Презентация по математике

На тему : Площадь криволинейной трапеции.

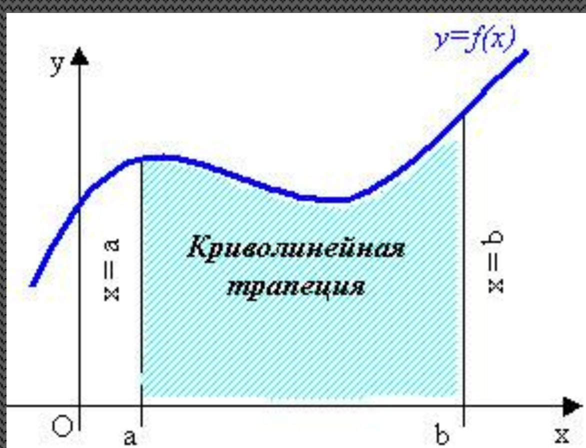
Формула Ньютона-Лейбница

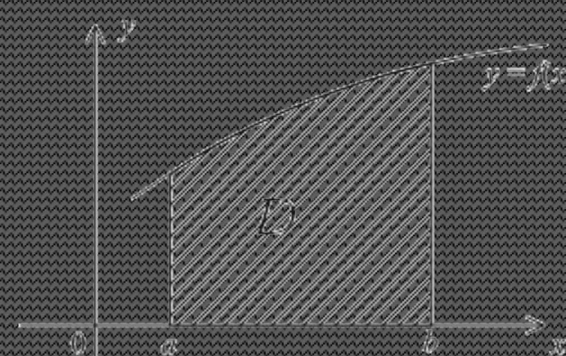
Площадь криволинейной трапеции

Определение:

фигура, ограниченная графиком неотрицательной и непрерывной на отрезке [a; b] функции f, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$.

Изображения криволинейных трапеций:



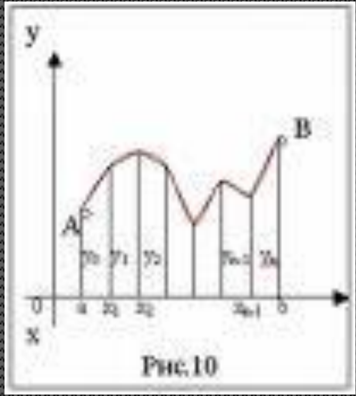


Теорема о вычислении площади криволинейной трапеции

Теорема:

Если f – непрерывная и неотрицательная на отрезке [a; b] функция , а F – ее первообразная на этом отрезке , то площадь S соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке [a; b] , т.е.

$$\boxed{S = F(b) - F(a)}$$



Доказательство

Доказательство : Рассмотрим функцию S(x) , определенную на отрезке [a; b] . Если a < x ≤ b , то S(x) – площадь той части криволинейной трапеции , которая расположена левее вертикальной прямой , проходящей через точку М (x: 0) (рис 2.а)

Если x = a , то S (a) = о . Отметим , что S (b) = S (S – площадь криволинейной трапеции) .
Нам осталось доказать , что $S'(x) = f(x)$ *(2)*
По определению производной
докажем, что $\dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} \to f(x)$ *(3)*
при $\Delta x \to 0$

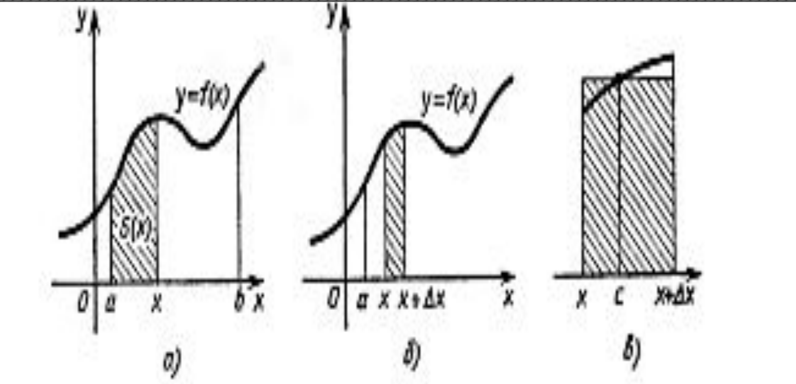


Рис. 2

Доказательство

Выясним геометрический смысл числителя $\Delta S(x)$. Для простоты рассмотрим случай $\Delta x > 0$. Поскольку $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$,

