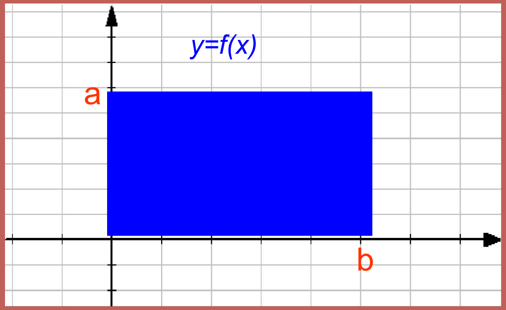
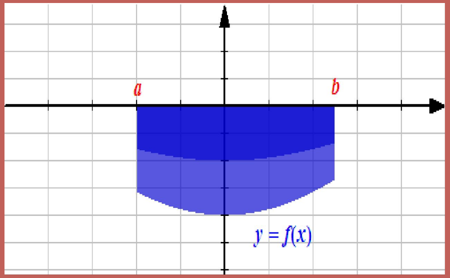
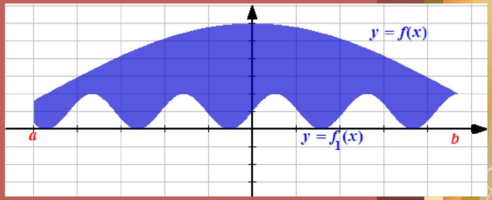
Вычисление площадей плоских фигур более сложного вида с помощью определенного интеграла

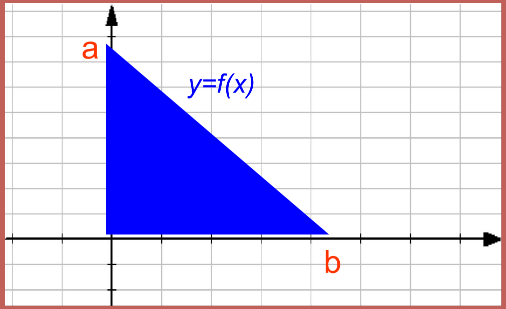
11 класс

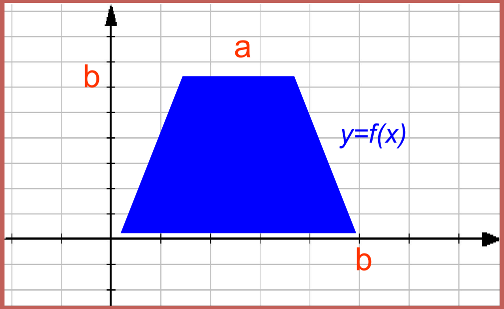
Задание 1. Поставьте в соответствие фигуру и формулу нахождения ее площади.

