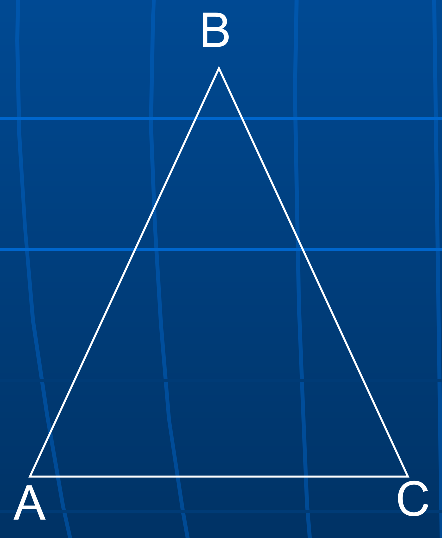
Площадь

Работу выполняла ученица 11«4» класса
Степанова Аня

Основные свойства площадей.

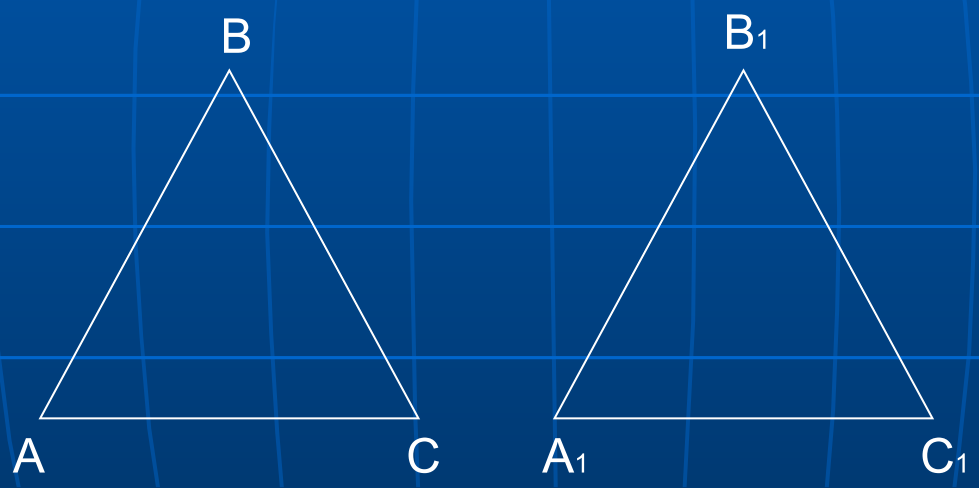
Первое свойство:

Площадь плоской фигуры – неотрицательное число.



Второе свойство:

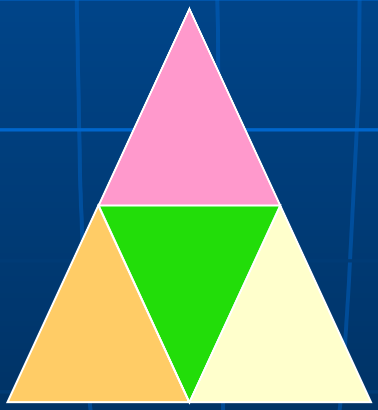
Площади равных фигур равны.



$$S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1}$$

Третье свойство:

Если фигура разрезана на несколько частей, то ее площадь равна сумме площадей этих частей.

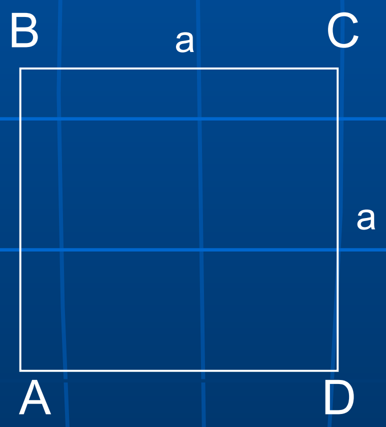


Четвертое свойство:

Площадь квадрата со стороной 1 равна 1.

