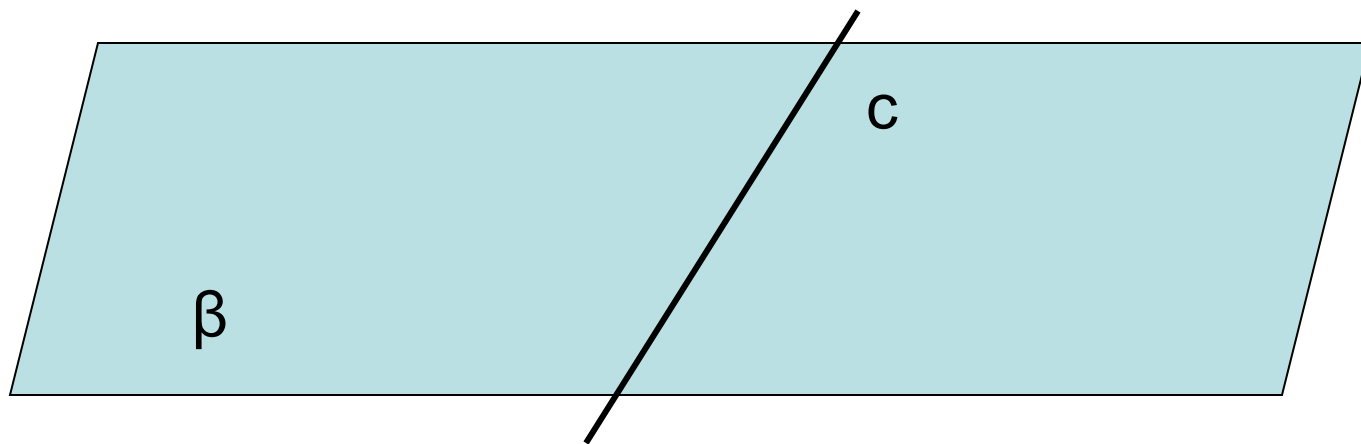
Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости

- **Признак**

Если одна прямая лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые являются скрещивающимися

