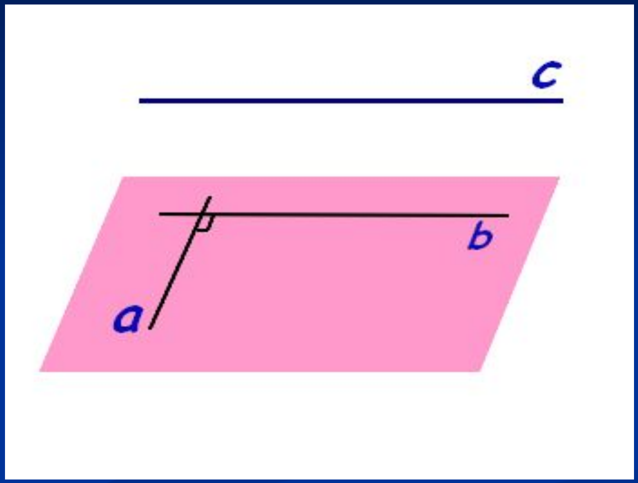
Перпендикулярность прямой и плоскости

Перпендикулярные прямые в пространстве

Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°. Перпендикулярность прямых a и b обозначается так: a ⊥b. Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.

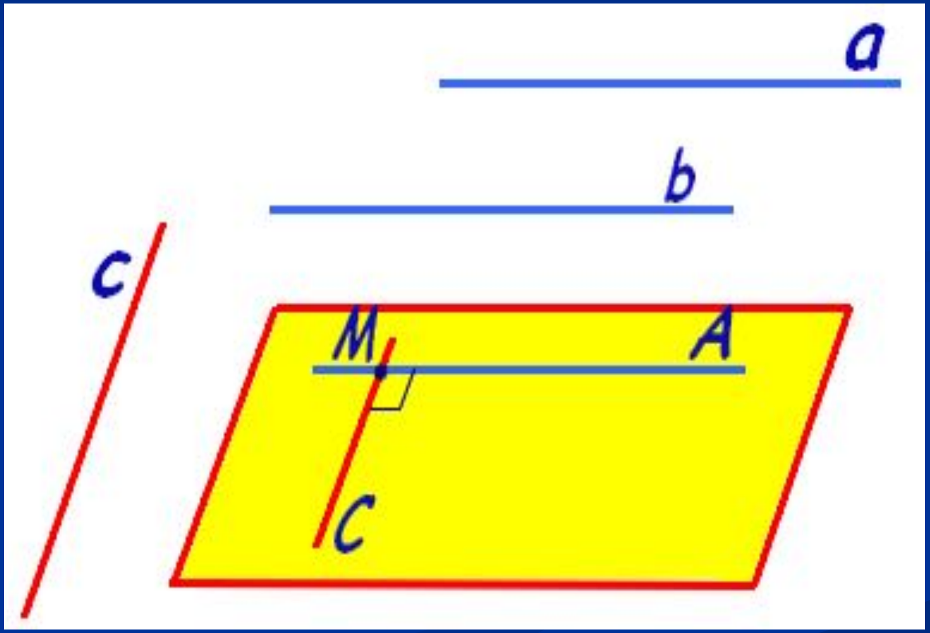


На этом рисунке перпендикулярные прямые *a* и *b* пересекаются, а перпендикулярные прямые *a* и *c* скрещивающиеся

Лемма

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к этой прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой

Дано: $a \parallel b$ и $a \perp$ с.
Доказать: $b \perp c$.
Доказательство:
Через произвольную точку М пространства, не лежащую на данных прямых, проведём прямые a и c. Т.к. $a \perp c$, то $\angle AMC = 90°$
Т.к. $a \parallel b$, $a \parallel MA$, то $b \parallel MA$.
Итак, $b \parallel MA$, $c \parallel MC$,
$\angle AMC = 90°$, т. е. $b \perp c$.
Лемма доказана.



Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости

Прямая называется *перпендикулярной к плоскости*, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Перпендикулярность прямой *a* и плоскости α обозначается так: $a \perp \alpha$.