$a=1$

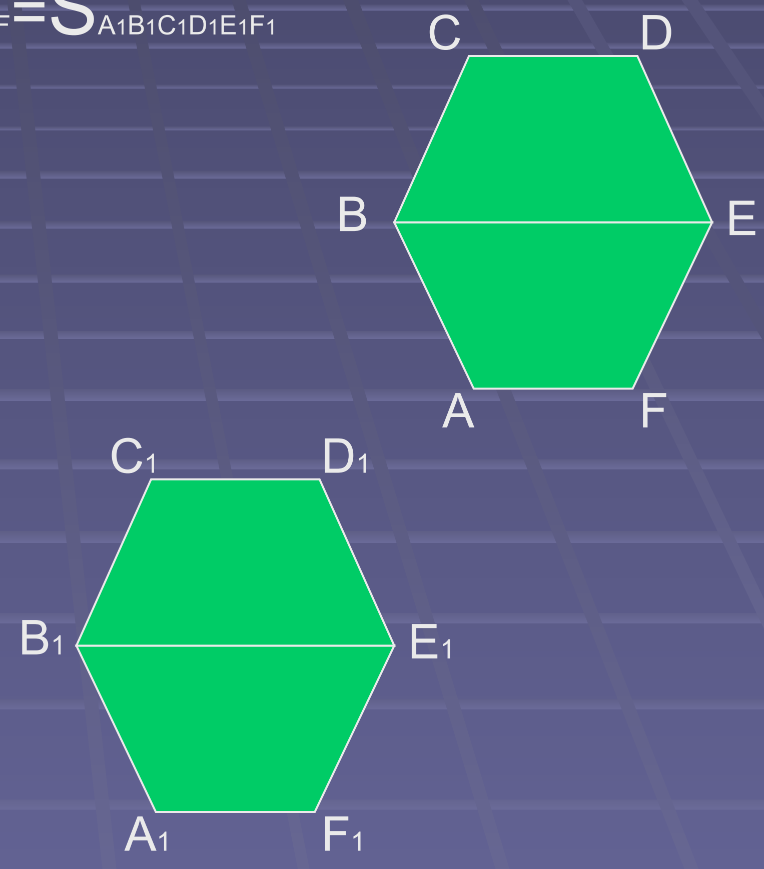
$S_{ABCD} = a^2$



Разрезания и складывания

- Основной принцип метода "разрезания и складывания" основан на том, что если два многоугольника удается разбить на одинаковые части (такие многоугольники называют *равносоставленными*), то отсюда вытекает, что площади этих многоугольников равны (фигуры, площади которых равны, называются *равновеликими*).