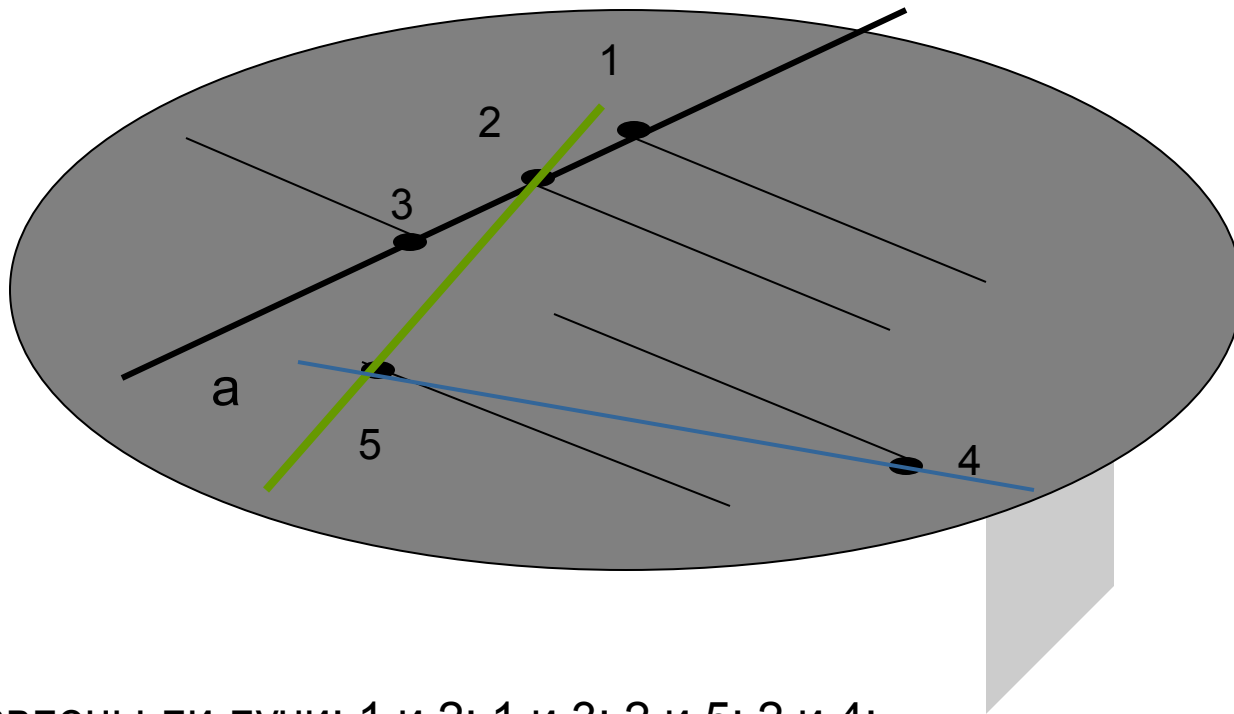


- Любая прямая  $c$ , лежащая в плоскости  $\beta$ , делит эту плоскость на две полуплоскости с границей  $c$ .



# Углы с сонаправленными сторонами

Определение: Два луча, не лежащие на одной прямой, называются **сонаправленными**, если они параллельны и лежат в одной полуплоскости с границей, проходящей через их начала.



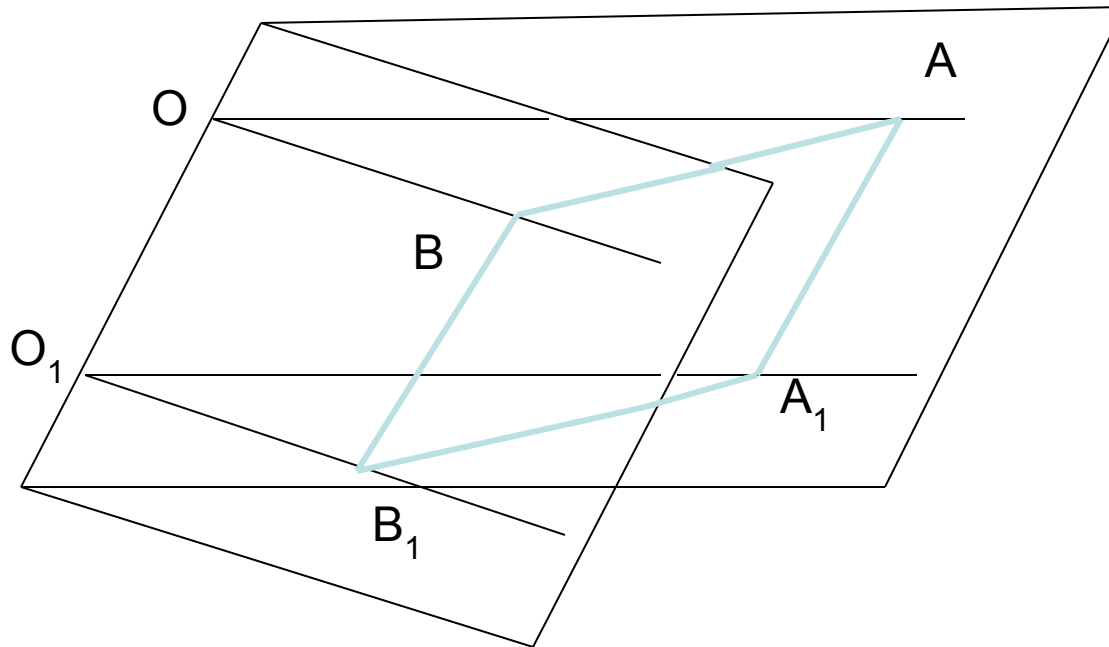
- Сонаправлены ли лучи: 1 и 2; 1 и 3; 2 и 5; 2 и 4; 5 и 4?



