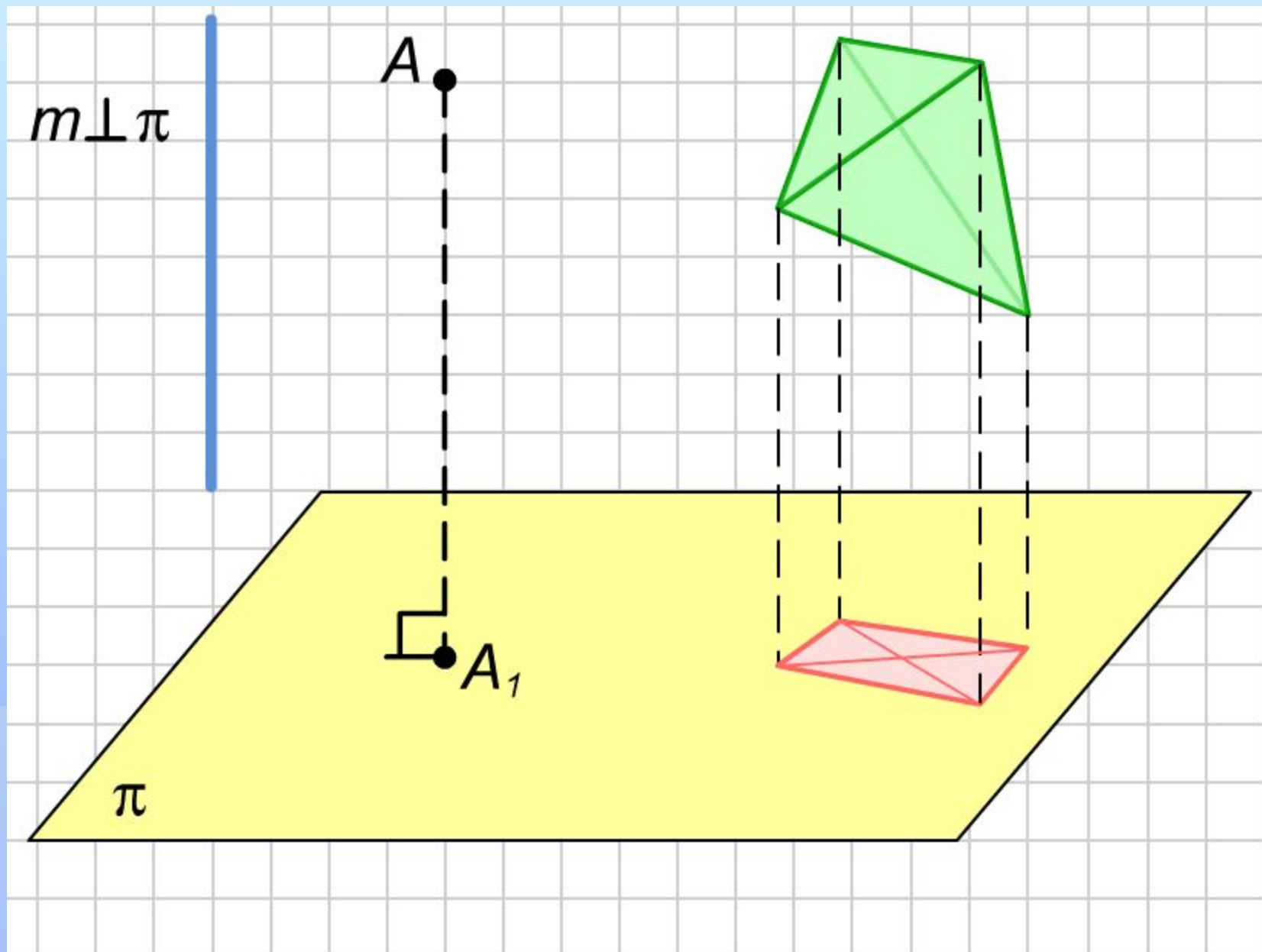


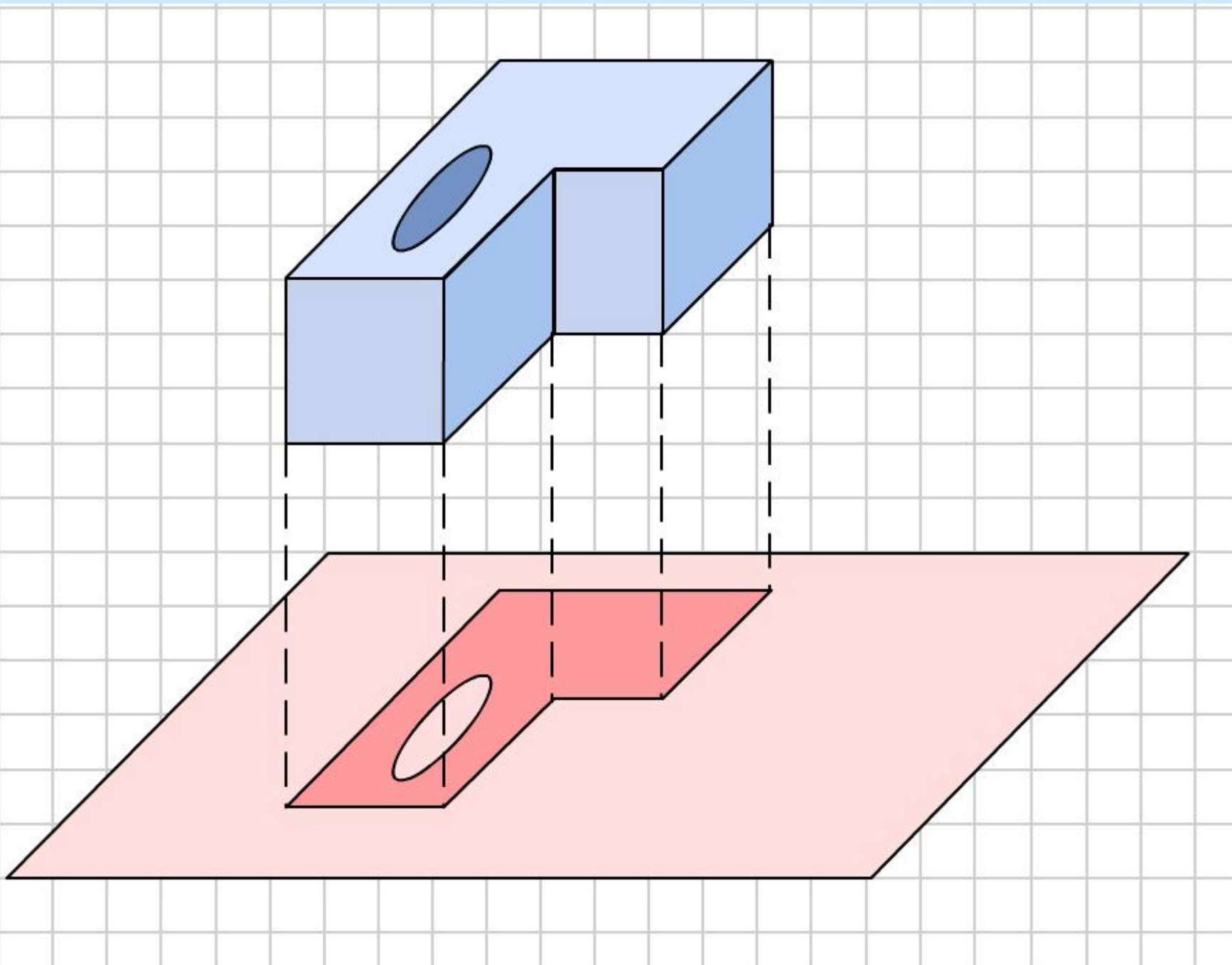
# Перпендикуляр и наклонная

**На одном из предыдущих уроков вы познакомились с понятием проекции точки на данную плоскость параллельно данной прямой.**

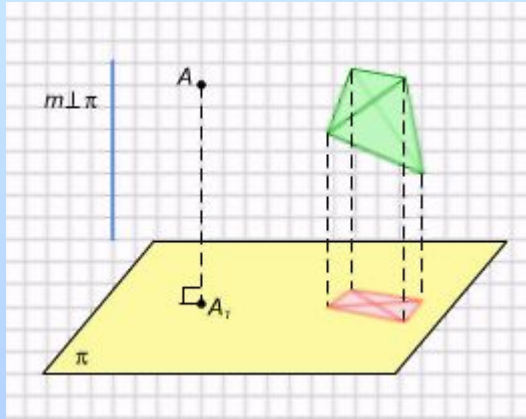
**На этом уроке вы продолжите изучение прямых и плоскостей; узнаете, как находится угол между прямой и плоскостью. Вы познакомитесь с понятием ортогональной проекции на плоскость и рассмотрите ее свойства. На уроке будут даны определения расстояния от точки до плоскости и от точки до прямой, угла между прямой и плоскостью. Будет доказана знаменитая теорема о трех перпендикулярах.**



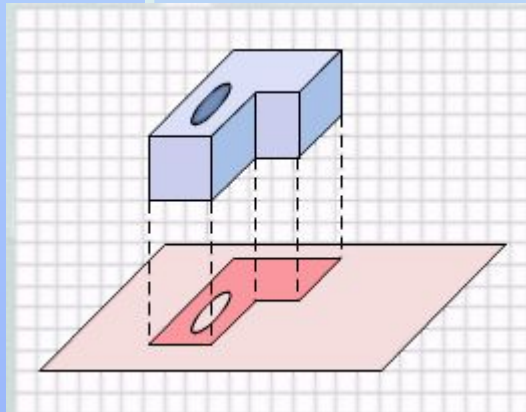
Ортогональная проекция точки и фигуры.