$$S_{ABCDEF}=S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}$$



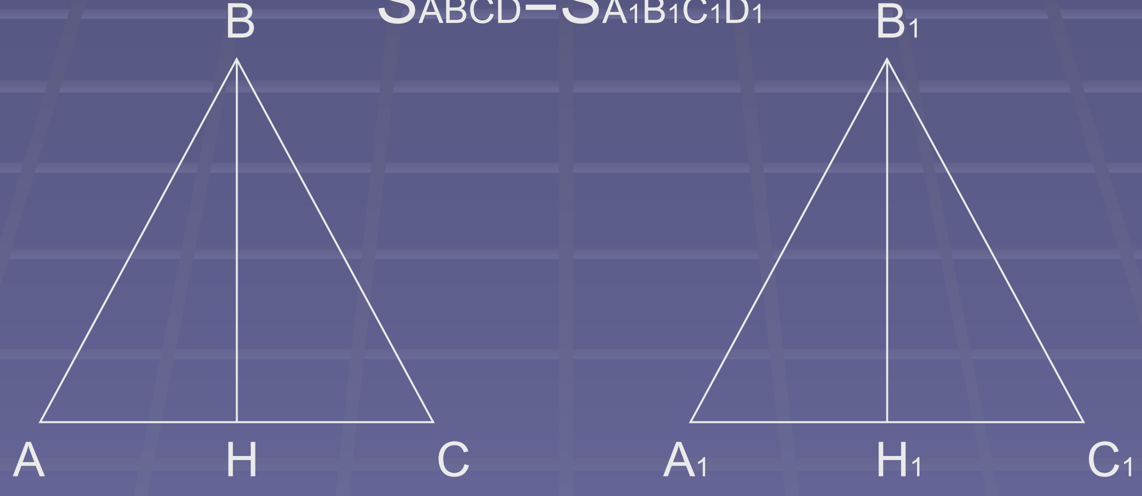
Теорема

- Если два многоугольника равновелики, то один из них можно разрезать на части, из которых можно составить другой многоугольник.

Отношения площадей

- для того, чтобы установить связь двух площадей, часто бывает удобно сравнивать площади двух треугольников, используя 5 свойство.

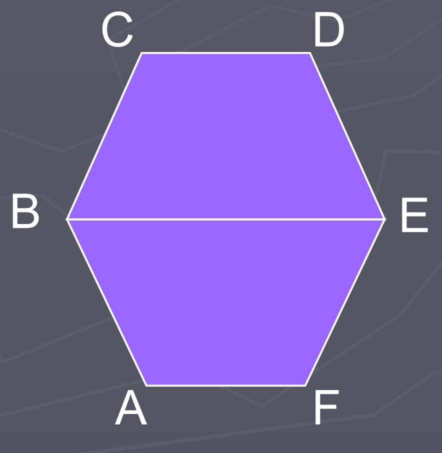
$S_{ABCD}=S_{A_1B_1C_1D_1}$

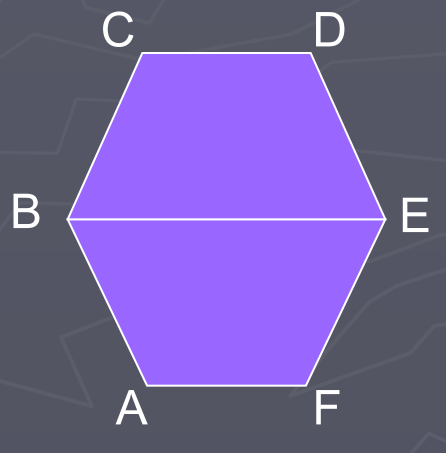


Площадь многоугольника

1. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.
2. Равные многоугольники имеют равные площади.