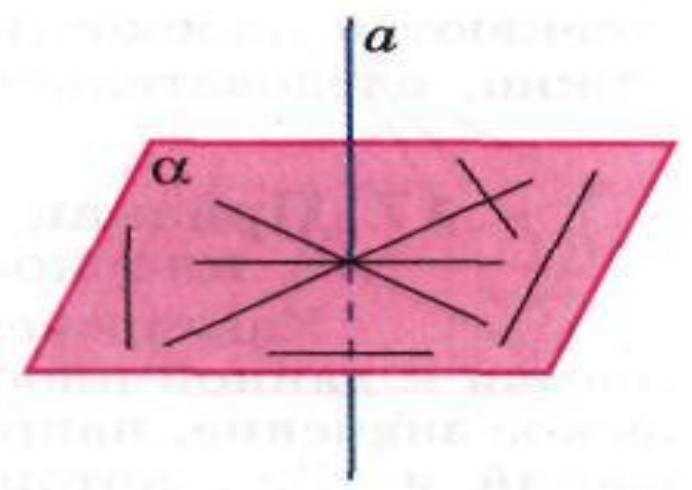


Рис. 45

Теорема: Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

Дано: $a \parallel a_1$, $a \perp \alpha$.

Доказать: $a_1 \parallel \alpha$

Доказательство:

Проведем какую-нибудь прямую x в плоскости α. Так как а перпендикулярна α, то а перпендикулярна *x. По* лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей a_1 перпендикулярна *x.* Таким образом, прямая a_1 перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α, т. е. a_1 перпендикулярна α. Теорема доказана.

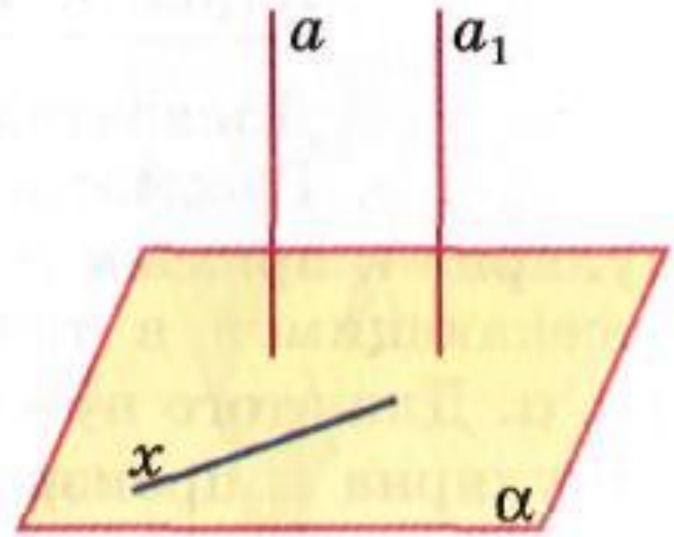


Рис. 46

Теорема: Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

Дано: $a \perp \alpha, b \perp \alpha$ (а)

Доказать : $a \parallel b$.

Доказательство:

Через какую-нибудь точку М прямой *b* проведем прямую b_1, параллельную прямой а. По предыдущей теореме $b_1 \perp \alpha$. Докажем ,что прямая b_1 совпадает с прямой *b* .Тем самым будет доказано , что $a \parallel b$.Допустим ,что прямые *b* и b_1 не совпадают **.Тогда в плоскости β, содержащей прямые *b* и b_1, через точку М проходят две прямые, перпендикулярные к прямой *с* ,по которой пересекаются плоскости α и β (б).Но это невозможно, следовательно, $a \parallel b$. Теорема доказана.**