то $\Delta S(x)$ – площадь фигуры , заштрихованной на рисунке 2, б.

Дальнейшее доказательство рассмотрите самостоятельно.

Итак , мы получили, что S есть первообразная для f. Поэтому в силу основного свойства первообразных для всех x, принадлежащих промежутку $[a; b]$. имеем :

$$S(x) = F(x) + C,$$

где C – некоторая постоянная , а F – одна из первообразных для функции F. Для нахождения C подставим $x = a$:

$$F(a) + C = S(a) = 0,$$

откуда $C = -F(a)$. Следовательно ,

$$S(x) = F(x) - F(a). \qquad (4)$$

Поскольку площадь криволинейной трапеции равна $S(b)$, подставляя $x = b$ в формулу (4) , получим:

$$S = S(b) = F(b) - F(a).$$

Пусть на отрезке [a; b] оси Ox задана непрерывная функция f, не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком [a; b] и прямыми x = a и x = b (рис. 1), называют **криволинейной трапецией**. Различные примеры криволинейных трапеций приведены на рисунках 1, а — д.

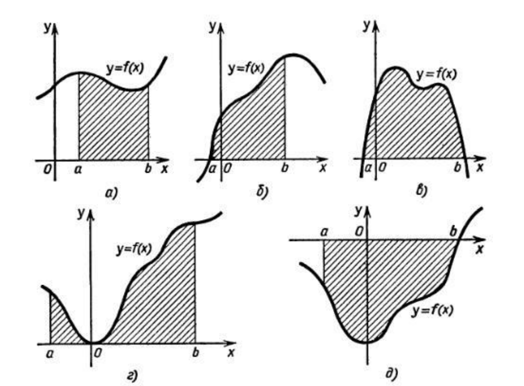


Рис. 1

- Для вычисления площадей криволинейных трапеций применяется следующая теорема:

  Теорема. Если f — непрерывная и неотрицательная на отрезке [a; b] функция, а F — ее первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции (рис. 2) равна приращению первообразной на отрезке [a; b] т. е.

- **S=F(b)-F(a).** (1)
-

  Доказательство. Рассмотрим функцию S (x), определенную на отрезке [a; b]. Если a <x≤b, то S (x) — площадь той части криволинейной трапеции, которая расположена левее вертикальной прямой, проходящей через точку M (x; 0) (рис. 2, а). Если x=a, то S (a) = 0. Отметим, что S(b)=S (S — площадь криволинейной трапеции).

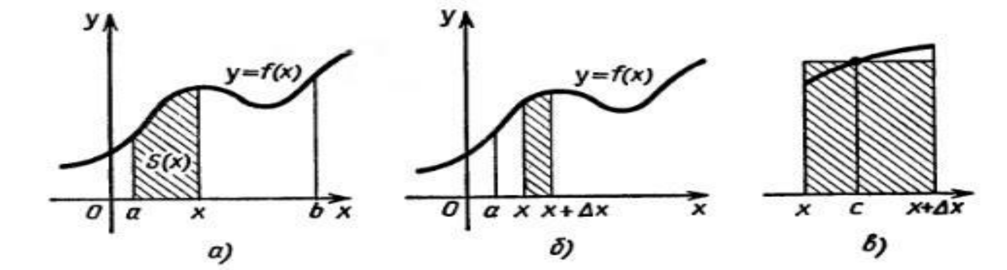


Рис. 2

- Докажем, что
  S'(x)=f(x). (2)