# Ортогональная проекция



Ортогональная проекция точки и фигуры.



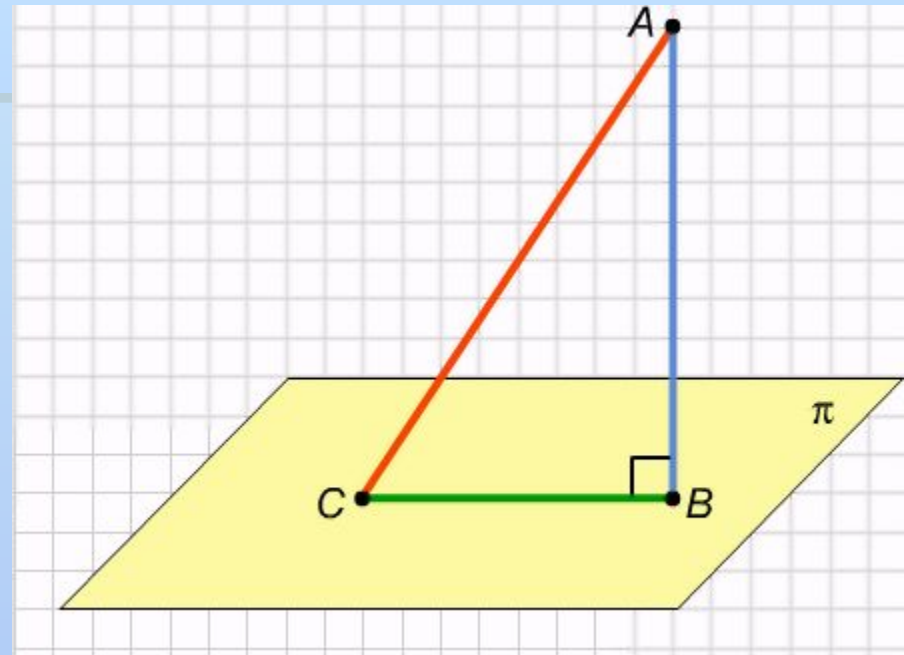
Ортогональная проекция детали.

*Ортогональной проекцией* точки  $A$  на данную плоскость называется проекция точки на эту плоскость параллельно прямой, перпендикулярной этой плоскости. *Ортогональная проекция фигуры* на данную плоскость  $p$  состоит из ортогональных проекций на плоскость  $p$  всех точек этой фигуры. Ортогональная проекция часто используется для изображения пространственных тел на плоскости, особенно в технических чертежах. Она дает более реалистичное изображение, чем произвольная параллельная проекция, особенно круглых тел.

## Перпендикуляр и наклонная

Пусть через точку  $A$ , не принадлежащую плоскости  $\pi$ , проведена прямая, перпендикулярная этой плоскости и пересекающая ее в точке  $B$ . Тогда отрезок  $AB$  называется *перпендикуляром*, опущенным из точки  $A$  на эту плоскость, а сама точка  $B$  — основанием этого перпендикуляра. Любой отрезок  $AC$ , где  $C$  — произвольная точка плоскости  $\pi$ , отличная от  $B$ , называется *наклонной* к этой плоскости.

Заметим, что точка  $B$  в этом определении является ортогональной проекцией точки  $A$ , а отрезок  $AC$  — ортогональной проекцией наклонной  $AB$ . Ортогональные проекции обладают всеми свойствами обычных параллельных проекций, но имеют и ряд новых свойств.



Перпендикуляр и наклонная.

## Свойства ортогональной проекции

Пусть из одной точки к плоскости проведены перпендикуляр и несколько наклонных. Тогда справедливы следующие утверждения.

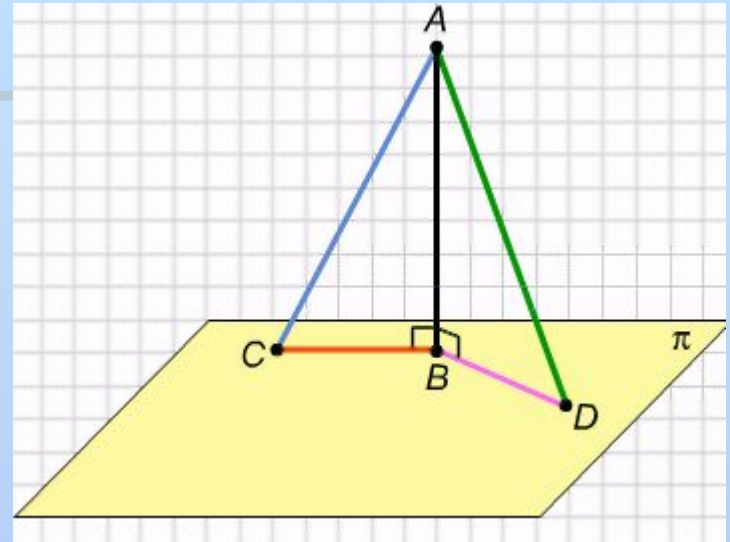
1. Любая наклонная длиннее как перпендикуляра, так и ортогональной проекции наклонной на эту плоскость.
2. Равные наклонные имеют и равные ортогональные проекции, и наоборот, наклонные, имеющие равные проекции, также равны.
3. Одна наклонная длиннее другой тогда и только тогда, когда ортогональная проекция первой наклонной длиннее ортогональной проекции второй наклонной.

