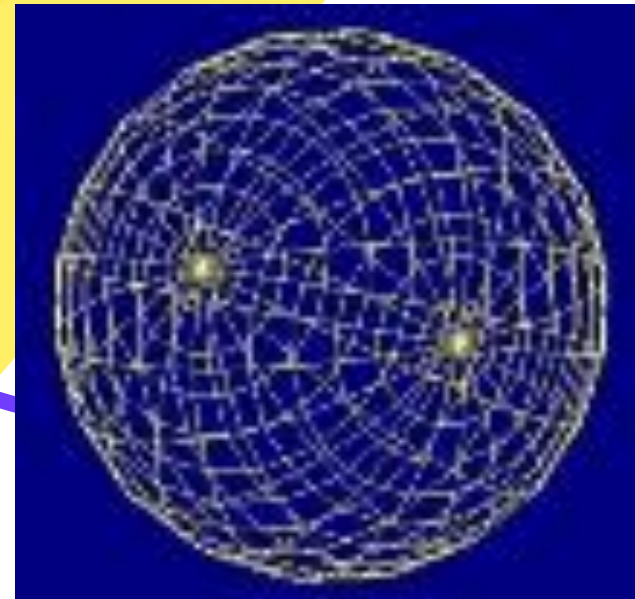




# Сфера и шар



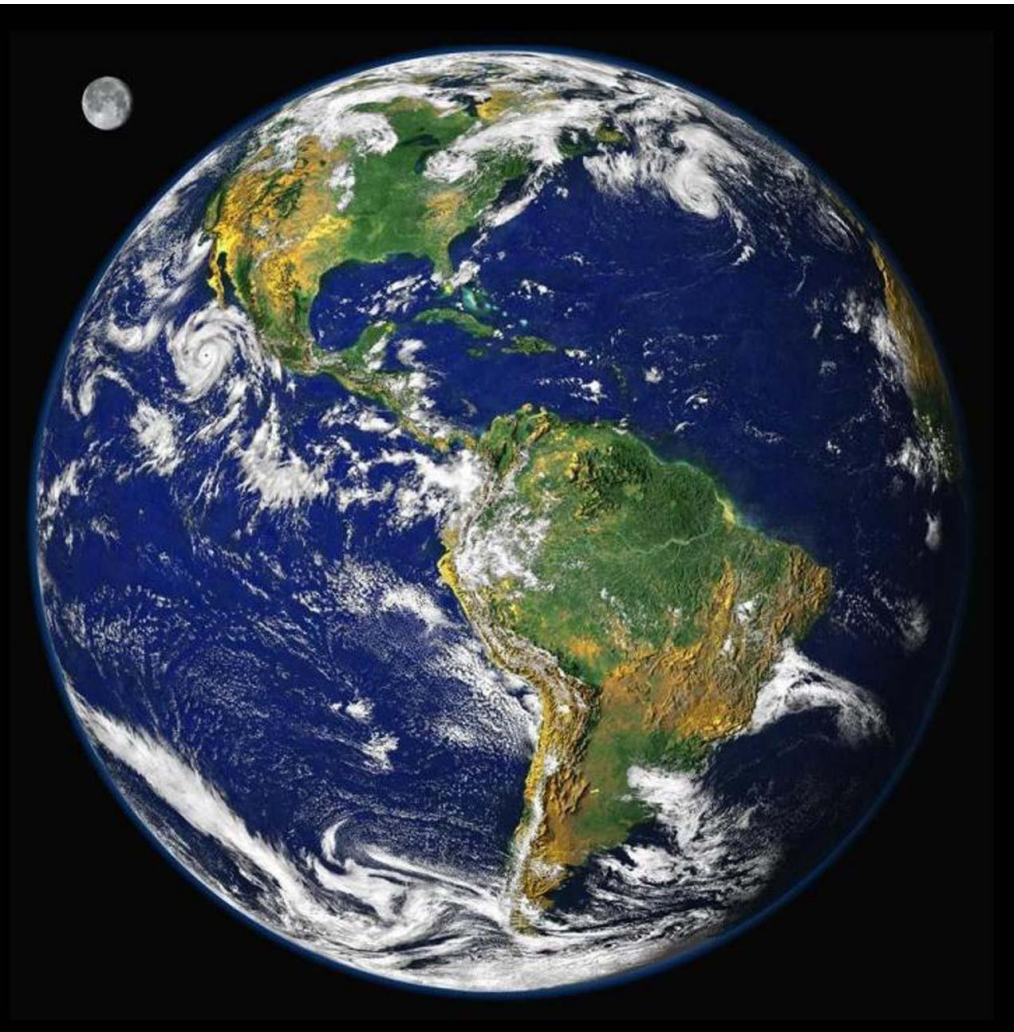


- Слово «сфера» произошло от греческого слова «сфайра», которое переводится на русский язык как «мяч».



**ШАР-символ будущего.**





- Символ шара-глобальность шара Земли. Символ будущего, он отличается от креста тем, что последний олицетворяет собой страдание и человеческую смерть.
- В Древнем Египте впервые пришли к заключению, что земля шарообразна. Это предположение послужило основой для многочисленных размышлений о бессмертии земли и возможности бессмертия населяющих ее живых организмах.





Не случайно подобными скульптурами украшены некоторые вокзалы Западной Европы, например в Хельсинки: здесь запечатлены тяготы, выпадающие на плечи путешественника.

Человек, держащий шар в руках, символизирует субъекта, несущего тяготы мира





- Таким образом, шар и глобус — это знаки промысла, проведения, вечности, власти и могущество коронованных особ





- Каменное полушарие сферы воплощается в религиозных храмах - куполах православных церквей в России; ступах, связанных с местом пребывания бодхисаттв в Индии. В Индонезии ступы приобрели форму колокола с каменным шпилем наверху и называются дагобы.