  По определению производной надо доказать, что

- при (3)
- Выясним геометрический смысл числителя Δ S (x). Для простоты рассмотрим случай ΔX>0. Поскольку Δ S(x)= S (x + Δ x) — S (x), то Δ S (x) — площадь фигуры, заштрихованной на рисунке 2, б. Возьмем теперь прямоугольник той же площади Δ S(x),опирающийся на отрезок [x; x+Δ x] (рис. 2, в). В силу непрерывности функции f верхняя сторона прямоугольника пересекает график функции в некоторой точке с абсциссой c ∈ [x; x+Δ x] (в противном случае этот прямоугольник либо содержится в части криволинейной трапеции над отрезком [x;x+Δx], либо содержит ее; соответственно его площадь будет меньше или больше площади Δ S (X)). Высота прямоугольника равна f (c). По формуле площади прямоугольника имеем Δ S (x)=f (c) Δ x, откуда (Эта формула верна и при Δ x<0.) Поскольку точка c лежит между x и x + Δx; то c стремится к x при . Так как функция f непрерывна, при . Итак, при .Формула (2) доказана.Мы получили, что S есть первообразная для f. Поэтому в силу основного свойства первообразных для всех x∈ [a;b] имеем:

- S(x) = F(x)+C,
-

  где C — некоторая постоянная, а F — одна из первообразных для функции f. Для нахождения C подставим x = a:
  F(a)+C=S(a)=0,
- откуда C=—F(a). Следовательно,

  S(x) = F(x)-F(a). (4)
-

  Поскольку площадь криволинейной трапеции равна S (b), подставляя x = b в формулу (4), получим:

- S=S(b)=F(b)-F(a).

Пошаговый пример

__Пример__: **Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y=0$**

__Решение:__

1. Построим криволинейную трапецию:

$y = 4 - x^2$ - квадратичная функция, график – парабола, ветви направлены вниз.

$y = 0$ - ось абсцисс.

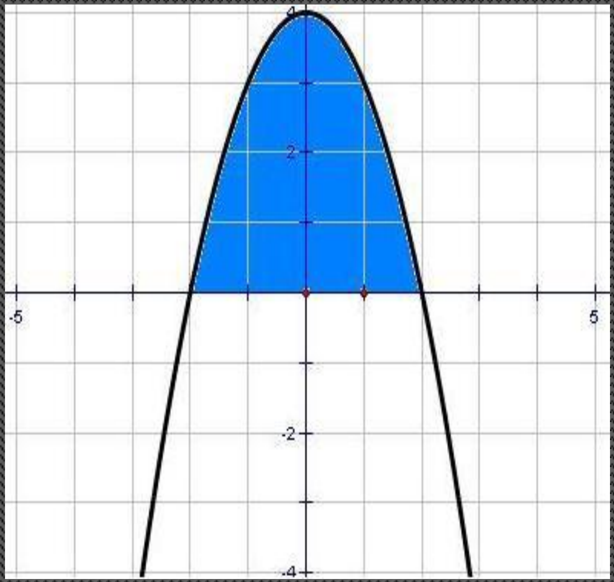
2. Найдём [a; b]:

$4-x^2= 0$; $x^2 = 4$

$x = -2$ или $x = 2$, т. е. $a = -2$ $b = 2$

3. Найдём площадь криволинейной трапеции по формуле: $S = F(b) – F(a)$

$S=F(2)-F(-2)=$*__10,(6).__*



Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{b}^{a} f(x) = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a)$$

Определённый интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

ТЕОРЕМА. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$ на $[a,b]$. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a,b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, т.е.