# Свойства ортогональной проекции

## Доказательство.

Пусть из точки  $A$  к плоскости  $\rho$  проведены перпендикуляр  $AB$  и две наклонные  $AC$  и  $AD$ ; тогда отрезки  $BC$  и  $BD$  — ортогональные проекции этих отрезков на плоскость  $\rho$ .

Докажем первое утверждение: любая наклонная длиннее как перпендикуляра, так и ортогональной проекции наклонной на эту плоскость. Рассмотрим, например, наклонную  $AC$  и треугольник  $ABC$ , образованный перпендикуляром  $AB$ , этой наклонной  $AC$ , и ее ортогональной проекцией  $BC$ . Этот треугольник прямоугольный с прямым углом в вершине  $B$  и гипотенузой  $AC$ , которая, как мы знаем из планиметрии, длиннее каждого из катетов, т.е. и перпендикуляра  $AB$ , и проекции  $BC$ .

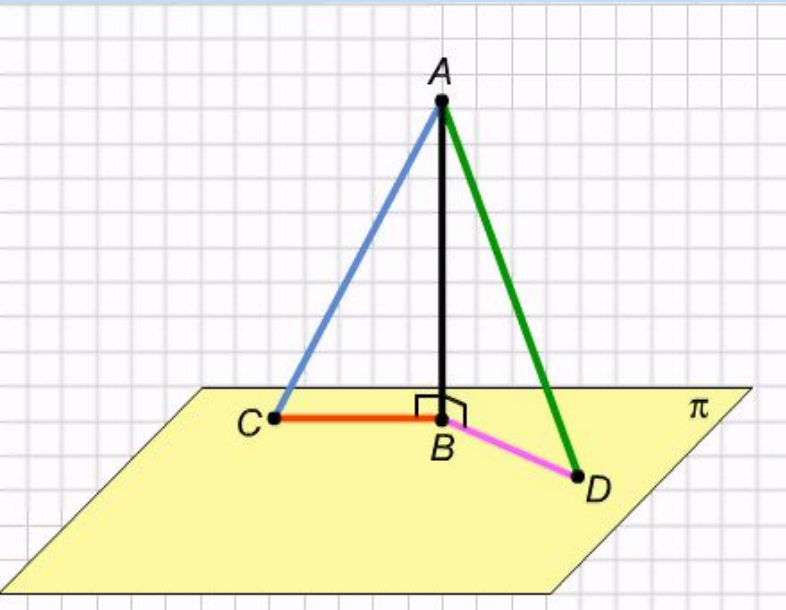


Из точки  $A$  к плоскости  $\rho$  проведены перпендикуляр  $AB$  и две наклонные  $AC$  и  $AD$ .



# Свойства ортогональной проекции

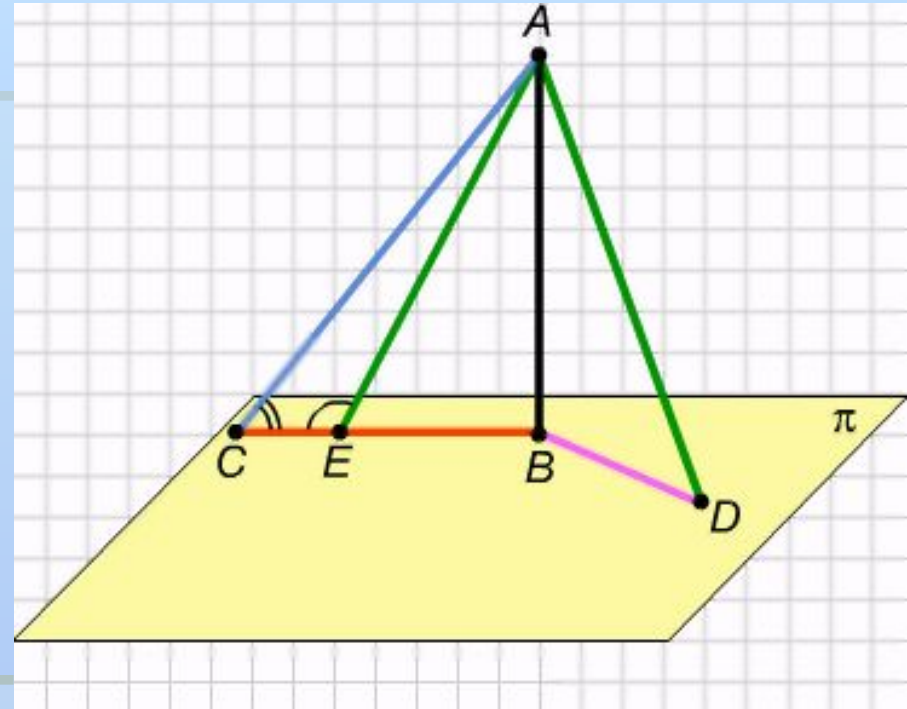
Теперь докажем второе утверждение, а именно: равные наклонные имеют и равные ортогональные проекции, и наоборот, наклонные, имеющие равные проекции, также равны. Рассмотрим прямоугольные треугольники  $ABC$  и  $ABD$ . Они имеют общий катет  $AB$ . Если наклонные  $AC$  и  $AD$  равны, то прямоугольные треугольники  $ABC$  и  $ABD$  равны по катету и гипотенузе, и тогда  $BC=BD$ . Обратно, если равны проекции  $BC$  и  $BD$ , то эти же треугольники равны по двум катетам, и тогда у них равны и гипотенузы  $AC$  и  $AD$ .