- В греко-римской мифологии шар символизировал удачу, судьбу, ассоциируясь с Тихэ (Фортуной), стоящей на шаре. Знаменитая картина Пикассо «Девочка на шаре» - танцующая Фортуна.

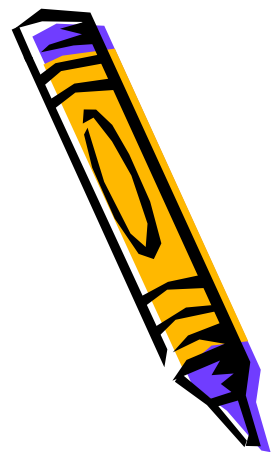




# Форма шара в природе



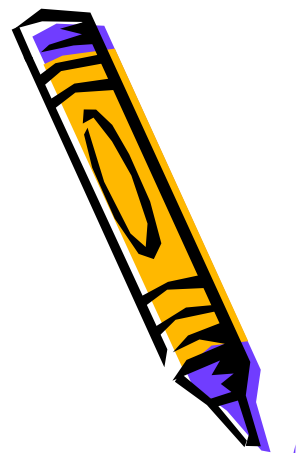
- Многие ягоды имеют форму шара.



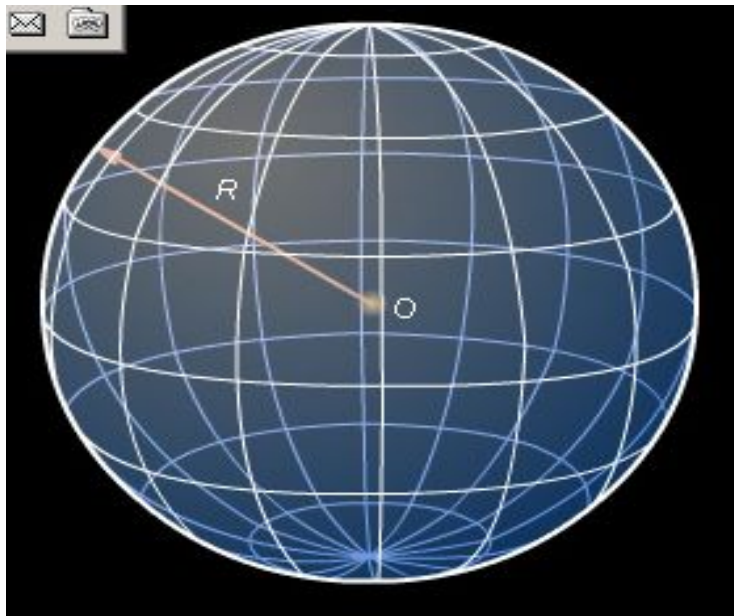
Планеты имеют форму шара.



Некоторые деревья имеют сферическую форму.

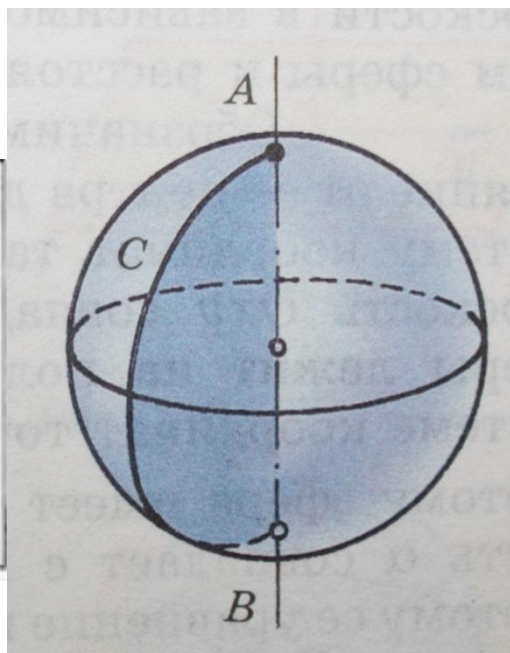
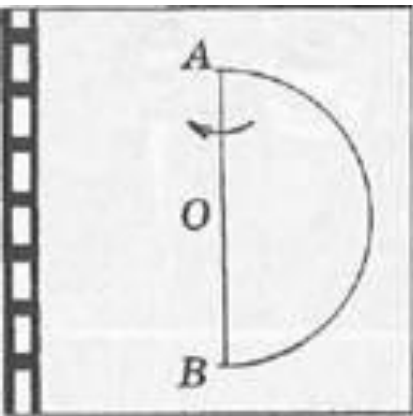