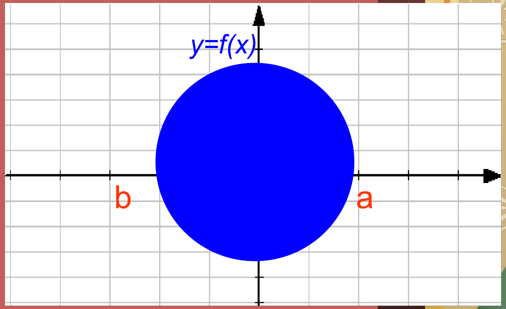
1


2


3


4


5


6


$a) S = \int_a^b f(x)dx$

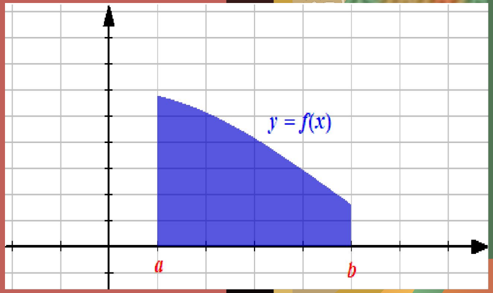
$b) S = \frac{a+b}{2} b$

$c) S = \pi a^2$

$d) S = ab$

$e) S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$

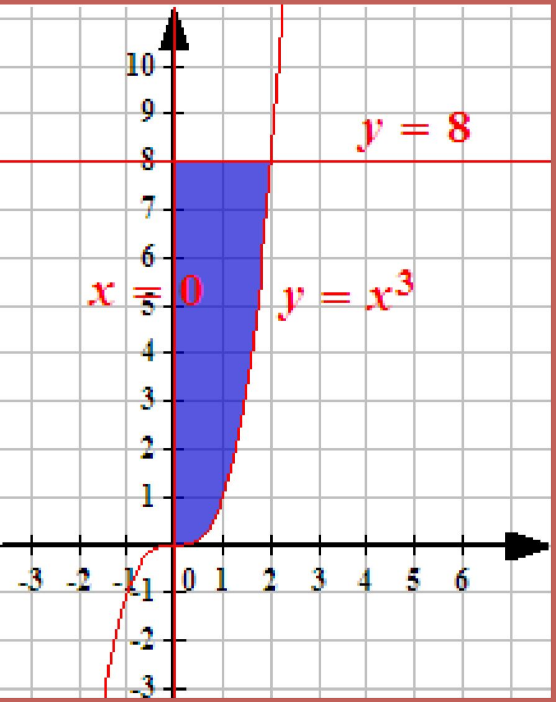
$f) S = \frac{1}{2} ab$

7


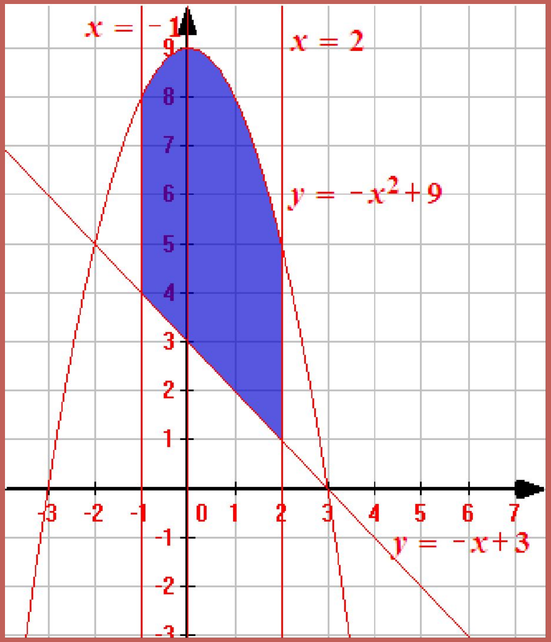
Правильные ответы к заданию 1.

- 1-d
- 2-e
- 3-нет формулы
- 4-f
- 5-b
- 6-c
- 7-a

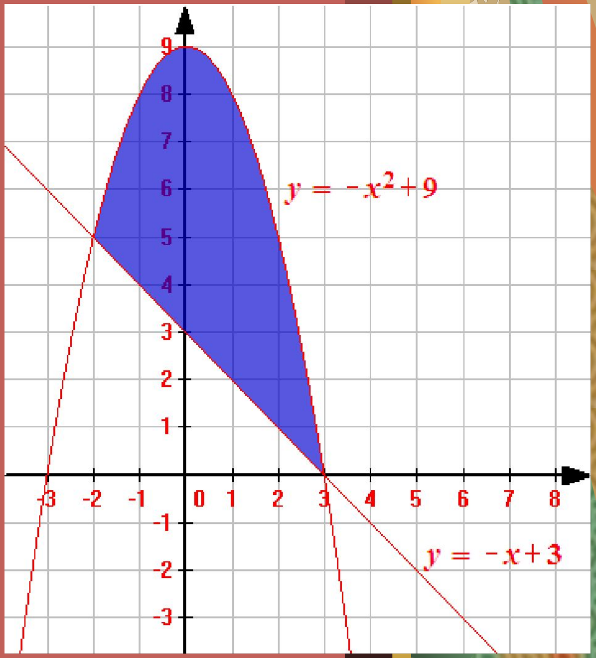
Задание 2. По известным формулам попробуйте вычислить площади фигур, закрашенных синим цветом.



1



2



3

Задание 3. Что общего в нахождении площадей фигур задания 2?

Правильный ответ

Площадь S фигуры, ограниченной прямыми x=a, x=b и графиками функций y=f(x), y=g(x), непрерывных на отрезке [a;b] и таких, что для всех x из отрезка [a;b] выполняется неравенство g(x)≤f(x), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Задание 4. Алгоритм нахождения площади плоских фигур более сложного вида с помощью определенного интеграла

- Графически построить фигуру, ограниченную заданными функциями
- Определить прямые x=a и x=b, которые ограничивают данную фигуру (если не заданы, то найти абсциссы точек пересечения графиков функций)
- Определить график какой функции на отрезке [a;b] выше – это и будет функция y=f(x), а другая y=g(x)
- Применить формулу вычисления площади

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

<u>Пример.</u> Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямой $y=x-2$ и параболой $y=x^2- 4x+2$.

Графически построить фигуру, ограниченную графиками заданными функциями

Графиком функции $y=x-2$ является прямая, поэтому достаточно найти две точки.