Треугольники  $ABC$  и  $ABD$  равны по катету и гипотенузе.

# Свойства ортогональной проекции

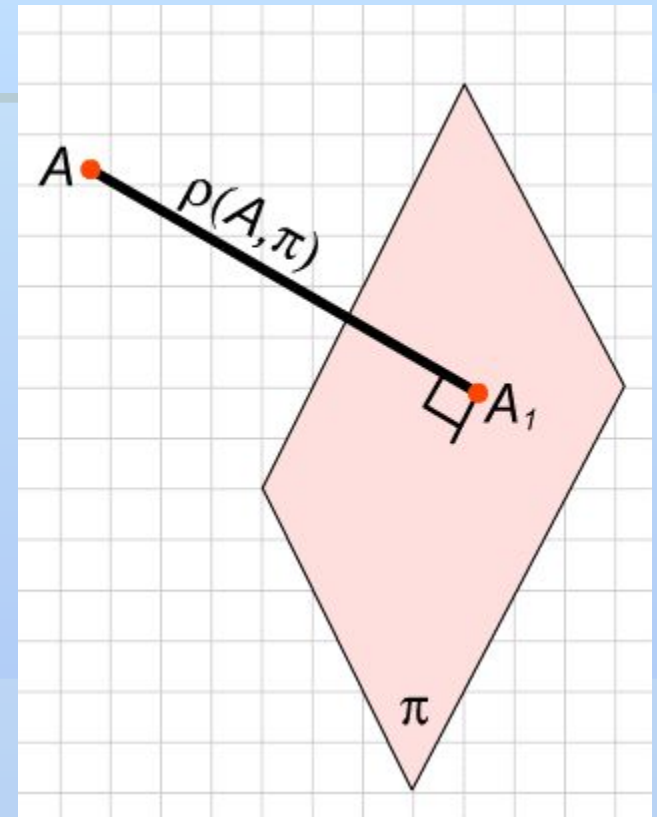
Докажем третье утверждение: одна наклонная длиннее другой тогда и только тогда, когда ортогональная проекция первой наклонной длиннее ортогональной проекции второй наклонной. Пусть, например,  $BC > BD$ . Отложим на отрезке  $BC$  точку  $E$  такую, что  $BD = BE$ . Тогда и  $AD = AE$ . В треугольнике  $ACE$  угол  $AEC$  тупой и поэтому больше угла  $ACE$ , следовательно, сторона  $AC$  больше стороны  $AE$ , равной  $AD$ .  
Обратно, пусть  $AC > AD$ . Возможны три случая: а)  $BC = BD$ ; б)  $BC < BD$ ; в)  $BC > BD$ . Если  $BC = BD$ , то по доказанному выше в пункте 2,  $AC = AD$ , что противоречит условию. Если  $BC < BD$ , как мы только что доказали,  $AC < AD$ , что опять противоречит условию. Остается третья возможность:  $BC > BD$ . Теорема доказана.



Если  $BC$  больше  $BD$ , то  $AC$  больше стороны  $AE$ , равной  $AD$ .

# Расстояние от точки до плоскости

Расстоянием от точки до плоскости (не проходящей через эту точку) называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на эту плоскость. Из теоремы о свойствах ортогональной проекции следует, что расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\rho$  равно наименьшему расстоянию от точки  $A$  до точек этой плоскости.



## Свойство расстояний от разных точек до плоскости

Замечание 1 (свойство расстояния от разных точек до плоскости).