# Определение сферы

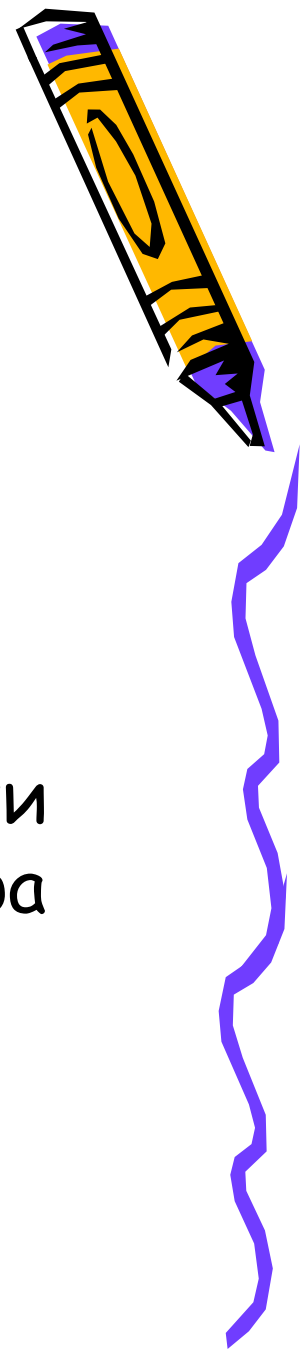


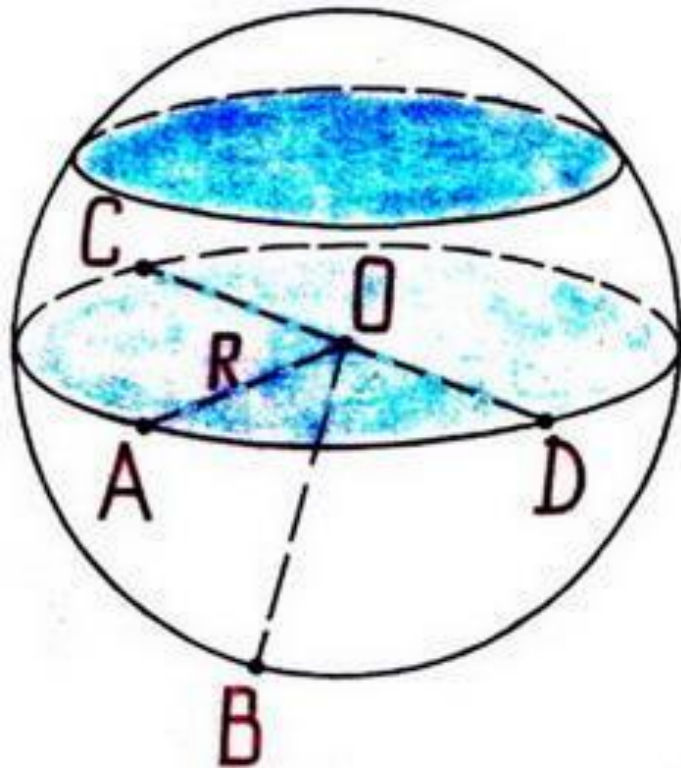
- Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки



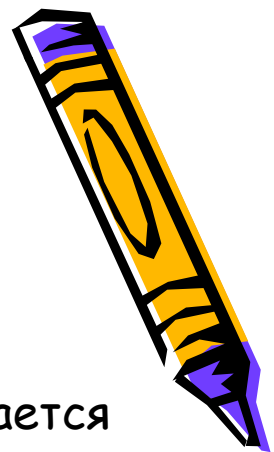


- Сфера -это поверхность, полученная вращением полуокружности вокруг диаметра

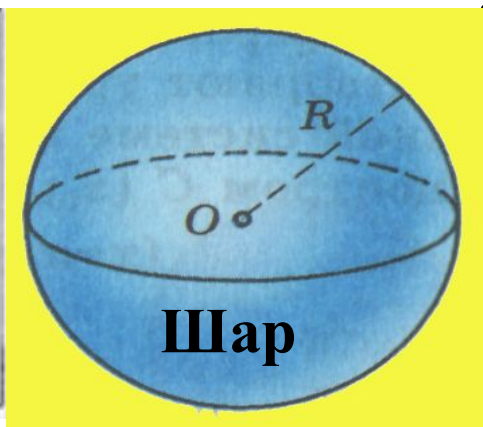
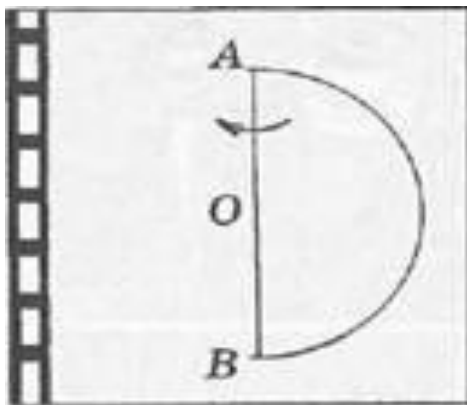




- Данная точка ( $O$ ) называется центром сферы.
- Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы, называется радиусом сферы ( $R$ -радиус сферы).
- Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр, называется диаметром сферы. Очевидно, что диаметр сферы равен  $2R$ .



# Определение шара



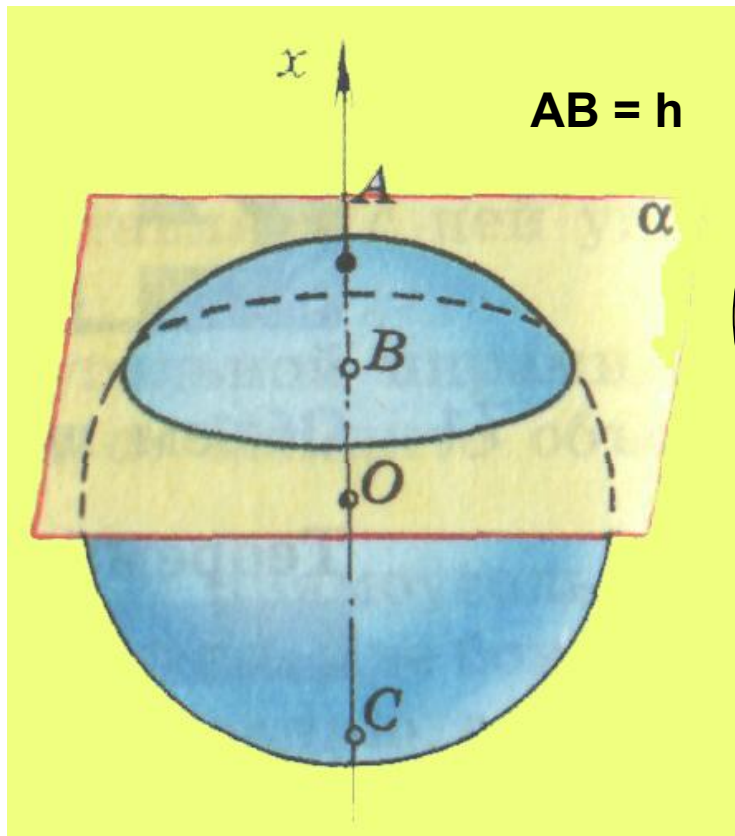
Шар – это тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки (или фигура, ограниченная сферой).

