

Площадь

Работу выполняла ученица 11«4»  
класса  
Степанова Аня



# Основные свойства площадей.

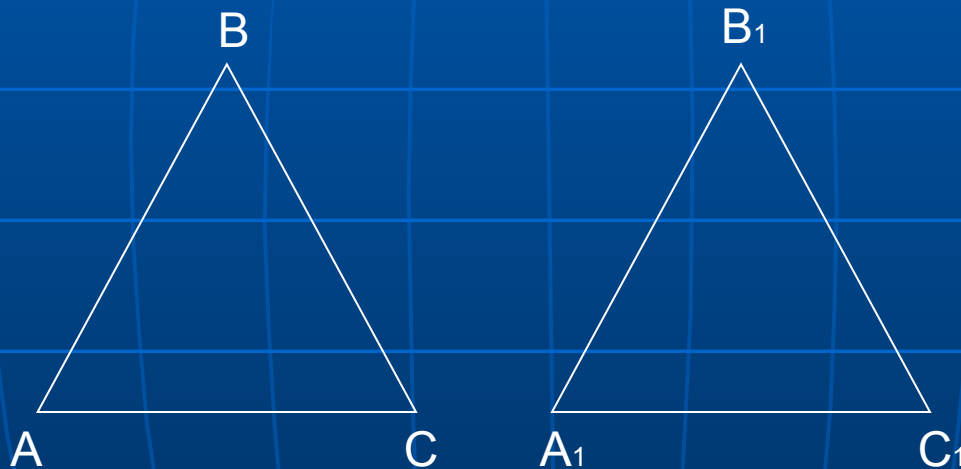
# Первое свойство:

Площадь плоской фигуры – неотрицательное число.



# Второе свойство:

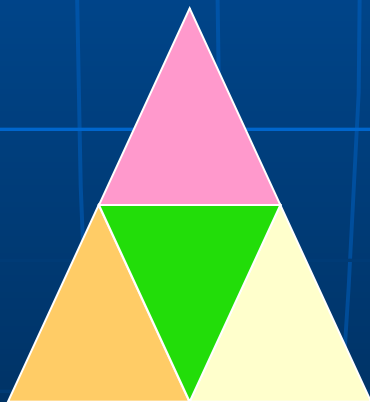
Площади равных фигур равны.



$$S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1}$$

## Третье свойство:

Если фигура разрезана на несколько частей, то ее площадь равна сумме площадей этих частей.

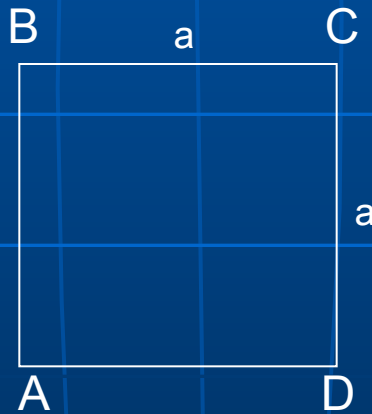


# Четвертое свойство:

Площадь квадрата со стороной 1  
равна 1.

$$a=1$$

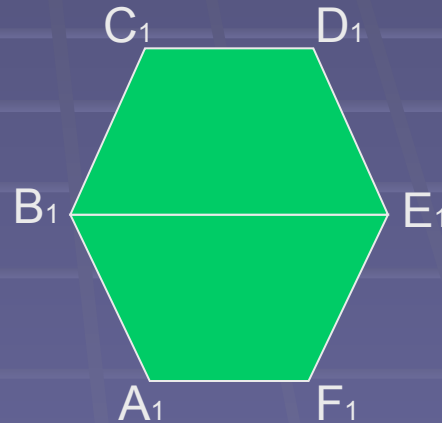
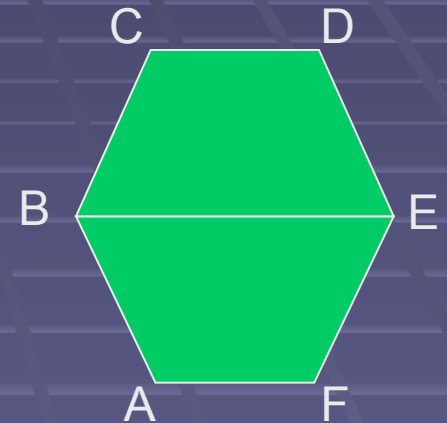
$$S_{ABCD} = a^2$$



# Разрезания и складывания

- Основной принцип метода "разрезания и складывания" основан на том, что если два многоугольника удастся разбить на одинаковые части (такие многоугольники называют *равнооставленными*), то отсюда вытекает, что площади этих многоугольников равны (фигуры, площади которых равны, называются *равновеликими*).

