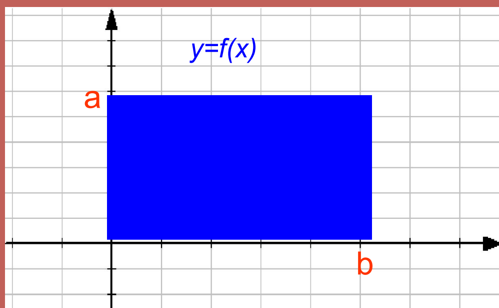
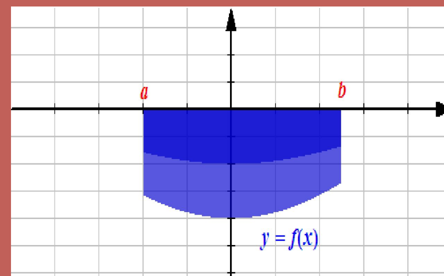
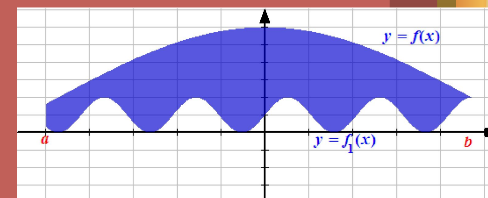
Вычисление площадей плоских фигур более сложного вида с помощью определенного интеграла

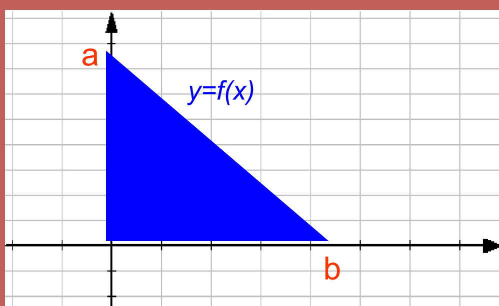
11 класс

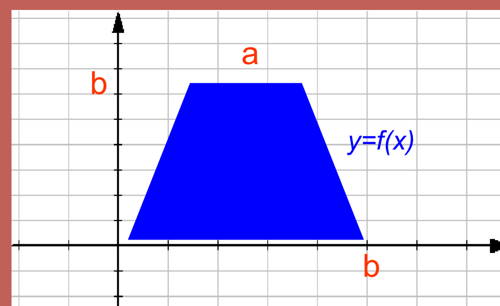
Задание 1. Поставьте в соответствие фигуру и формулу нахождения ее площади.