*Тело, ограниченное сферой, называется **шаром**.*

- Центр, радиус и диаметр сферы называются также центром, радиусом и диаметром шара.



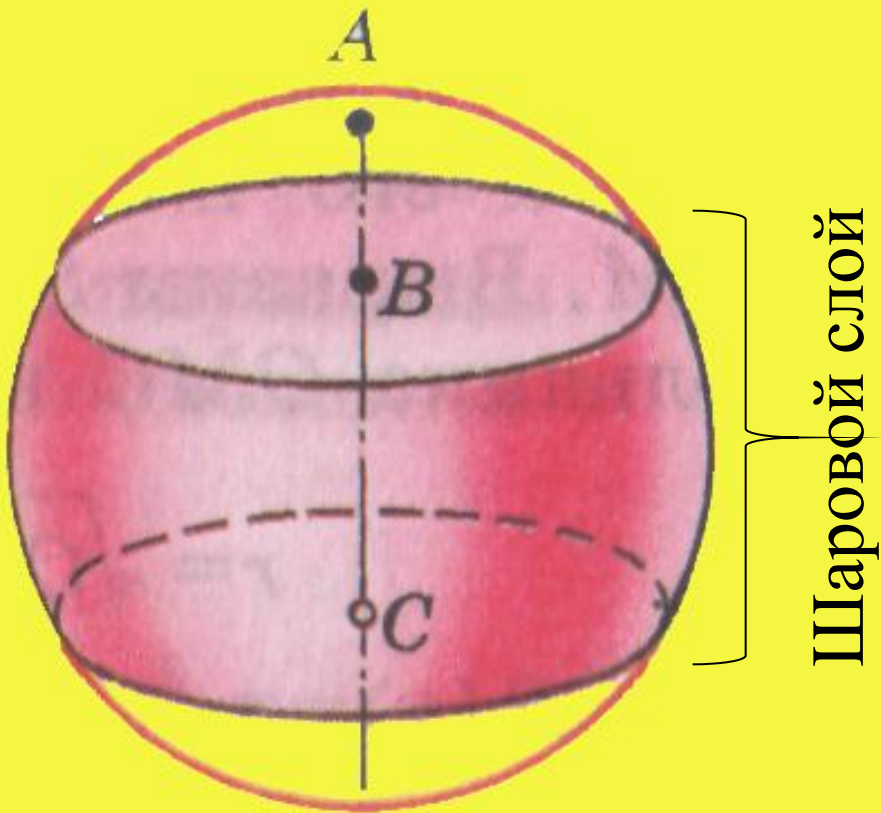
# Шаровой сегмент



*Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью.*



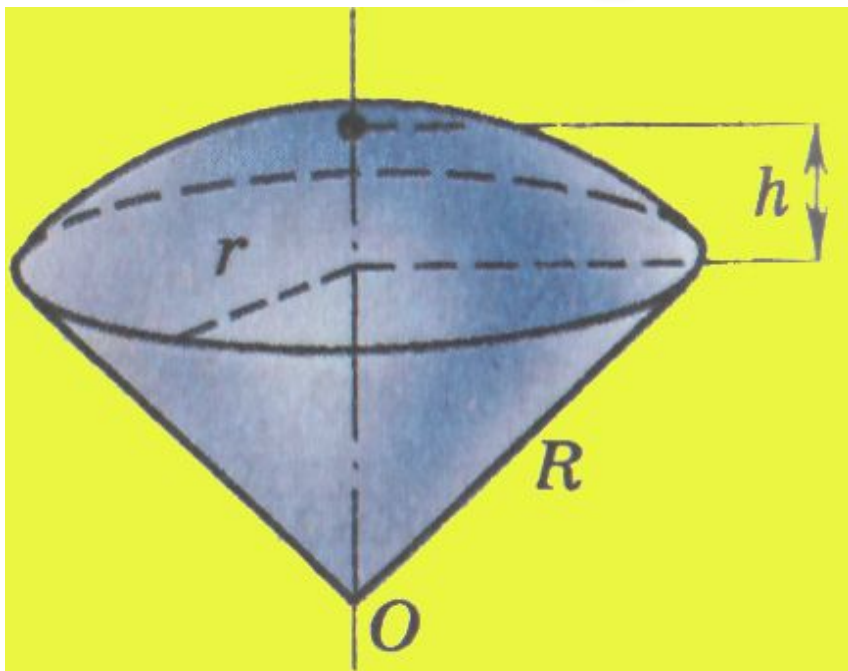




**Шаровым слоем называется часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями.**

**Шаровой слой**

# Шаровой сектор

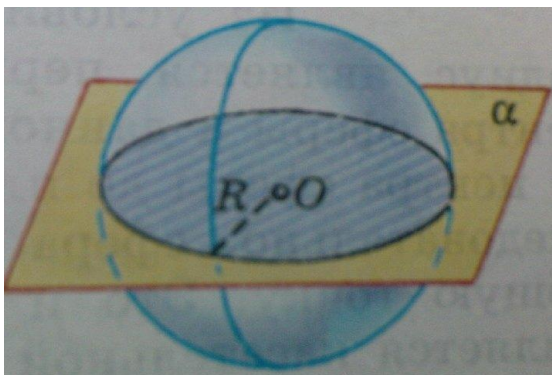
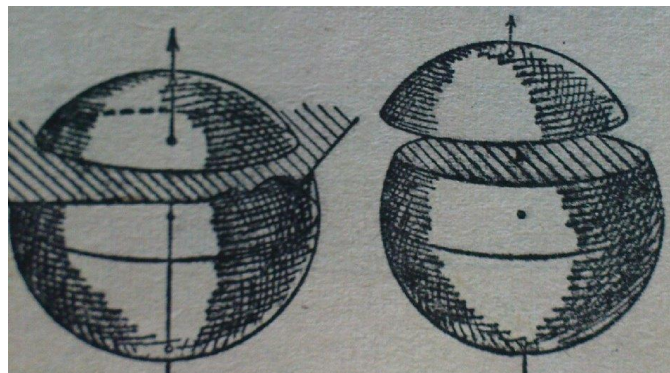


Шаровой сектор

Шаровым сектором называется тело, полученное вращением кругового сектора с углом, меньшим  $90^0$ , вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов.