$$S_{ABCDEF} = S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}$$



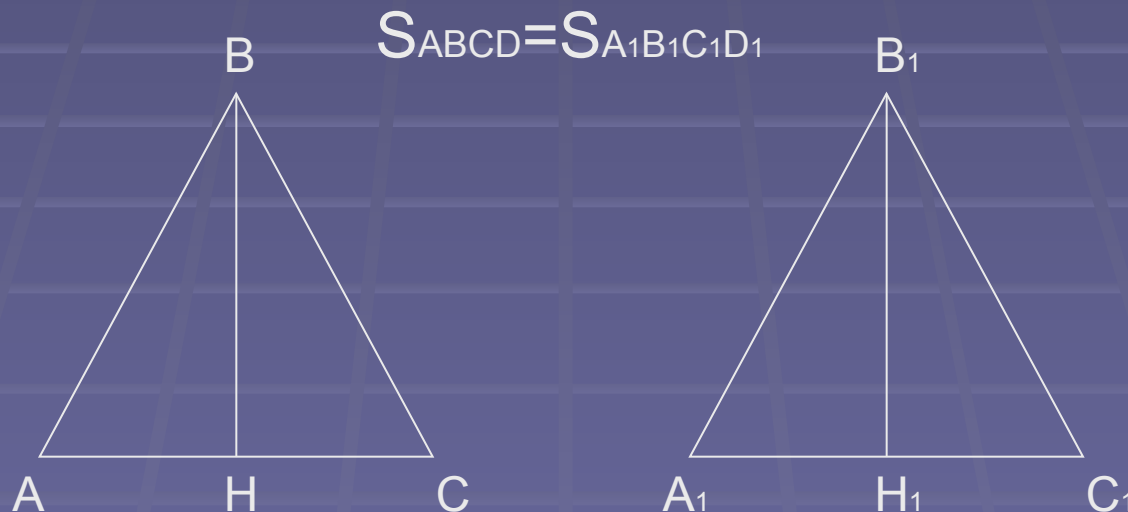


# *Теорема*

- ◆ Если два многоугольника равновелики, то один из них можно разрезать на части, из которых можно составить другой многоугольник.

# Отношения площадей

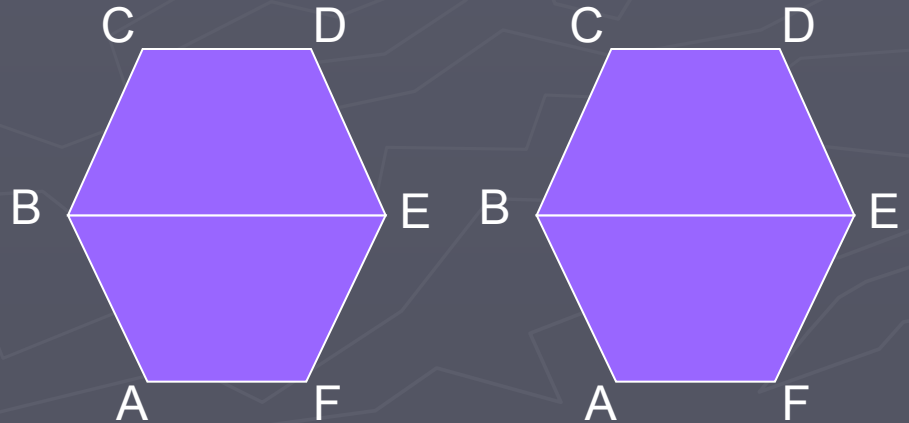
- для того, чтобы установить связь двух площадей, часто бывает удобно сравнивать площади двух треугольников, используя 5 свойство.



# Площадь многоугольника

1. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.
2. Равные многоугольники имеют равные площади.

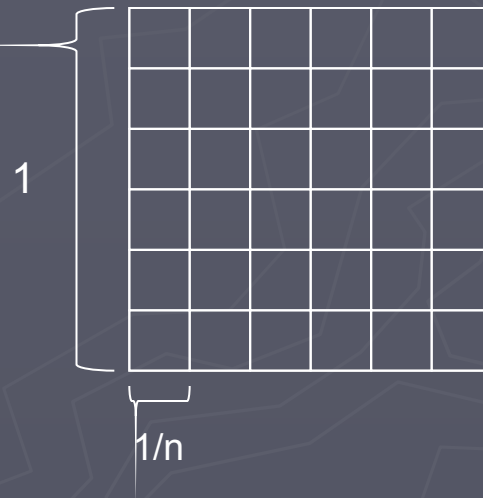
$$S_{ABCDEF} = S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}$$