Нахождение определенных интегралов с использованием формулы Ньютона–Лейбница (2) осуществляется в два шага: на первом шаге, используя технику нахождения неопределенного интеграла, находят некоторую первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$; на втором применяется собственно формула Ньютона-Лейбница – находится приращение первообразной, равное искомому интегралу. В связи с этим, введем обозначение для приращения первообразной, которое удобно использовать при записи решений. По определению положим

Следует подчеркнуть, что при применении формулы Ньютона – Лейбница можно использовать любую первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$, например имеющую наиболее простой вид при $C=0$

Формула Ньютона Лейбница

Из результатов предыдущего параграфа следует, что непрерывная на $[a;b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную, например

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt\,.$$

Поставим теперь следующую задачу: зная одну из первообразных $\Phi(x)$ функции $f(x)$ на $[a;b]$ вычислить определенный интеграл от функции $f(x)$, или что тоже самое по известному неопределенному интегралу найти определенный интеграл.

Пусть $F(x)$ - любая другая первообразная функции $f(x)$ на том же отрезке $[a;b]$. Так как две первообразные отличаются друг от друга постоянным слагаемым, то получаем равенство

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C, \quad C \in R\,.$$

Подставим в это равенство значение $x = a$

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C \Rightarrow F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$$

т.е.

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) \quad \forall \mathrm{x} \in [a;b]$$

Полагая $x = b$ и обозначая переменную интегрирования за х, получаем основную формулу интегрального исчисления:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),} \qquad (4)$$

которая называется ***формулой Ньтона - Лейбница.***

Формула Ньтона - Лейбница дает правило вычисления определенного интеграла: *значение определенного интеграла на отрезке [a;b] от непрерывной функции f(x) равно разности значений любой ее первообразной , вычисленной при* $x = b$ *и* $x = a$.

Разность $F(b) - F(a)$ в правой части равенства (4) обычно записывают так: $F(x)\big|_a^b$. Тогда формула Ньютона - Лейбница принимает следующий вид:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула 4 позволяет вычислять определенный интеграл не по определению (т.е. вычисляя предел интегральных сумм), а сводится к задаче нахождения неопределенного интеграла.

Основные методы вычисления определенного интеграла

Вычисление простейших интегралов с помощью формулы Ньютона - Лейбница.

Если $F(x)$ - одна из первообразных непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$, то справедлива формула Ньютона -Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Эта формула позволяет свести вычисление определенного интеграла к вычислению неопределенного.

Примеры

1) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$;

2) $\int_0^1 (6x^2 + 3)dx = (2x^3 + 3x)\Big|_0^1 = (2\cdot 1^3 + 3\cdot 1) - (2\cdot 0 + 3\cdot 0) = 5$;

3) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$;

4) $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}} = \int_1^6 (3+x)^{-1/2} dx = 2\sqrt{3+x}\Big|_1^6 = 2(\sqrt{9} - \sqrt{2}) = 2$;

5) $\int\limits_{-1}^{0} e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_{-1}^{0} = \frac{e^2-1}{2}$.

Замена переменной (подстановка) в определенном интеграле

Этот метод, как и в случае неопределенного интеграла, позволяет упростить вычисления, т.е. привести подынтегральное выражение к табличному виду. Имеет место следующая теорема

Теорема 5 *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке [a;b], а функция* $x=\varphi(t)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[t_1,t_2]$, *причем* $\varphi([t_1,t_2])=[a;b]$ *и* $\varphi(t_1)=a, \varphi(t_2)=b$, *то справедлива формула*

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt} \qquad (5)$$

⊳ Пусть $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на отрезке [a;b]. Поскольку $\varphi(t_1)=a, \varphi(t_2)=b$, то по формуле Ньтона - Лейбница имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(\varphi(t_1)) - F(\varphi(t_2)) = \int\limits_{t_1}^{t_2} d(F(\varphi(t))) =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} F'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad \triangleleft$$

Формула (5) называется *формулой замены переменной в определенном интеграле.*

Пример 1: Вычислить $\int\limits_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

Осуществим замену переменной: $x = t^2$, тогда $dx = 2tdt$. Пределы интегрирования сведем в таблицу:

x	0	9
t	0	3

По формуле (5)

$$\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^3 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^3 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = 2\left(t - \ln|1+t|\right)\Big|_0^3 = 6 - 2\ln 4.$$

Пример 2: Вычислить $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$

Произведем замену $\sin x = t$. Тогда $\cos x dx = dt$.