$y(2)=2-2=0$ (2;0)

$y(6)=6-2=4$ (6;4)

Графиком функции $y=x^2-4x+2$ является парабола, ветви которой направлены вверх.

Вершина параболы: $y'=0$,

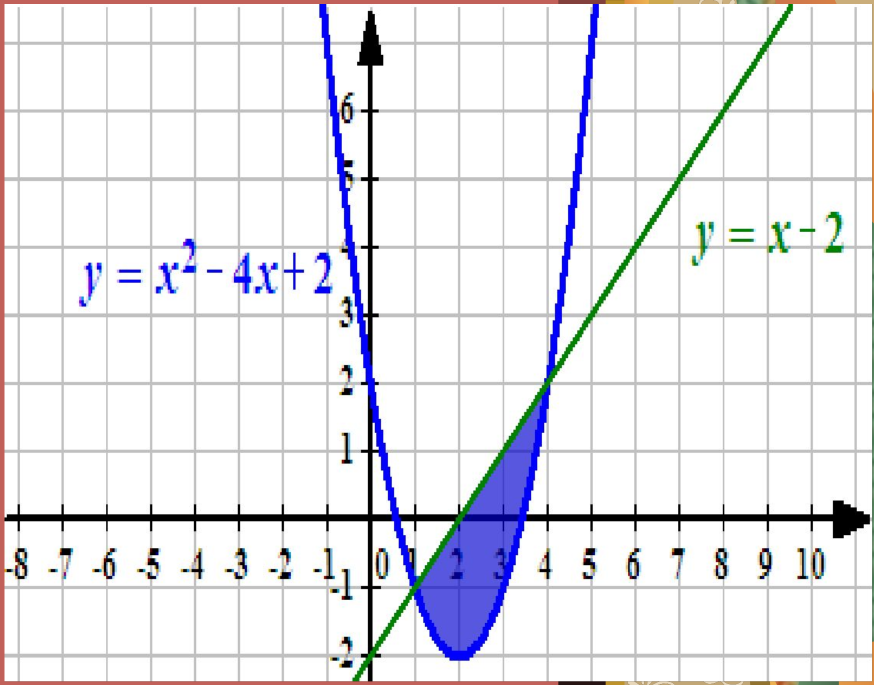
$(x^2-4x+2)'=2x-4$, $2x-4=0$, $x=2$

$y(2)=2^2-4\cdot 2+2=-2$ (2;-2)

Ось симметрии $x=2$

$y(3)= 3^2-4\cdot 3+2=-1$ (3;-1), (1;-1)

$y(4)= 4^2 -4\cdot 4+2=2$ (4;2), (0;2)



<u>Пример.</u> Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямой $y=x-2$ и параболой $y=x^2-4x+2$.

Определить прямые x=a и x=b

$x^2-4x+2=x-2$

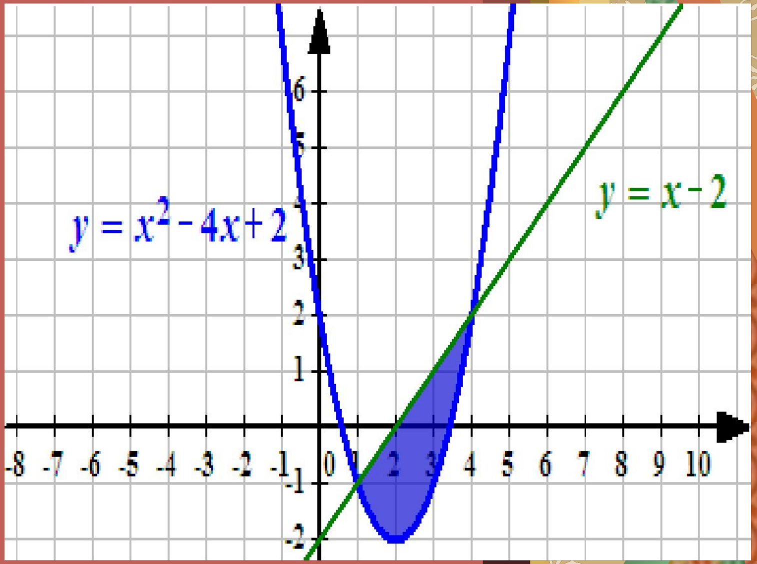
$x^2-4x+2-x+2=0$

$x^2-5x+4=0$

$x_1=1,\ x_2=4$

Определить график какой функции на отрезке [a;b] выше – это и будет функция y=f(x), а другая y=g(x)

График функции $y=x-2$ на отрезке [1;4] располагается выше графика функции $y=x^2-4x+2$



<u>Пример.</u> Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямой у=х-2 и параболой у=х2- 4х+2.