# Сечение шара



- Плоскость, проходящая через центр шара, называется диаметральной плоскостью.
- Сечение шара диаметральной плоскостью называется большим кругом, а сечение сферы - большой окружностью.

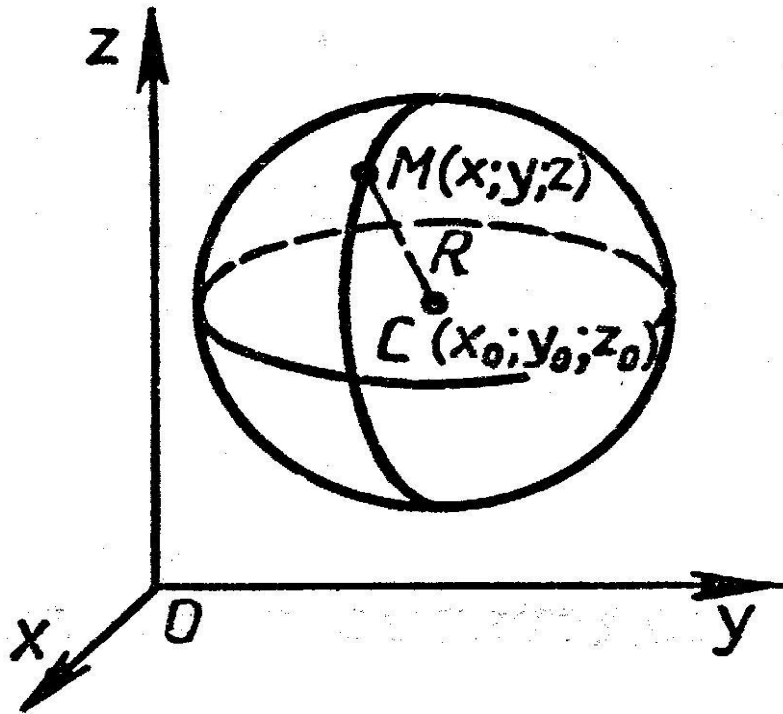


# Закрепляем

- Решите задачу № 573, №574 (а)



# Уравнение сферы в прямоугольной системе координат



$M(x; y; z)$ -произвольная точка, принадлежащая сфере.

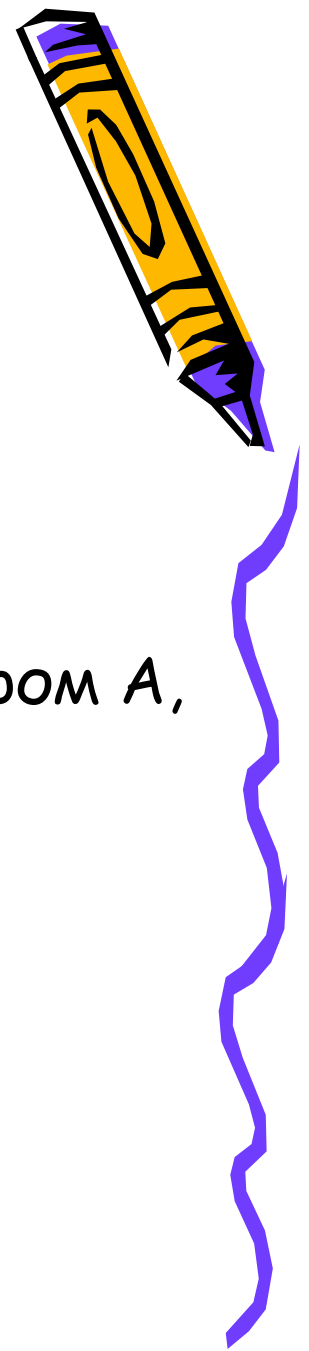
$$|MC| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

т.к.  $MC=R$ , то

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$



# Задание



1. Найдите координаты центра и радиуса сферы, заданной уравнением:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 49$$

$$(X-3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 2$$

2. Напишите уравнение сферы радиуса  $R$  с центром  $A$ , если

$$A(2; -4; 7) \quad R=3$$

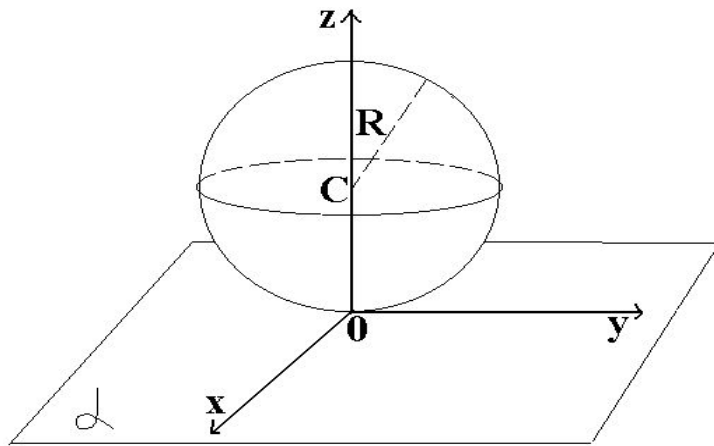
$$A(0; 0; 0) \quad R=\sqrt{2}$$

$$A(2; 0; 0) \quad R=4$$

3. Решите задачу №577(а)