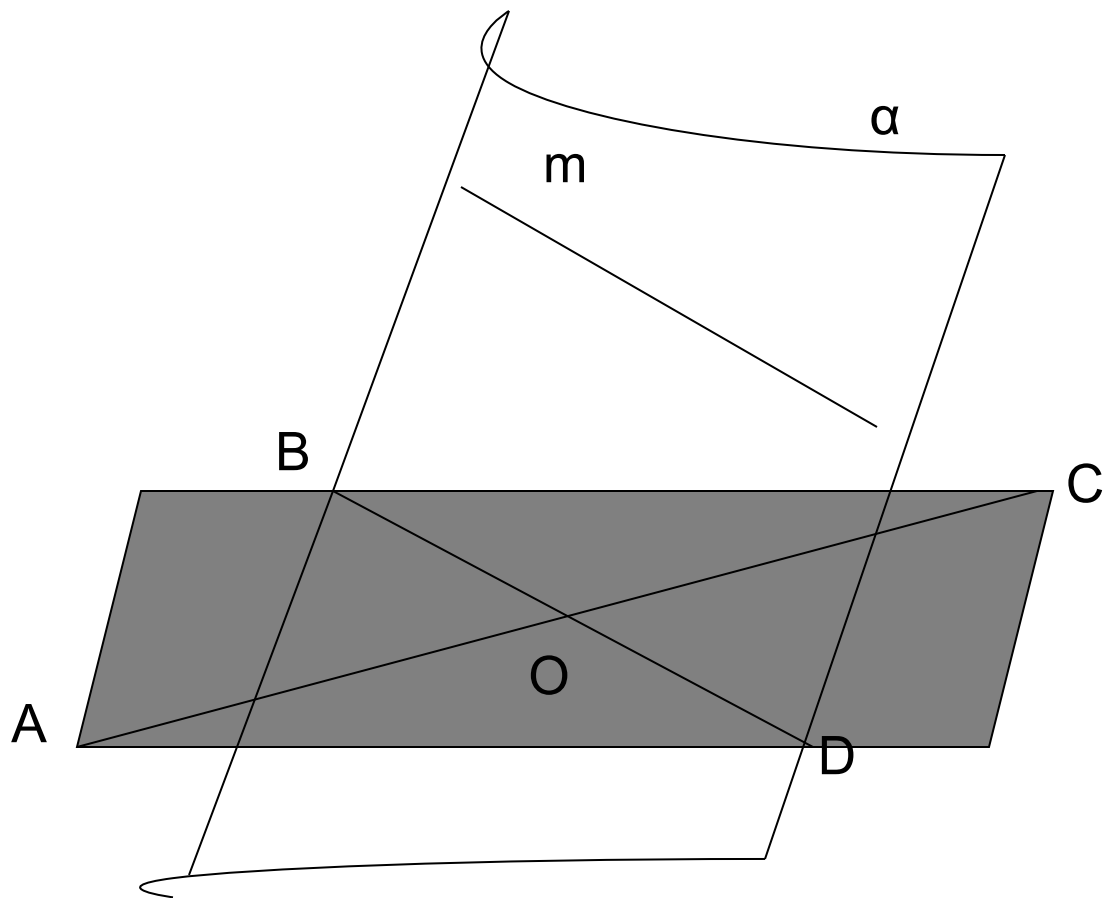
**Теорема:** Если стороны двух углов являются сонаправленными лучами, то такие углы равны