$S_{ABCDEF}=S_{A1B1C1D1E1F1}$

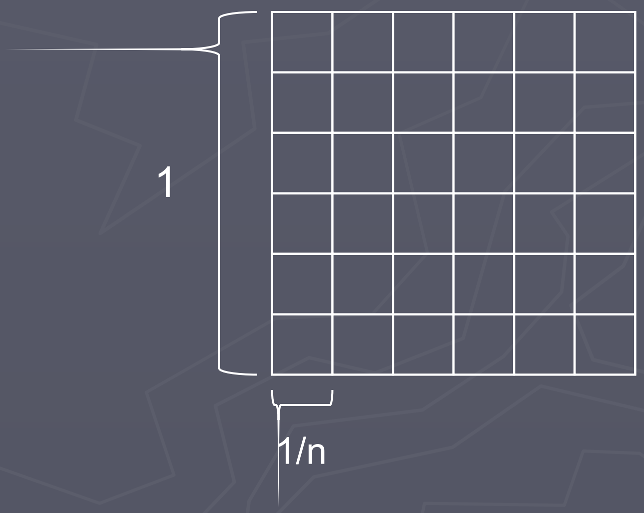




Площадь квадрата

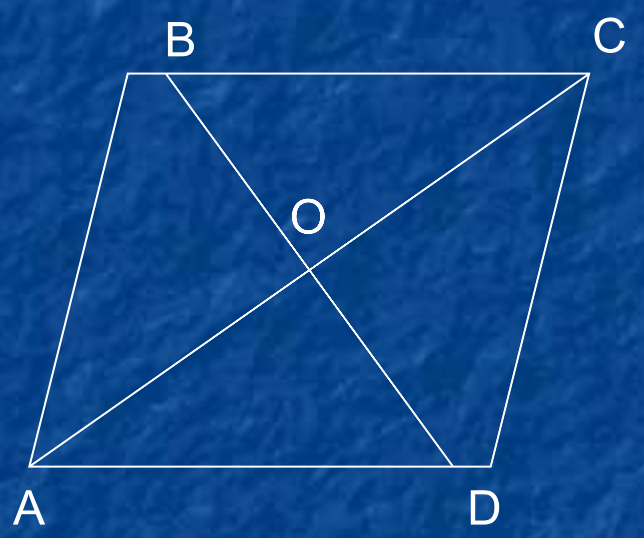
Рассмотрев 4 свойство, докажем, что площадь *S* квадрата со стороной *a* равна a^2.

Начнем с того случая, когда a=1/n.Где n-целое число. Возьмем квадрат со стороной 1 и разобьем его на n^2 равных квадратов. Так как площадь большого квадрата равна 1 То площадь каждого маленького квадрата равна $1/n^2$



Задача

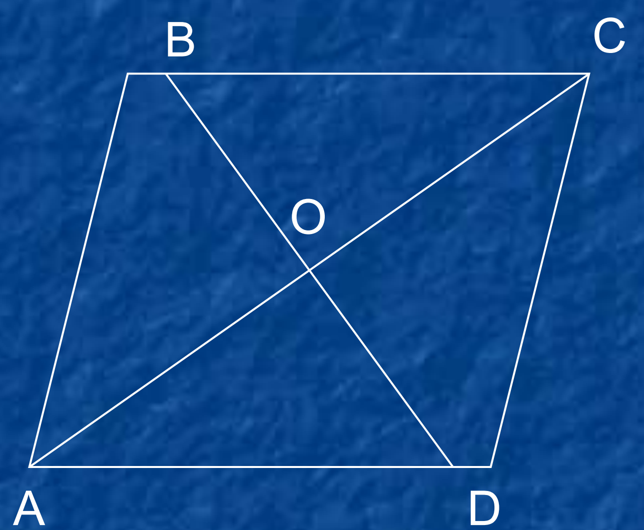
- Пусть *O* – точка пересечения отрезков *AC* и *BD* (рис. 4.2). Докажите, что для того, чтобы площади треугольников *AOB* и *COD* были равны, необходимо и достаточно, чтобы прямые *BC* и *AD* были параллельны.



Решение:

Для того, чтобы решить эту задачу, нужно доказать *два* утверждения:

1. Если прямые *BC* и *AD* параллельны, то площади треугольников *AOB* и *COD* равны;
2. Если площади треугольников *AOB* и *COD* равны, то прямые *BC* и *AD* параллельны.