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
t	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Применяем формулу (5)

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} t^{-3} dt = -\frac{1}{2t^2}\Bigg|_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ - дифференцируемые на отрезке $[a;b]$ функции. Тогда $d(uv) = udv + vdu$. Проинтегрируем это равенство на отрезке $[a;b]$

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b udv + \int_a^b vdu. \qquad (6)$$

С другой стороны, по формуле Ньютона - Лейбница

$$\int_a^b d(uv) = uv\Big|_a^b$$

Следовательно, формула (6) принимает вид:

$$\boxed{\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu} \qquad (7)$$

Формула (7) называется *формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.*

Пример 1: Вычислить $\int_0^\pi x\sin xdx$.

$$\int_0^\pi x\sin xdx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx \\ dv = \sin xdx, v = -\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos xdx = \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi$$

Пример 2: Вычислить $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}dx$

$$\int_0^{\pi/4}\frac{x}{\cos^2 x}dx=\left|\begin{array}{l}u=x, du=dx\\ dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x}, v=tgx\end{array}\right|=xtgx\Big|_0^{\pi/4}-\int_0^{\pi/4}tgxdx=\frac{\pi}{4}tg\frac{\pi}{4}-\ln\cos x\Big|_0^{\pi/4}=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\ln\cos\frac{\pi}{4}-\ln\cos 0=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\approx 0{,}92\ .$$

Несобственные интегралы

Понятие несобственных интегралов

При введении понятия определенного интеграла как предела интегральной суммы мы требовали выполнения двух условий :

1) пределы интегрирования a и b являются конечными;
2) подынтегральная функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода.

В этом случае определенные интегралы называются *собственными.* Если хотя бы одно из указанных условий не выполнено интеграл называется *несобственным*

Несобственные интегралы являются обобщением понятия определенного интеграла в случае бесконечного промежутка или неограниченной функции.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (первого рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;\infty)$. Тогда она будет непрерывна на любом конечном отрезке $[a;b], a<b$. Для функции $f(x)$, непрерывной на $[a;b]$ существует определенный интеграл $I(b)$, зависящий от верхнего предела интегрирования:

$$I(b)=\int_a^b f(x)dx .$$

Этот интеграл определяет некоторую величину, например площадь соответствующей криволинейной трапеции. Будем неограниченно увеличивать верхний предел интегрирования, при этом возможны два случая: либо $I(b)$ имеет конечный предел, либо не имеет.

Определение 2 *Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $[a;\infty)$ называется предел $I(b)$ при $b\to\infty$:*

$$\int_a^\infty f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (8)$$

Аналогично определяется *несобственный интеграл с переменным нижним пределом интегрирования*

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (9)$$

Если пределы в правых частях формул (8) и (9) существуют и конечны, то соответствующие несобственные интегралы называются *сходящимися,* если пределы не существуют или бесконечны, то *расходящимися.*

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ *на промежутке* $(-\infty;\infty)$, *обозначаемый* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, предварительно представляем в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx\,,\; c \in (-\infty;\infty)\,.$$

Тогда по определению

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx\,, \qquad (10)$$

причем этот интеграл называется сходящимся, если оба предела существуют.

Интегралы (8) - (10) называются *несобственными интегралами первого рода.*

С геометрической точки зрения сходящийся несобственный интеграл $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ означает, что фигура, ограниченная кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a, y = 0$ и бесконечно вытянутая вдоль в направлении оси OX имеет конечную площадь.