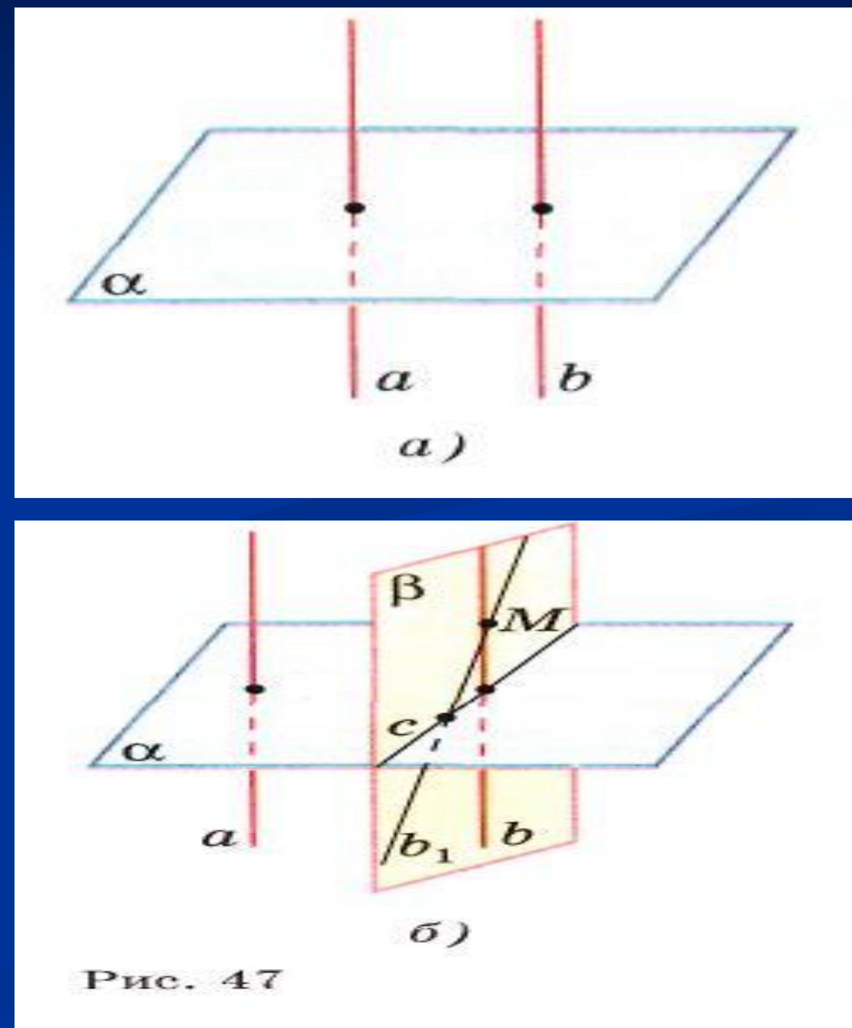


Рис. 47

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Теорема: **Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.**

Дано: $a \perp p$, $a \perp q$, p и q лежат в плоскости α.

$p \cap q = O$. *Доказать:* $a \perp \alpha$

Доказательство:

Рассмотрим случай, когда прямая a проходит через т. O(рис. а). Проведём через т.O прямую l, параллельную прямой m . Отметим на прямой a точки A и B, чтобы AO=OB, и проведём в плоскости α прямую, пересекающие прямые p, q, и l соответственно в т. P, Q, и L.

Т.к. p и q – серединные перпендикуляры к отрезку AB, то AP=BP и AQ=BQ. Следовательно, $\Delta APQ = \Delta BPQ$ по трём сторонам, поэтому углы APQ и BPQ равны

$\Delta APL = \Delta BPL$, поэтому AL=BL. Следовательно ΔABL-равнобедренный и $l \perp a$. Т.к. $l \parallel m$, $l \perp a$, то $m \perp a$. Итак $a \perp \alpha$.

Рассмотрим случай, когда прямая a не проходит через т.O. Проведём через т.O прямую a, $a_1 \parallel a$. По лемме

$a_1 \perp p$ и $a_1 \perp q$, поэтому $a_1 \perp \alpha$. Отсюда, $a \perp \alpha$.

Теорема доказана.