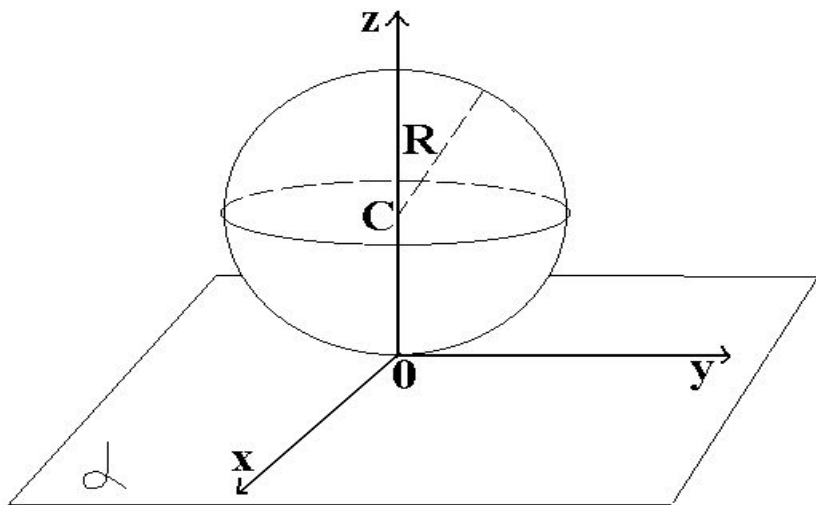


# Взаимное расположение сферы и плоскости



- Обозначим радиус сферы буквой  $R$ , а расстояние от ее центра до плоскости  $\alpha$  - буквой  $d$ .
- Введем систему координат так, чтобы плоскость  $Oxy$  совпадала с плоскостью  $\alpha$ , а центр  $C$  сферы лежал на положительной полуоси  $Oz$ .





В этой системе  
координат точка  $C$  ( $0;$   
 $0;d$ ),  
поэтому сфера имеет  
уравнение

$$x^2+y^2+(z-d)^2=R^2$$

Плоскость  
совпадает с  
координатной  
плоскостью  $Oxy$ , и  
поэтому ее  
уравнение имеет вид  
 $z=0$

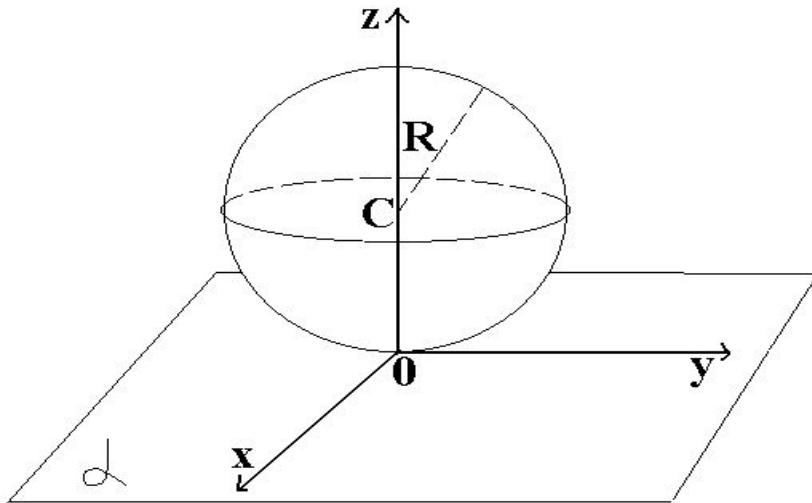






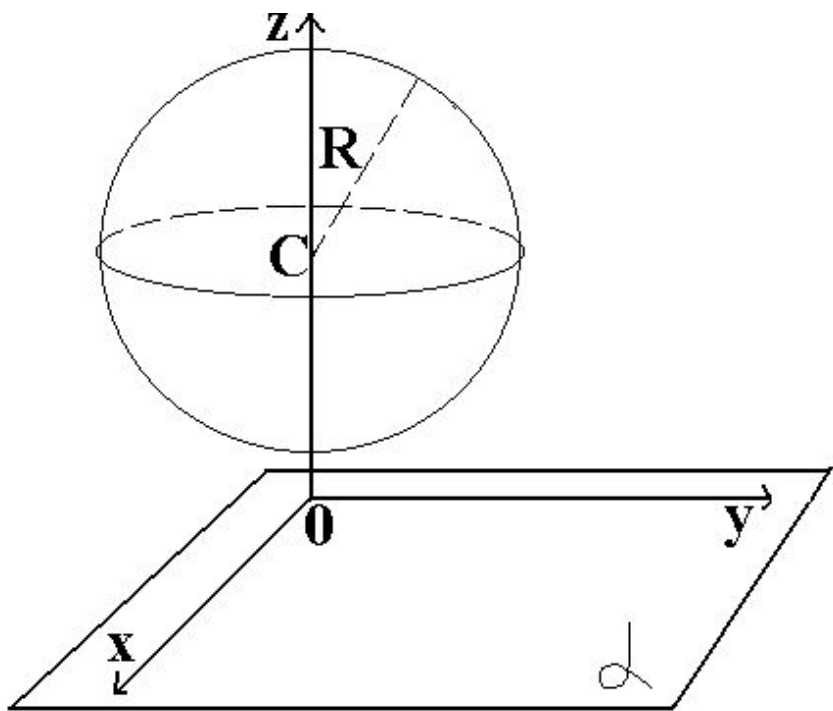
- Таким образом вопрос о взаимном расположении сферы и плоскости сводится к исследованию системы уравнений.

$$\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2+(z-d)^2=R^2 \end{cases}$$