Пусть две точки  $A$  и  $B$  не принадлежат плоскости  $\pi$ , а прямая  $AB$  пересекает плоскость  $\pi$  в точке  $C$ . Тогда расстояния от точек  $A$  и  $B$  до плоскости  $\pi$  относятся как отрезки  $AC$  и  $BC$ :

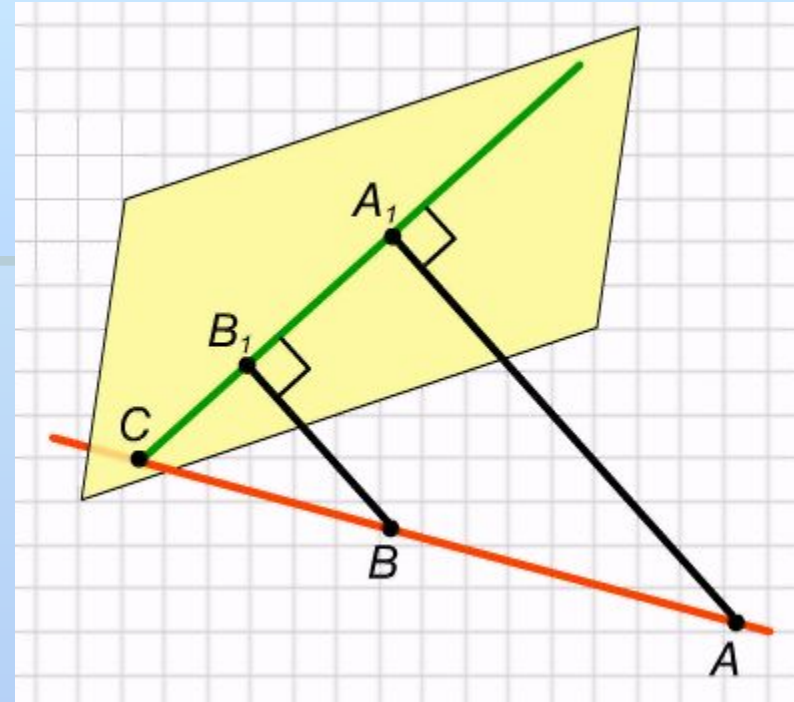
$$\frac{\rho(A, \pi)}{\rho(B, \pi)} = \frac{AC}{BC}.$$

## Доказательство:

Рассмотрим два случая. В случае 1 точки  $A$  и  $B$  находятся по одну сторону от плоскости  $\pi$ .

Рассмотрим ортогональные проекции точек  $A$  и  $B$  на плоскость — точки  $A_1$  и  $B_1$  соответственно. Тогда прямая  $A_1B_1$  является ортогональной проекцией прямой  $AB$  и проходит через точку  $C$ . В плоскости  $\pi$ , проходящей через прямые  $AB$  и  $A_1B_1$ , прямоугольные треугольники  $AA_1C$  и  $BB_1C$  подобны, и поэтому их катеты пропорциональны гипотенузам:

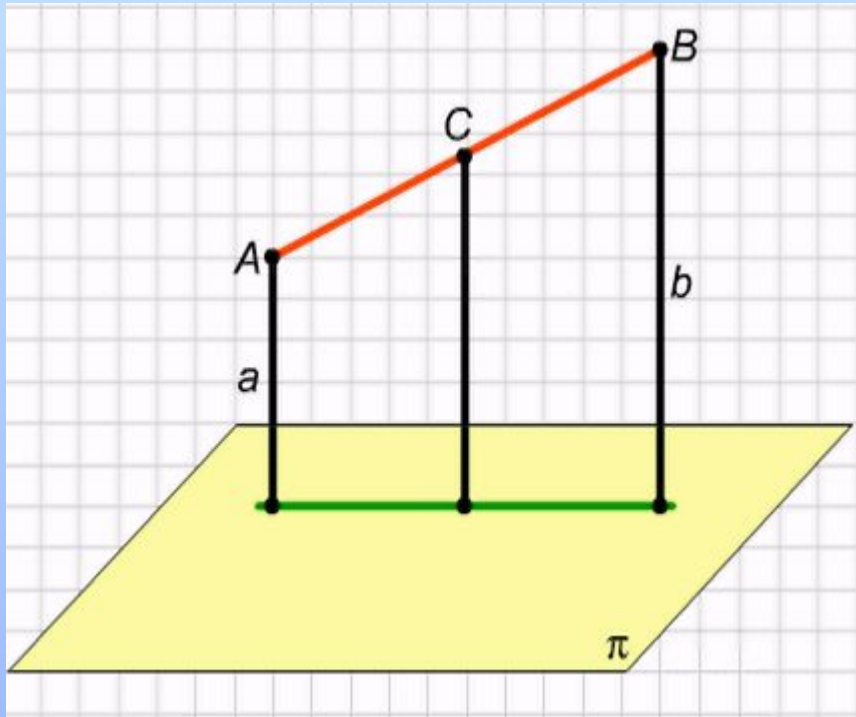
$$\frac{\rho(A, \pi)}{\rho(B, \pi)} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AC}{BC}.$$



Прямоугольные треугольники  $AA_1C$  и  $BB_1C$  подобны.

Случай 2, когда точки  $A$  и  $B$  расположены по разную сторону от плоскости, разберите самостоятельно. Замечание 1 доказано.