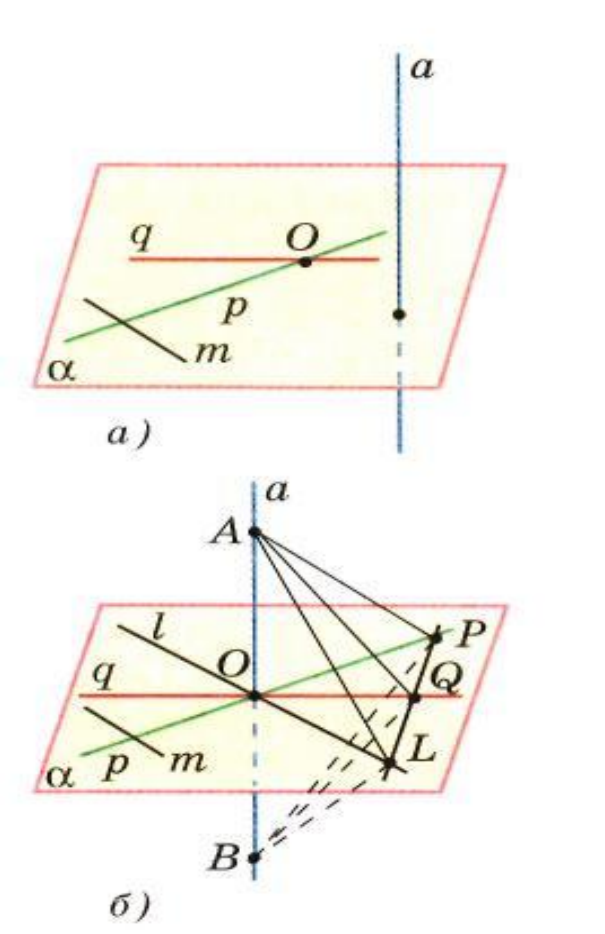


Рис. 48

Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости

Теорема: Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости и притом только одна.

Доказательство: Данную плоскость обозначим α, а произвольную точку пространства — буквой М. *Докажем:* 1) через точку М проходит прямая, перпенди-1ярная к плоскости а; 2) такая прямая только одна.

1) Проведем в плоскости α произвольную прямую *a* и рассмотрим плоскостьβ, проходящую че-; точку *M* и перпендикулярную к прямой *a.* Обозначим буквой *b* прямую, по которой пересекаются плоскости α и β. В плоскости β через точку *M* проведем прямую *c*, перпендикулярную к прямой *b.* Прямая *c и е*сть искомая прямая. В самом деле, она перпендикулярна к плоскости α, т.к. перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости *(c* ⊥*b* по по построению *и c* ⊥*a,* так как (β ⊥ α*).*

2)Предположим, что через точку *M* проходит еще одна прямая (обозначим ее черезc_1), перпендикулярная к плоскости α. Тогда $c_1 \parallel c$, что невозможно, т. к. прямые c_1 и с пересекаются в точке *M.* Т.о., через точку *M* проходит только одна прямая, перпендикулярная плоскостиα. Теорема доказана.

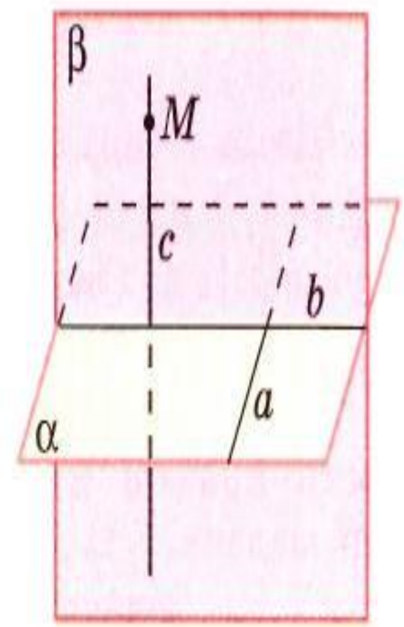


Рис. 50

Авторы:

Александрова Аня 10Б
Васильева Катя 10Б
Васильева Надя 10Б
Гаврилова Настя 10Б
Егорова Люда 10Б

Научный консультант : учитель математики
СОШ №6 г.Чебоксары
Маркова З.Г.
2008г