- Подставив  $z=0$  во второе уравнение, получим  $x^2+y^2=R^2-d^2$
- Возможны 3 случая:

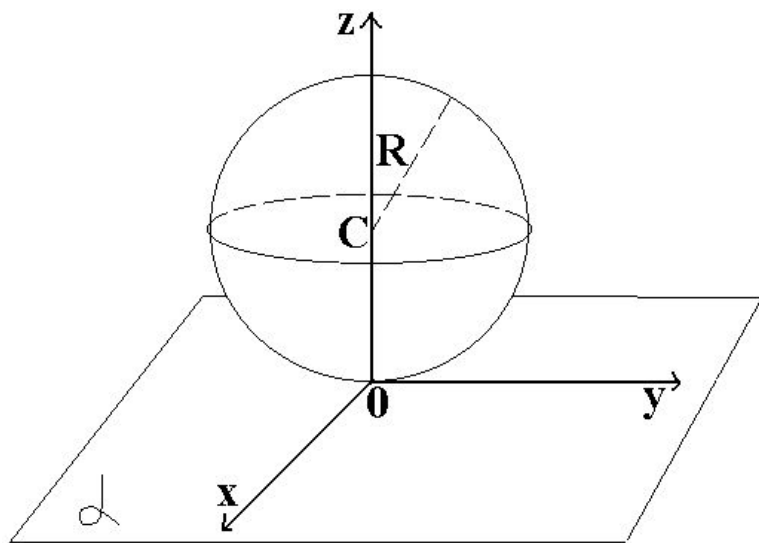




$$x^2 + y^2 = R^2 - d^2$$

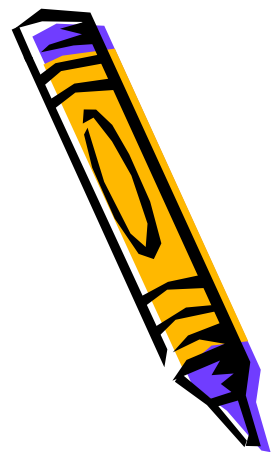
Если  $d > R$ , то сфера  
и плоскость не  
имеют общих  
точек.

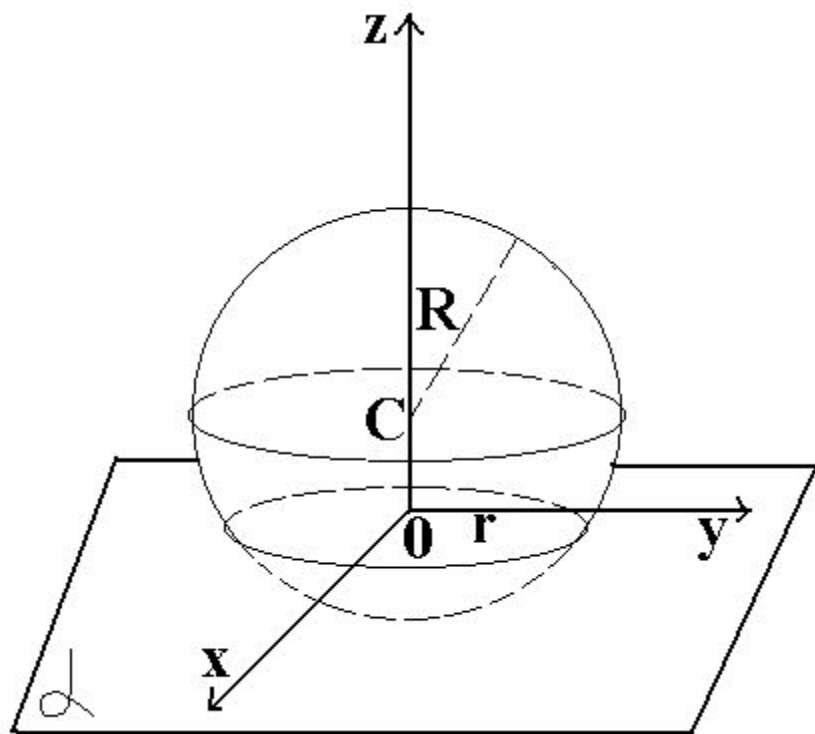




$$x^2 + y^2 = R^2 - d^2$$

Если  $d=R$ , то сфера и плоскость именуют только одну общую точку. В этом случае  $a$  называют касательной плоскостью к сфере





$$x^2 + y^2 = R^2 - d^2$$

Если  $d < R$ , то плоскость  
а и сфера  
пересекаются по  
окружности. Сечение  
шара плоскостью  
есть круг. Если  
секущая плоскость  
проходит через центр  
шара, то в сечении  
получается круг  
радиуса  $R$ .  
Такой круг  
называется **большим**  
**кругом шара**.