$S_{AOB}=S_{COD} \rightarrow BC \parallel AD$

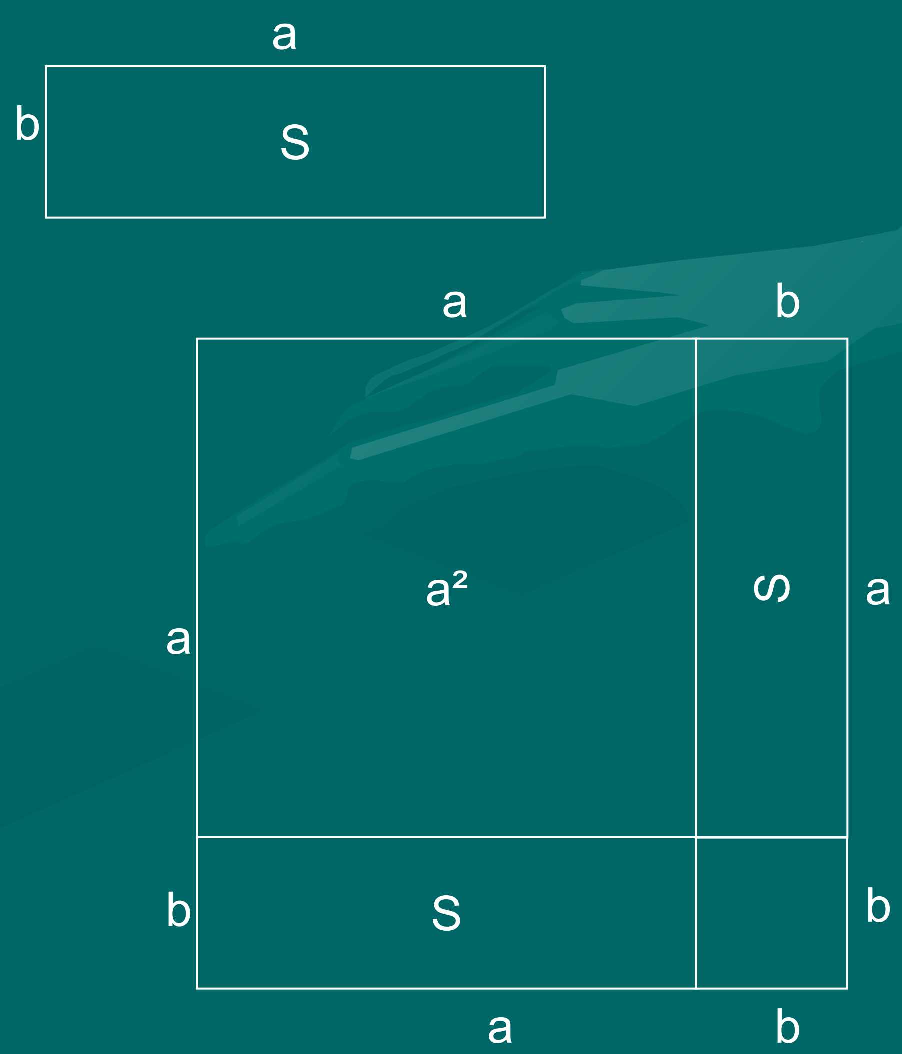
Площадь прямоугольника.

Теорема:

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

Доказательство теоремы:

- Достроим прямоугольник до квадрата со стороной *a+b*, площадь этого квадрата равна $(a+b)^2$.
- Рассмотрим прямоугольник со сторонами *a, b* и площадь *S*. Докажем, что $S=ab$.



решение

С другой стороны, этот квадрат составлен из данного прямоугольника с площадью S, равного ему прямоугольника с площадью S и двух квадратов с площадями a^2 и b^2. Имеем: $(a+b)^2=S+S+a^2+b^2$

От сюда получаем $S=ab$.

Теорема доказана.

Площадь параллелограмма.

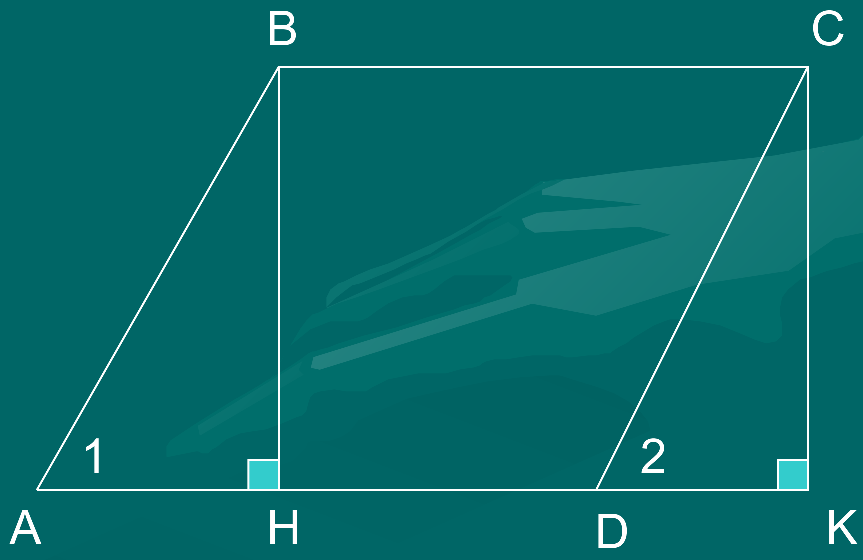
Теорема:

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

Доказательство:

Рассмотрим параллелограмм *ABCD* с площадью *S*. Примем сторону *AD* за основание и проведем высоту ВН и СК. Требуется доказать, что

$$S = AD \cdot BH$$



Докажем сначала, что площадь прямоугольника *HBCK* также равна S. Трапеция АВСК составлена из параллелограмма *ABCD* и треугольника *DCK*. С другой стороны, она составлена из прямоугольников *HBCK* и треугольник *ABH*. Но прямоугольные треугольники *DCK* и *ABH* равны по гипотенузе и остр. углу (*AB*=*CD*, углы 1=2),поэтому их площади равны. Следовательно, площади параллелограмма *ABCD* и прямоугольника НВСК также равны, т. е. площадь прямоугольника НВСК равна S. По теореме о площади прямоугольника S=BC·BH, а так как BC=AD, то S=AD·BH. Теорема доказана.

Площадь треугольника.

Теорема:

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

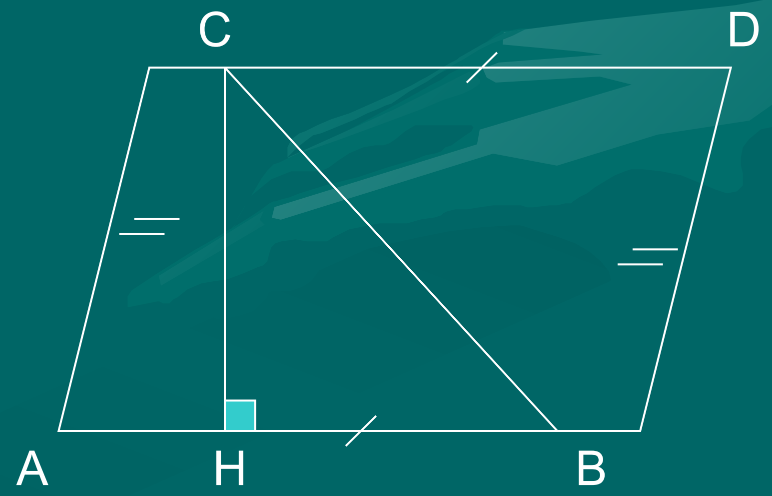
$$S=\tfrac{1}{2}AB \cdot CH$$

Доказательство:

Пусть S – площадь треугольника ABC. Примем сторону AB за основание и проведем высоту CH. Докажем, что

$S=\frac{1}{2}AB \cdot CH$

Достроим треугольник ABC до параллелограмма ABDC. Треугольники ABC и DCB равны по трем сторонам (BC - их общая сторона, AB=CD и AC=BD), поэтому их площади равны. Следовательно, площадь S треугольника ABC равны половине площади параллелограмма ABDC, т. Е. $S=\frac{1}{2}AB \cdot CH$. Теорема доказана.



Следствие 1:

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Следствие 2:

Если высоты двух треугольников равны ,то их площади относятся как основания.

Воспользовавшись этим следствием докажем теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу.

Теорема:

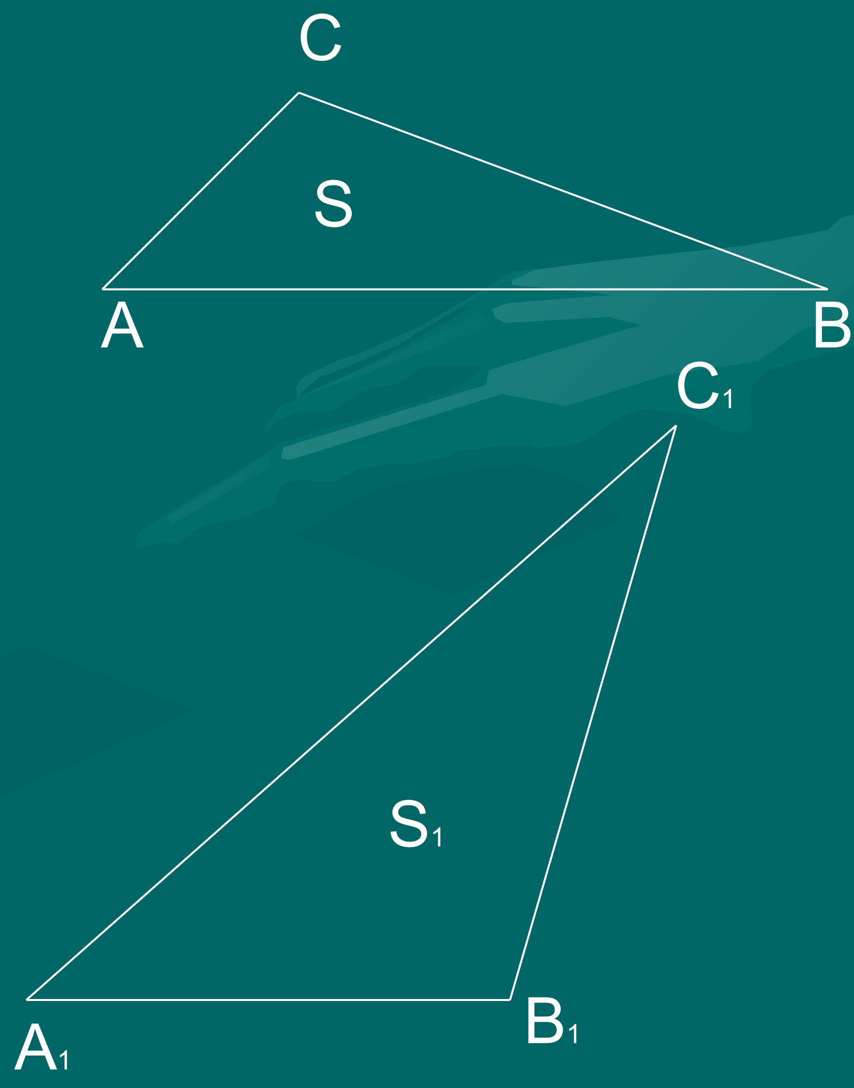
Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

Доказательство:

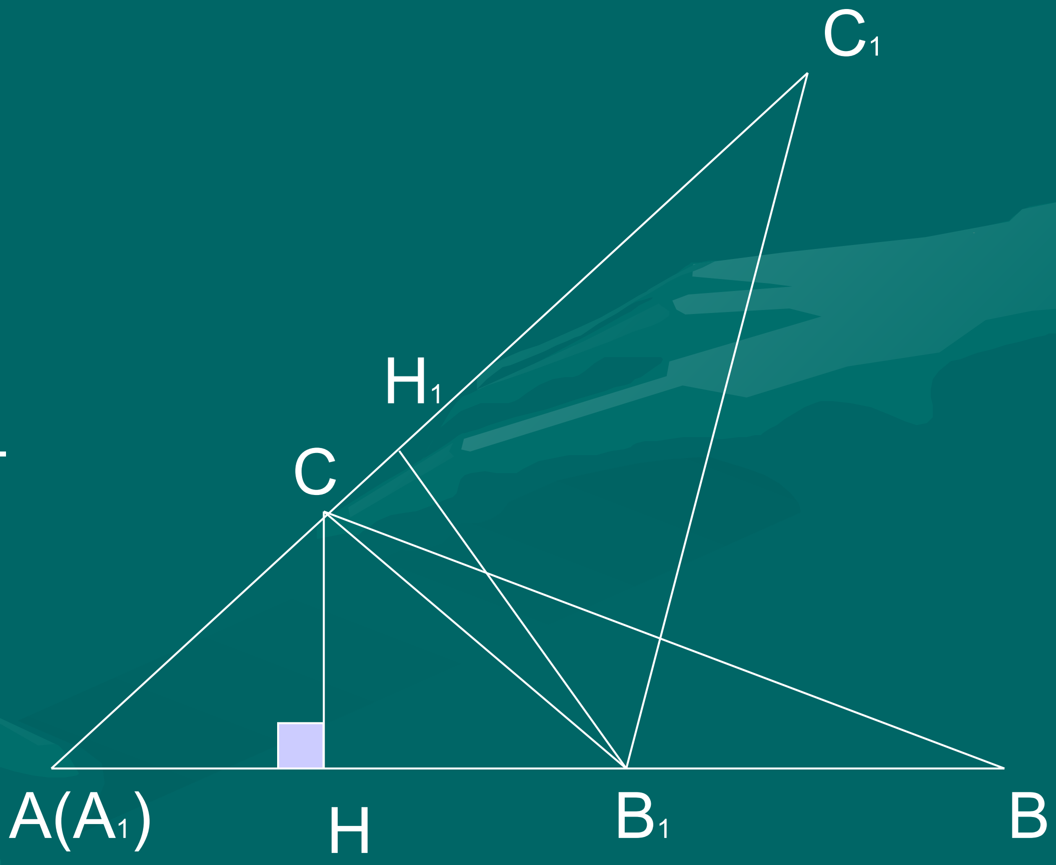
Пусть S и S_1– площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, у которых углы $A=A_1$.