# Площадь квадрата

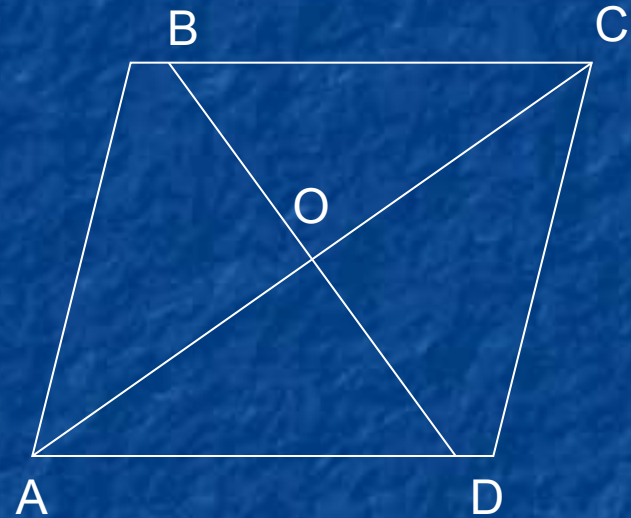
Рассмотрев 4 свойства, докажем, что площадь  $S$  квадрата со стороной  $a$  равна  $a^2$ .

Начнем с того случая, когда  $a=1/n$ . Где  $n$ -целое число. Возьмем квадрат со стороной 1 и разобьем его на  $n^2$  равных квадратов. Так как площадь большого квадрата равна 1 То площадь каждого маленького квадрата равна  $1/n^2$



# Задача

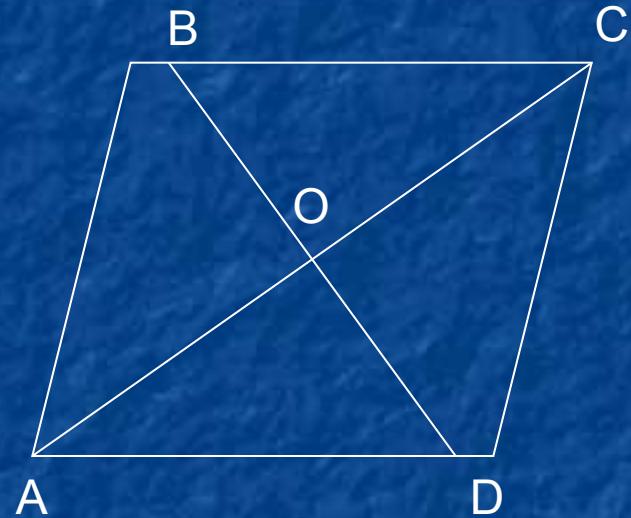
■ Пусть  $O$  – точка пересечения отрезков  $AC$  и  $BD$  (рис. 4.2). Докажите, что для того, чтобы площади треугольников  $AOB$  и  $COD$  были равны, необходимо и достаточно, чтобы прямые  $BC$  и  $AD$  были параллельны.



# Решение:

Для того, чтобы решить эту задачу, нужно доказать *два* утверждения:

1. Если прямые  $BC$  и  $AD$  параллельны, то площади треугольников  $AOB$  и  $COD$  равны;
2. Если площади треугольников  $AOB$  и  $COD$  равны, то прямые  $BC$  и  $AD$  параллельны.



$$S_{AOB} = S_{COD} \rightarrow BC \parallel AD$$

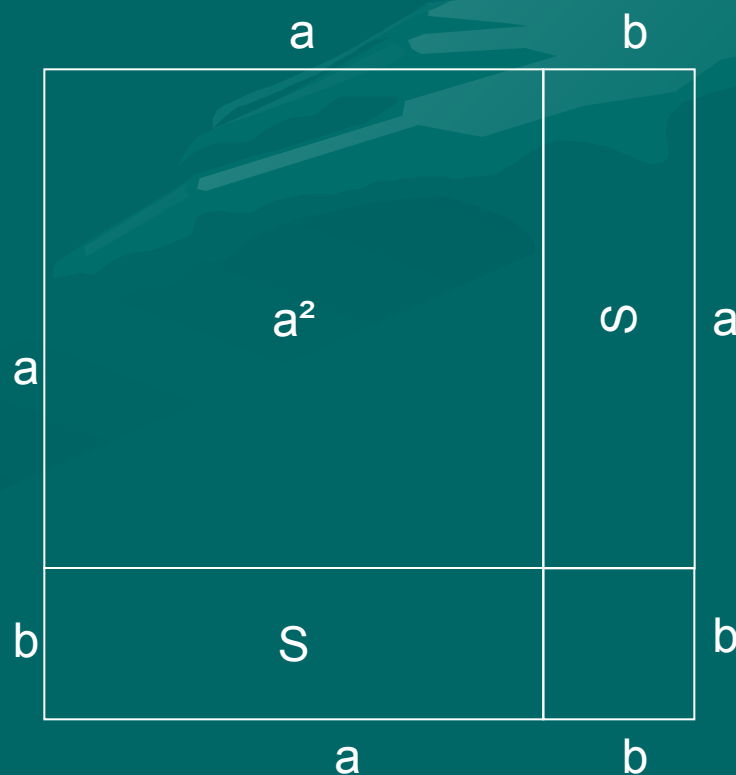
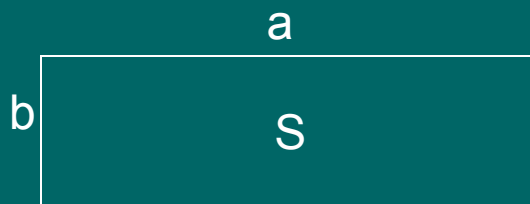
# Площадь прямоугольника.