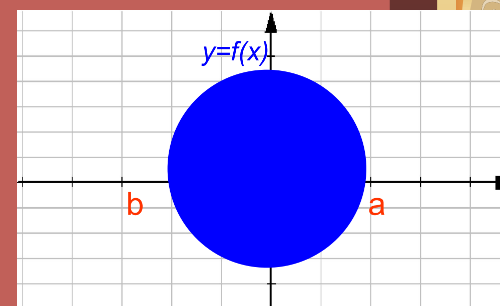
1


2


3


4


5


6


$$a)S=\int_a^b f(x)dx$$

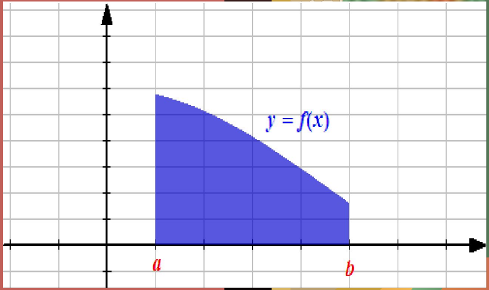
$$b)S=\frac{a+b}{2}b$$

$$c)S=\pi a^2$$

$$d)S=ab$$

$$e)S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

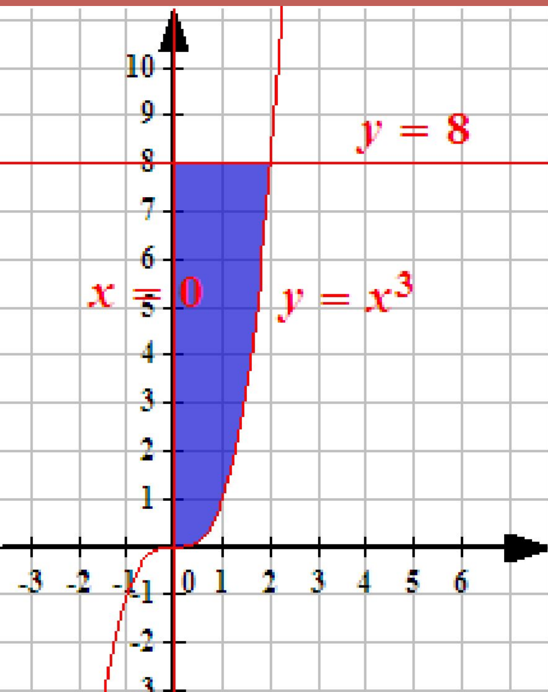
$$f)S=\frac{1}{2}ab$$

7


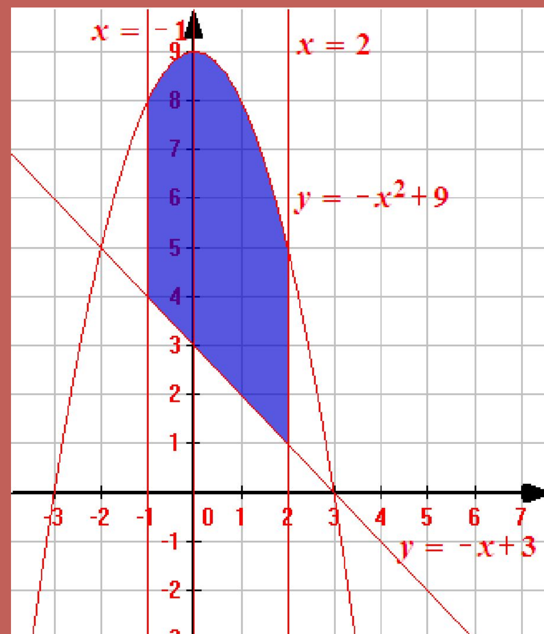
Правильные ответы к заданию 1.

- 1-d
- 2-e
- 3-нет формулы
- 4-f
- 5-b
- 6-c
- 7-a

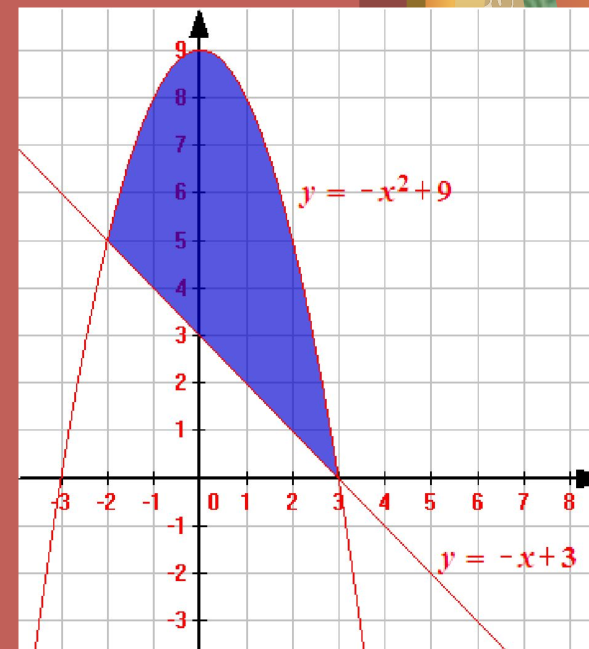
Задание 2. По известным формулам попробуйте вычислить площади фигур, закрашенных синим цветом.



1



2



3

Задание 3. Что общего в нахождении площадей фигур задания 2?

Правильный ответ

Площадь S фигуры, ограниченной прямыми x=a, x=b и графиками функций y=f(x), y=g(x), непрерывных на отрезке [a;b] и таких, что для всех x из отрезка [a;b] выполняется неравенство $g(x) \leq f(x)$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Задание 4. Алгоритм нахождения площади плоских фигур более сложного вида с помощью определенного интеграла

- Графически построить фигуру, ограниченную заданными функциями
- Определить прямые x=a и x=b, которые ограничивают данную фигуру (если не заданы, то найти абсциссы точек пересечения графиков функций)
- Определить график какой функции на отрезке [a;b] выше – это и будет функция y=f(x), а другая y=g(x)
- Применить формулу вычисления площади

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Пример. Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямой y=x-2 и параболой $y=x^2-4x+2$.

Графически построить фигуру, ограниченную графиками заданными функциями

Графиком функции y=x-2 является прямая, поэтому достаточно найти две точки.

y(2)=2-2=0 (2;0)

y(6)=6-2=4 (6;4)

Графиком функции $y=x^2-4x+2$ является парабола, ветви которой направлены вверх.