Применить формулу вычисления площади

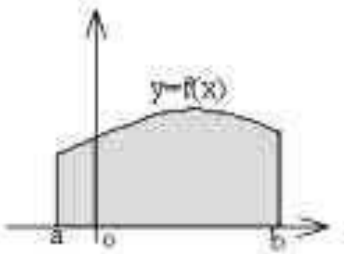
$$S=\int_1^4((\tilde{o}-2)-(x^2-4\tilde{o}+2))dx=\int_1^4(-\tilde{o}^2+5\tilde{o}-4)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right)\Bigg|_1^4=$$

$$=\left(-\frac{4^3}{3}+\frac{5\cdot 4^2}{2}-4\cdot 4\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+\frac{5\cdot 1^2}{2}-4\cdot 1\right)=4{,}5$$

Итог урока

- Как найти площади изображенных фигур?

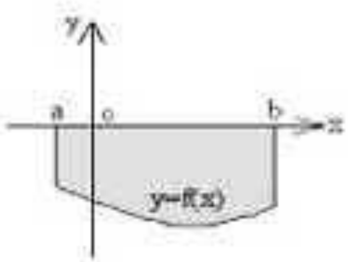
Ответ:



1) Если $y=f(x)$ – непрерывная, $f(x)\geq 0$ на $[a;b]$, то

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

Ответ:

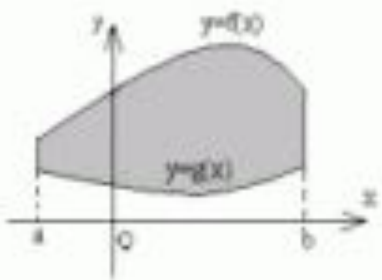


2) Если $y=f(x)$ – непрерывная, $f(x)\leq 0$ на $[a;b]$, то

$$S=-\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

Итог урока

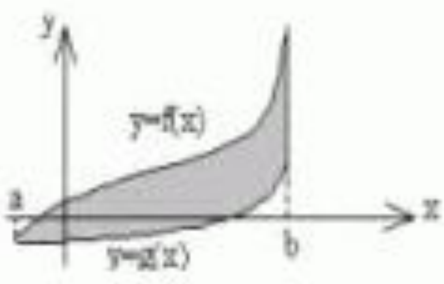
- Как найти площади изображенных фигур?



Ответ:

3) Если y=f(x), y=g(x) – непрерывные на [a;b], f(x)≥ g(x) на [a;b],то

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$



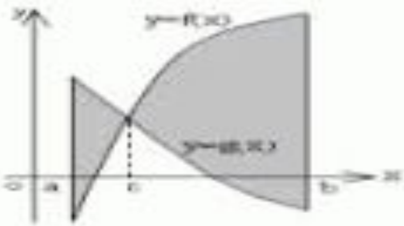
Ответ:

4) Если y=f(x), y=g(x) – непрерывные на [a;b], f(x)≥ g(x) на [a;b], то

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

Итог урока

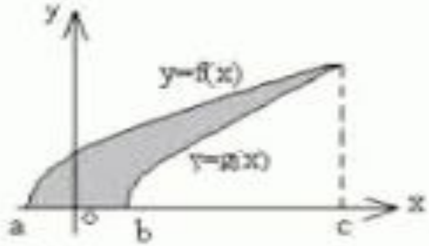
- Как найти площади изображенных фигур?



Ответ:

5) Если y=f(x), y=g(x) – непрерывные на [a;b], f(x)≥ g(x) на [c;b], где c∈ [a;b], f(x) ≤g(x) на [a;c], то

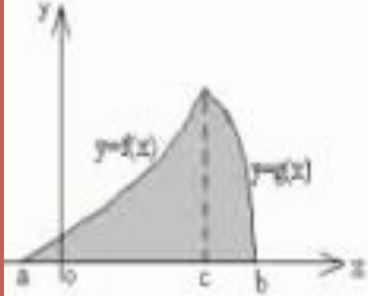
$$S=\int_a^c (g(x)-f(x))dx+\int_c^b (f(x)-g(x))dx$$



Ответ:

6) Если y=f(x)- непрерывная на [a;c], y=g(x) –непрерывная на[b;c], f(x) ≥g(x) на[a;c], где c∉ [a;b], то

$$S=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c g(x)dx$$



Ответ:

7) Если y=f(x)- непрерывная на [a;c],y=g(x)–непрерывная на [c;b], где c∈ ∈ [a;b], то

$$S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b g(x)dx$$