# Свойство расстояния от середины отрезка до плоскости



Точки A и B расположены по одну сторону от плоскости π, если точки A и B расположены по одну сторону от плоскости π

Замечание 2 (свойство расстояния от середины отрезка до плоскости). Пусть расстояния от точек A и B до плоскости π равны a и b соответственно. Тогда расстояние от середины C отрезка AB до этой плоскости равно:

$$\frac{a + b}{2},$$

если точки A и B расположены по одну сторону от плоскости π;

$$\frac{|a - b|}{2},$$

если точки A и B расположены по разные стороны от плоскости π

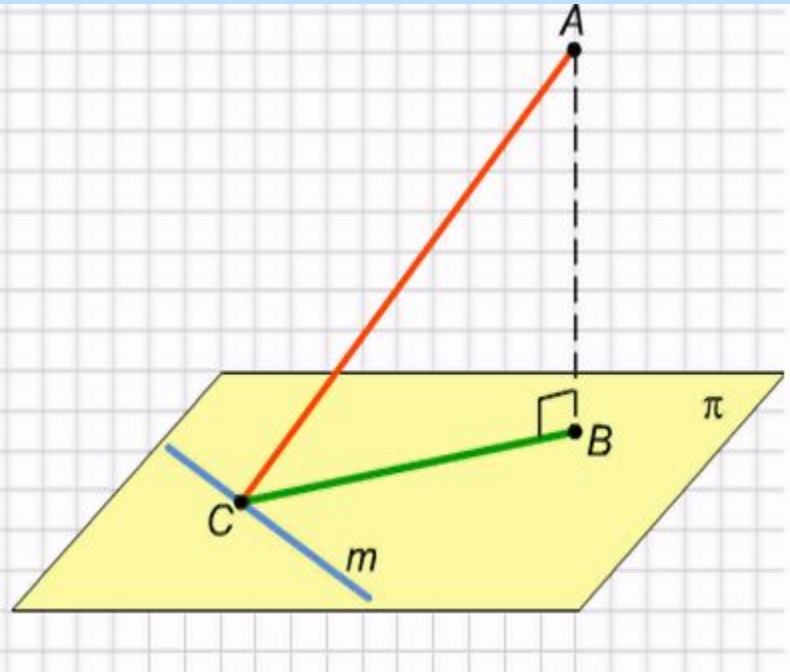
# Теорема о трех перпендикулярах

Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ее ортогональной проекции.

Доказательство.

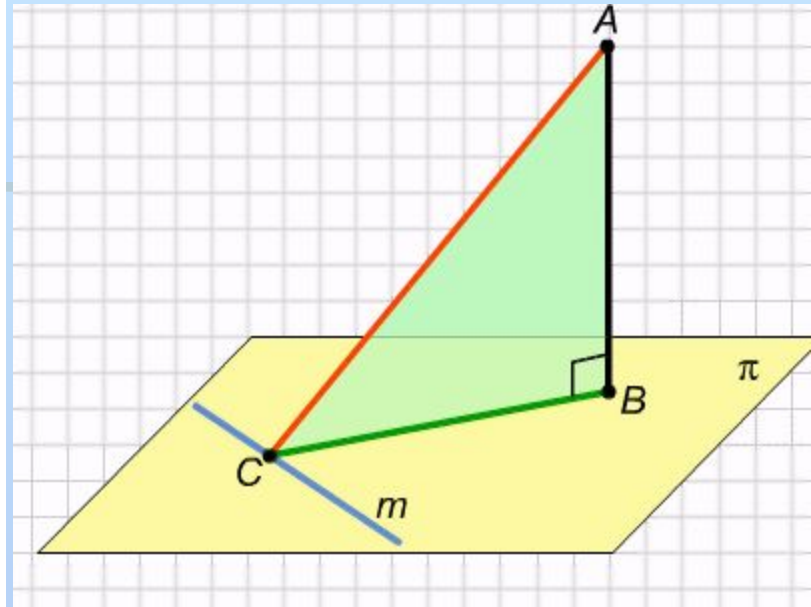
Пусть даны плоскость  $\pi$ , перпендикуляр  $AB$  на эту плоскость, наклонная  $AC$ , и прямая  $m$  в плоскости  $\pi$ . Нам надо доказать два взаимно обратных утверждения. Первое утверждение: если прямая  $m$  перпендикулярна наклонной  $AC$ , то она перпендикулярна и ее ортогональной проекции  $BC$ . И обратно: если прямая  $m$  перпендикулярна ортогональной проекции  $BC$ , то она перпендикулярна и наклонной  $AC$ .

Перпендикуляр  $AB$  к плоскости  $\pi$ , наклонная  $AC$  и прямая  $m$  в плоскости  $\pi$ .



Докажем, что если прямая  $t$  перпендикулярна наклонной  $AC$ , то она перпендикулярна и ее ортогональной проекции  $BC$ . Пусть  $t \perp AC$ . Прямая  $AB$  перпендикулярна плоскости, значит, она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости, в частности, прямой  $t$ . Следовательно, прямая  $t$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ , так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым в этой плоскости:  $AC$  и  $BC$ . Поэтому прямая  $t$  перпендикулярна любой прямой плоскости  $ABC$ , в частности, проекции  $BC$ .