Вершина параболы: y'=0,

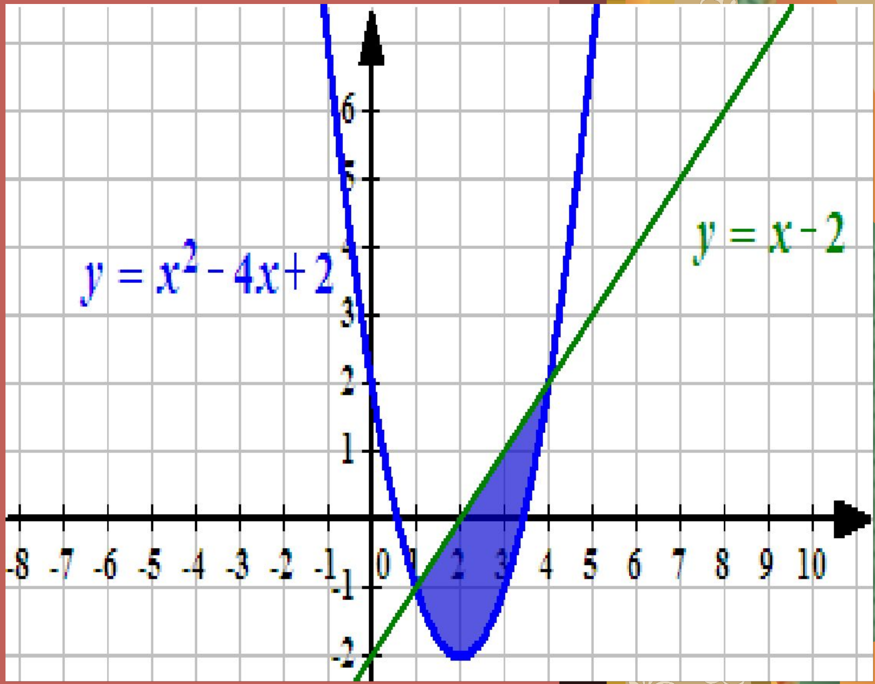
$(x^2-4x+2)'=2x-4$, 2x-4=0, x=2

$y(2)=2^2-4\cdot2+2=-2$ (2;-2)

Ось симметрии x=2

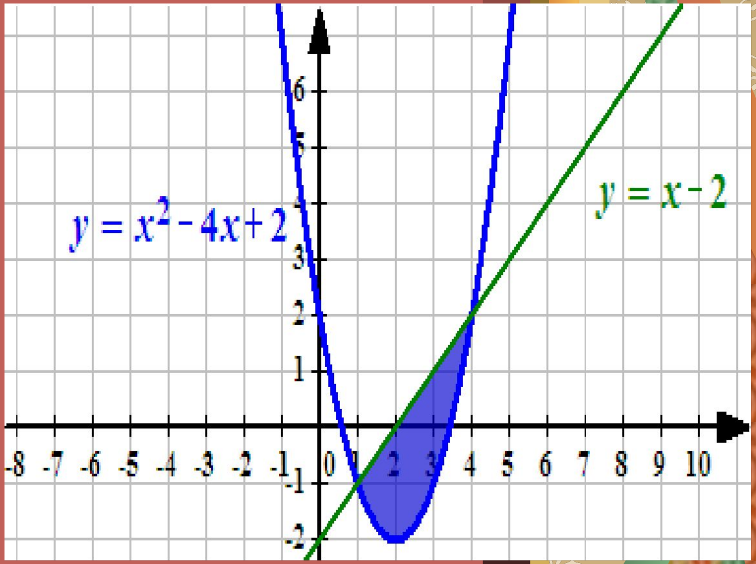
$y(3)=3^2-4\cdot3+2=-1$ (3;-1), (1;-1)

$y(4)=4^2-4\cdot4+2=2$ (4;2), (0;2)



Пример. Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямой $y=x-2$ и параболой $y=x^2-4x+2$.

Определить прямые x=a и x=b



$x^2 – 4x+2=x-2$

$x^2 – 4x+2-x+2=0$

$x^2 – 5x+4=0$

$x_1 =1,\ x_2 =4$

Определить график какой функции на отрезке [a;b] выше – это и будет функция y=f(x), а другая y=g(x)

График функции $y=x-2$ на отрезке [1;4] располагается выше графика функции $y=x^2-4x+2$

Пример. Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямой y=x-2 и параболой y=x2- 4x+2.