**Доказательство:**

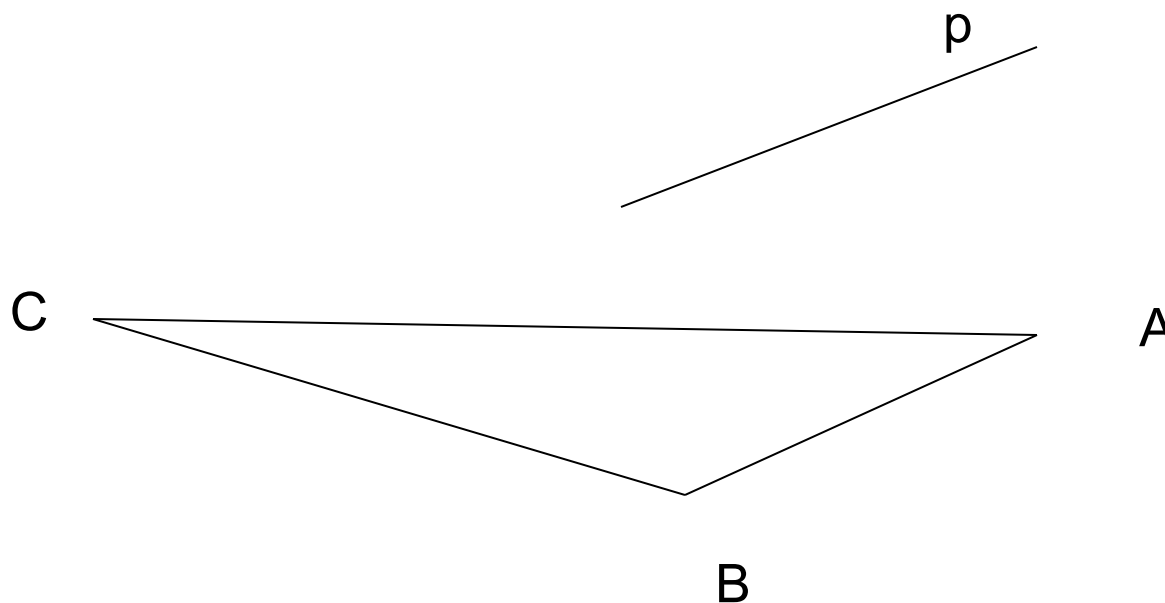
рассмотрим четырехугольники 1)  $OAA_1O_1$ , 2)  $OBV_1O_1$ , 3)  $BAA_1V_1$ , 4) треугольники  $OAB$  и  $O_1A_1V_1$

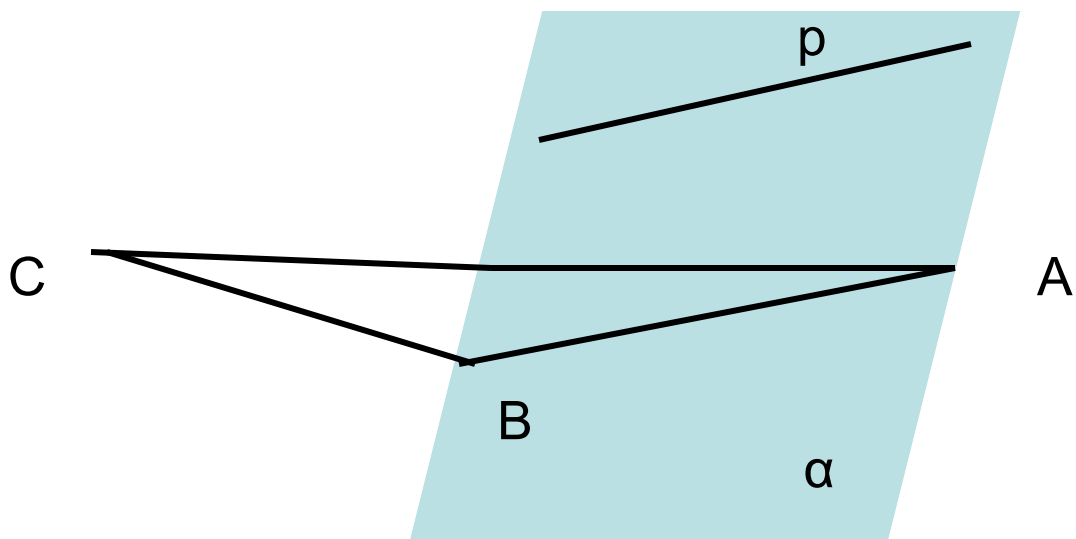


# Задача № 46



**Задача:** Прямая  $p$ , не лежащая в плоскости треугольника  $ABC$ , параллельна стороне  $AB$ . Найти угол между прямыми  $p$  и  $BC$ , если угол  $ABC$  равен  $132^\circ$ .