Доказательство обратного утверждения полностью аналогично: если  $t \perp BC$ , то прямая  $t$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ , так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым в этой плоскости:  $AB$  и  $BC$ . Поэтому прямая  $t$  перпендикулярна любой прямой плоскости  $ABC$ , в частности, наклонной  $AC$ . Теорема доказана.

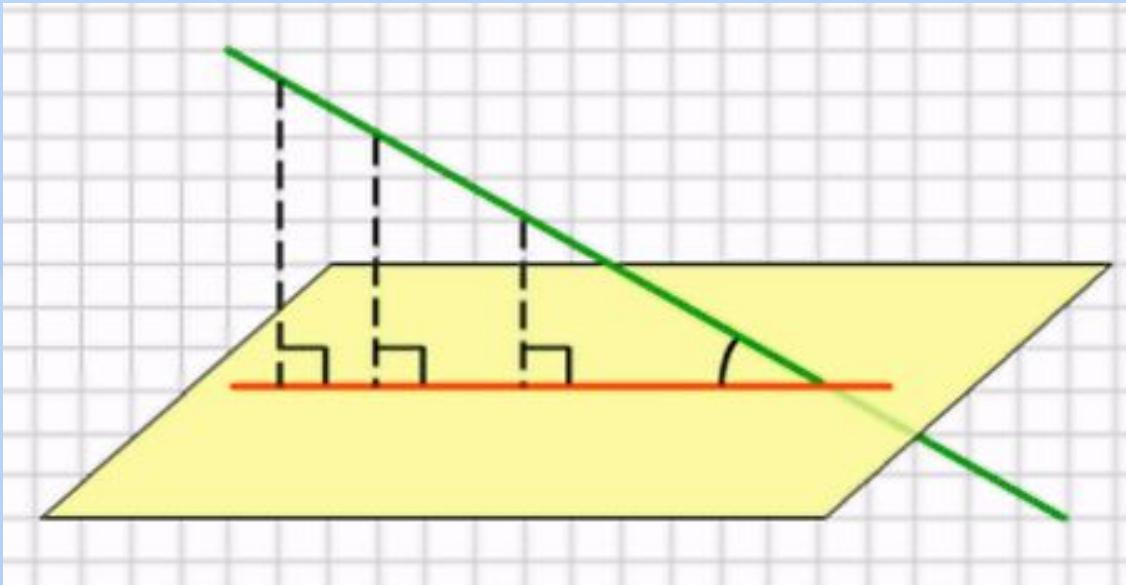


**Прямая  $t$   
перпендикулярна  
плоскости  $ABC$ .**



## Угол между наклонной и плоскостью

Пусть даны плоскость и наклонная прямая. *Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.* Если прямая параллельна плоскости, то угол между ней и плоскостью считается равным нулю. Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ней и плоскостью прямой, т. е. равен  $90^\circ$ .



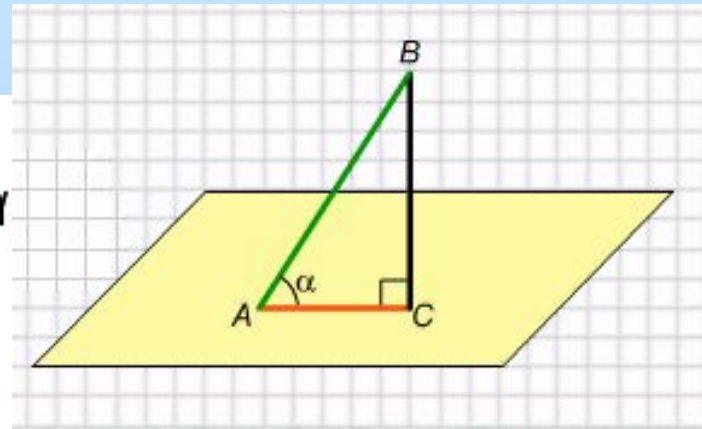
**Угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на плоскость.**

Пусть точка  $A$  принадлежит плоскости, а наклонная  $AB$  образует с этой плоскостью угол  $\alpha$  тогда ортогональная проекция  $AC$  и перпендикуляр  $BC$  на эту плоскость связаны соотношениями:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

$$BC = AB \cdot \sin \alpha, \quad AC = AB \cdot \cos \alpha.$$

Это следует из того, что  $ABC$  — прямоугольный треугольник и  $\angle BAC = \alpha$ . Последняя формула верна и для произвольного отрезка прямой, пересекающей плоскость.



**Перпендикуляр, наклонная и ее ортогональная проекция образуют прямоугольный треугольник.**

**Автор: Аверкина Т.П., учитель МОУ «Тархановская СОШ»  
Ичалковского района РМ**