Применить формулу вычисления площади

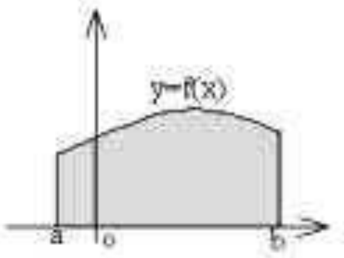
$$S=\int_1^4((\tilde{o}-2)-(x^2-4\tilde{o}+2))dx=\int_1^4(-\tilde{o}^2+5\tilde{o}-4)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right)\Bigg|_1^4=$$

$$=\left(-\frac{4^3}{3}+\frac{5\cdot 4^2}{2}-4\cdot 4\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+\frac{5\cdot 1^2}{2}-4\cdot 1\right)=4{,}5$$

Итог урока

- Как найти площади изображенных фигур?

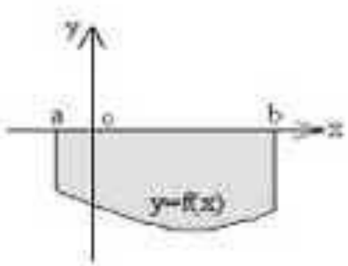
Ответ:



1) Если y=f(x) – непрерывная, $f(x) \geq 0$ на [a;b], то

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

Ответ:

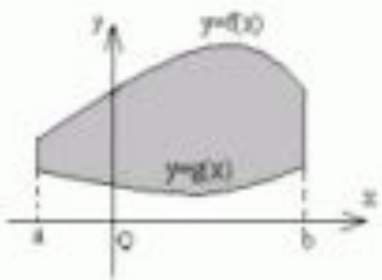


2) Если y=f(x) – непрерывная, $f(x) \leq 0$ на [a;b], то

$$S=-\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

Итог урока

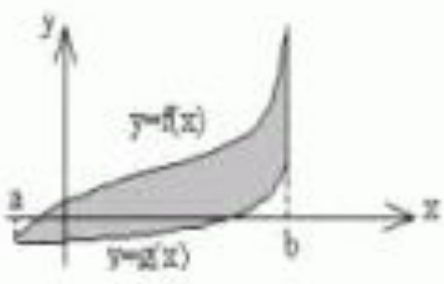
- Как найти площади изображенных фигур?



Ответ:

3) Если $y=f(x)$, $y=g(x)$ – непрерывные на $[a;b]$, $f(x)\geq g(x)$ на $[a;b]$,то

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$



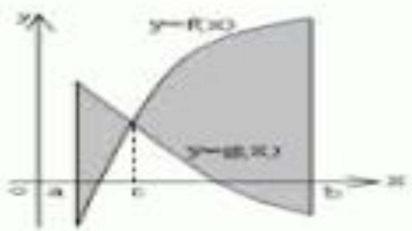
Ответ:

4) Если $y=f(x)$, $y=g(x)$ – непрерывные на $[a;b]$, $f(x)\geq g(x)$ на $[a;b]$, то

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

Итог урока

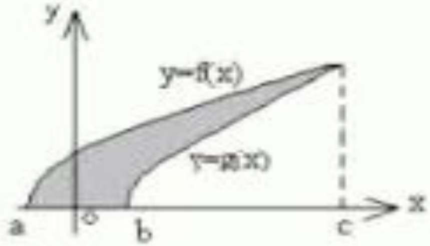
- Как найти площади изображенных фигур?



Ответ:

5) Если y=f(x), y=g(x) – непрерывные на [a;b], f(x)≥ g(x) на [c;b], где c∈ [a;b], f(x) ≤g(x) на [a;c], то

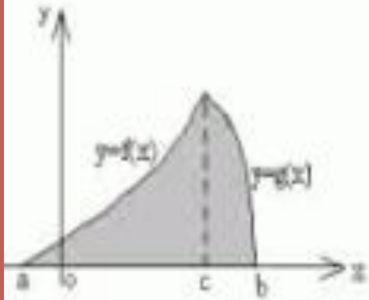
$$S=\int_a^c (g(x)-f(x))dx+\int_c^b (f(x)-g(x))dx$$



Ответ:

6) Если y=f(x)- непрерывная на [a;c], y=g(x) –непрерывная на[b;c], f(x) ≥g(x) на[a;c], где c∉ [a;b], то

$$S=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c g(x)dx$$



Ответ:

7) Если y=f(x)- непрерывная на [a;c],y=g(x)–непрерывная на [c;b], где c∈ ∈ [a;b], то

$$S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b g(x)dx$$