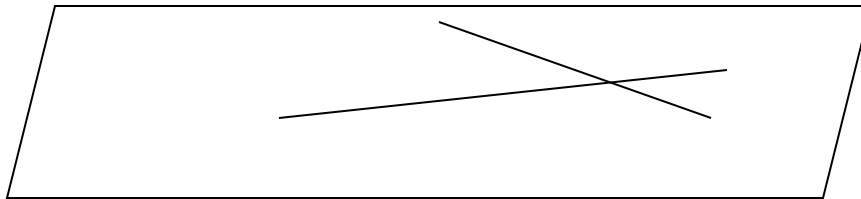
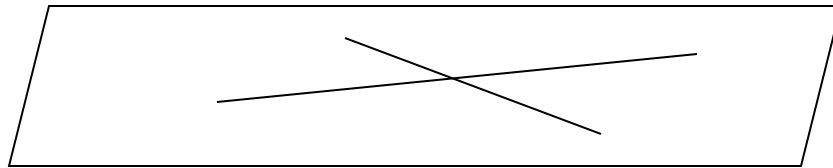




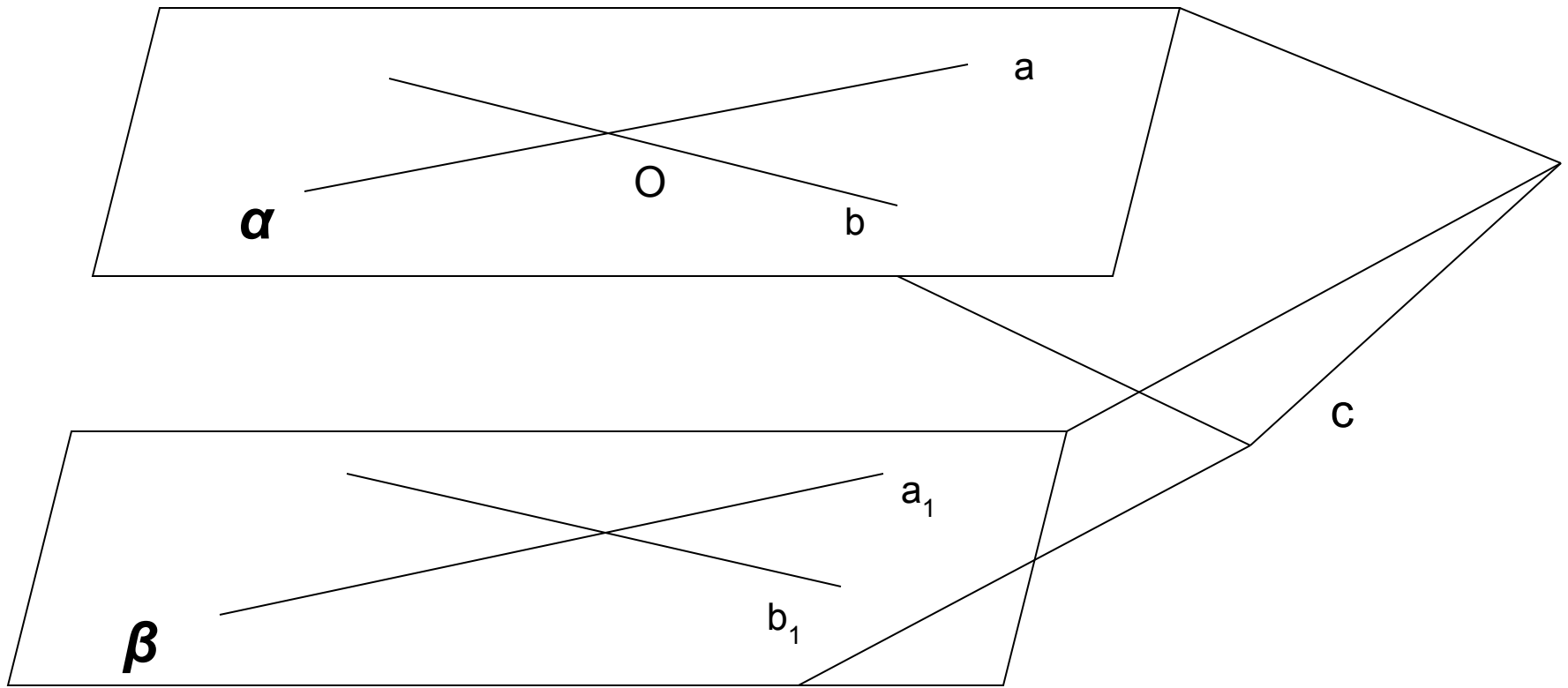
## Параллельность плоскостей

**Опр.** Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

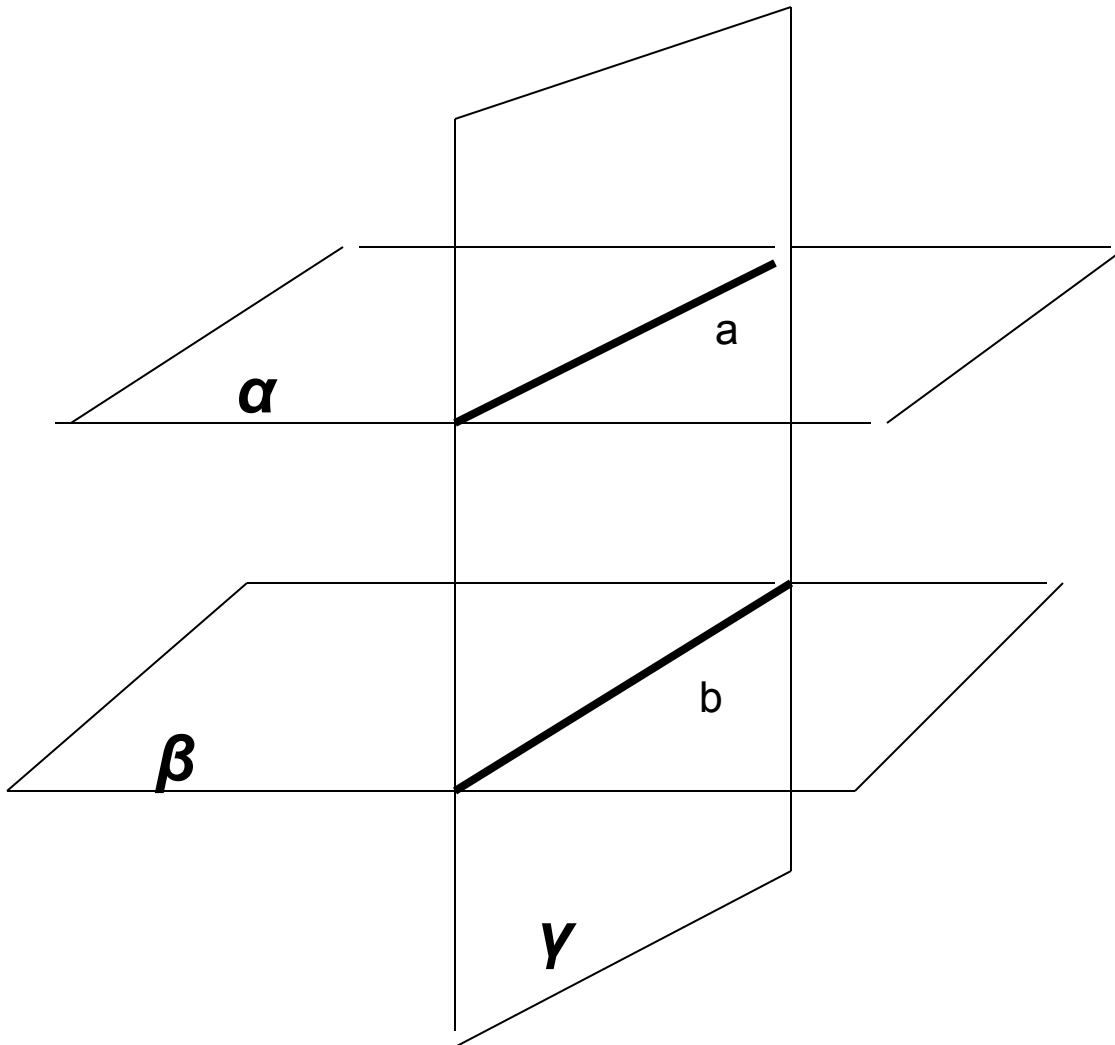
**Признак:** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.



**Метод от обратного:** Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  не параллельны. Тогда они пересекаются по прямой  $c$ .



**Свойство 1:** Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения **параллельны**.



**Свойство 2:** Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, *равны*.