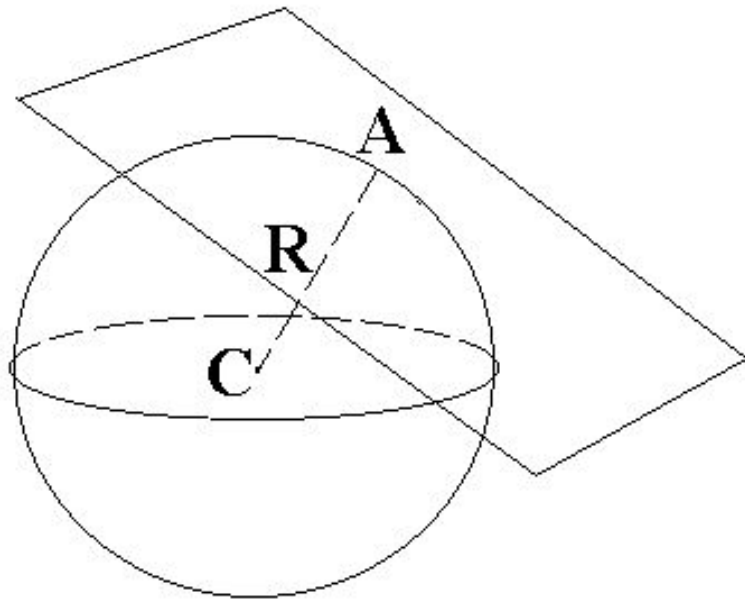


# Закрепляем

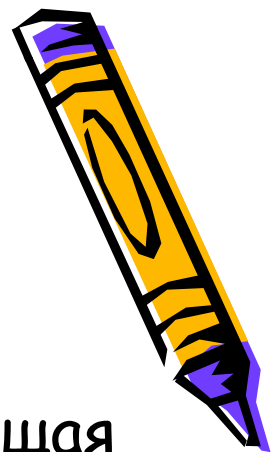
- Решите задачу №580, №581



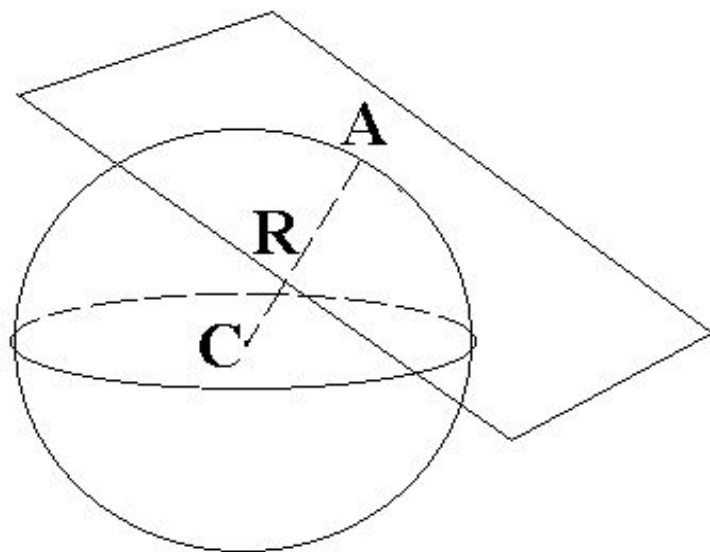
# Касательная плоскость к сфере



- Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется **касательной плоскостью к сфере**,
- а их общая точка называется **точкой касания A** плоскости и сферы.



# Теорема:



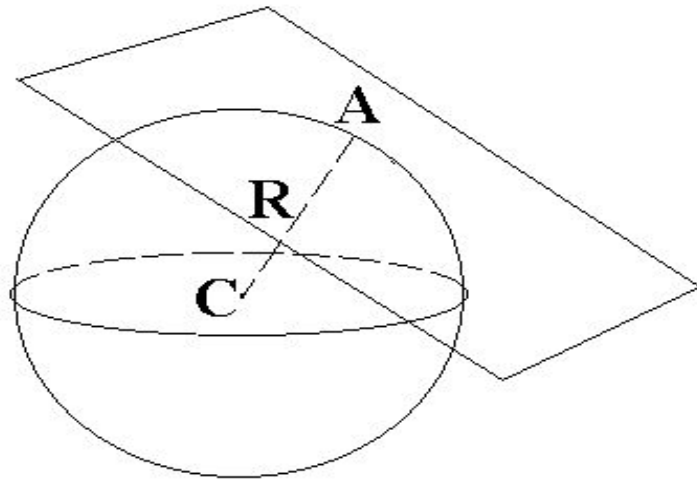
Доказательство:

Рассмотрим плоскость  $a$ , касающуюся сферы с центром  $O$  в точке  $A$ . Докажем, что  $OA$  перпендикулярен  $a$ .

Предположим, что это не так. Тогда радиус  $OA$  является наклонной к плоскости  $a$ , и, следовательно расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы. Поэтому сфера и плоскость пересекаются по окружности. Это противоречит тому, что касательная, т.е. сфера и плоскость имеют только одну общую точку.

Полученное противоречие доказывает, что  $OA$  перпендикулярен  $a$ .





- Обратная теорема:  
Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.





# Закрепляем

- Решите задачу № 592



# Площадь сферы



Сферу нельзя развернуть на плоскость!

**Описанным** около сферы **многогранником** называется многогранник, всех граней которого касается сфера.

**Сфера** называется **вписанной** в многогранник

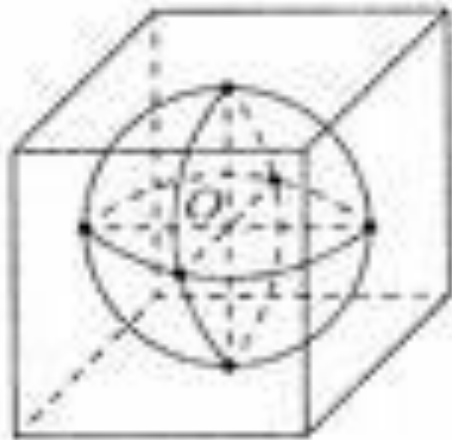
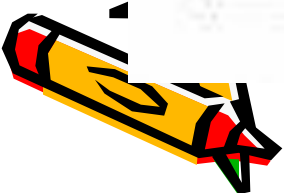


Рис. 43

$$S = 4\pi R^2$$



Задание: Площадь сечения сферы, проходящего через её центр, равна  $9\text{ м}^2$ .  
Найдите площадь сферы.



Решение:

Сечение, проходящее через центр сферы есть окружность.

$$S_{\text{сеч}} = \pi r^2,$$

$$9 = \pi R^2,$$

$$R = \sqrt{9/\pi}.$$

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2,$$

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi \cdot \frac{9}{\pi} = 36\text{ м}^2$$