Докажем, что

$S/S_1 = AB/A_1B_1 \cdot AC/A_1C_1$

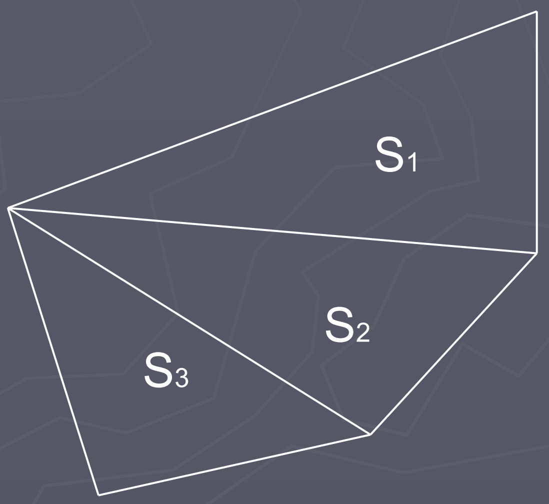


Наложим треугольники ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A, а стороны AB и AC наложились соответственно на лучи AB и AC. Треугольники ABC AB1C имеют общую высоту CH, поэтому $S/S_{AB_1C} = AB/AB_1$. Треугольники AB_1C AB_1C_1 также имеют общую высоту – B_1H_1 , поэтому S_{ABC}/S_{ABC} $=AC/AC_1$.Перемножаем полученные равенства. Теорема доказана.



Площадь трапеции.

Для вычисления площади произвольного многоугольника обычно поступают так: разбивают многоугольник на треугольники и находят площадь каждого треугольника. Сумма площадей этих треугольников равна площади данного многоугольника.



$S = S_1 + S_2 + S_3$

Теорема:

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.

Доказательство:

Рассмотрим трапецию ABCD с основанием AD и BC, высотой BH и площадью S. Докажем, что $S=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot BH$.

Диагональ BD разделяет трапецию на два треугольника ABD DCB, поэтому $S=S_{ABD}+S_{BCD}$.

Примем отрезки AD и BH за основание и высоту треугольника ABD, а отрезки BC и DH_1 за основания и высоту треугольника BCD. Тогда $S_{ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BH$, $S_{BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot DH_1$. Так как $DH_1=BH$, то $S_{BCD}=\frac{1}{2}AD\cdot BH$. Таким образом, $S=\frac{1}{2}AD\cdot BH+\frac{1}{2}BC\cdot BH=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot BH$.

Теорема доказана.