*Теорема:*

Площадь прямоугольника равна  
произведению его смежных сторон.

## Доказательство теоремы:

- Достроим прямоугольник до квадрата со стороной  $a+b$ , площадь этого квадрата равна  $(a+b)^2$ .
- Рассмотрим прямоугольник со сторонами  $a$ ,  $b$  и площадью  $S$ . Докажем, что  $S=ab$ .





# решение

С другой стороны, этот квадрат составлен из данного прямоугольника с площадью  $S$ , равного ему прямоугольника с площадью  $S$  и двух квадратов с площадями  $a^2$  и  $b^2$ . Имеем:

$$(a+b)^2 = S + S + a^2 + b^2$$

Отсюда получаем  $S = ab$ .

Теорема доказана.

# Площадь параллелограмма.

*Теорема:*

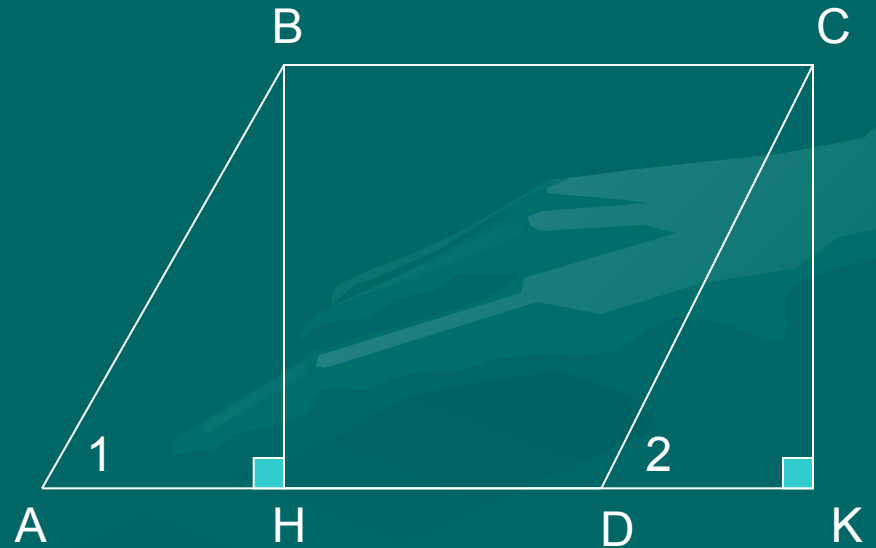
Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

## Доказательство:

Рассмотрим  
параллелограмм  $ABCD$   
с площадью  $S$ . Примем  
сторону  $AD$  за  
основание и проведем  
высоту  $BH$  и  $CK$ .

Требуется доказать, что

$$S = AD \cdot BH$$



Докажем сначала, что площадь прямоугольника  $HBSK$  также равна  $S$ . Трапеция  $ABSK$  составлена из параллелограмма  $ABCD$  и треугольника  $ДСК$ . С другой стороны, она составлена из прямоугольников  $HBSK$  и треугольник  $ABH$ . Но прямоугольные треугольники  $ДСК$  и  $ABH$  равны по гипотенузе и остр. углу ( $AB=CD$ , углы  $1=2$ ), поэтому их площади равны. Следовательно, площади параллелограмма  $ABCD$  и прямоугольника  $HBSK$  также равны, т. е. площадь прямоугольника  $HBSK$  равна  $S$ . По теореме о площади прямоугольника  $S=BC \cdot BH$ , а так как  $BC=AD$ , то  $S=AD \cdot BH$ . Теорема доказана.

# Площадь треугольника.

*Теорема:*

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CH$$

# Доказательство:

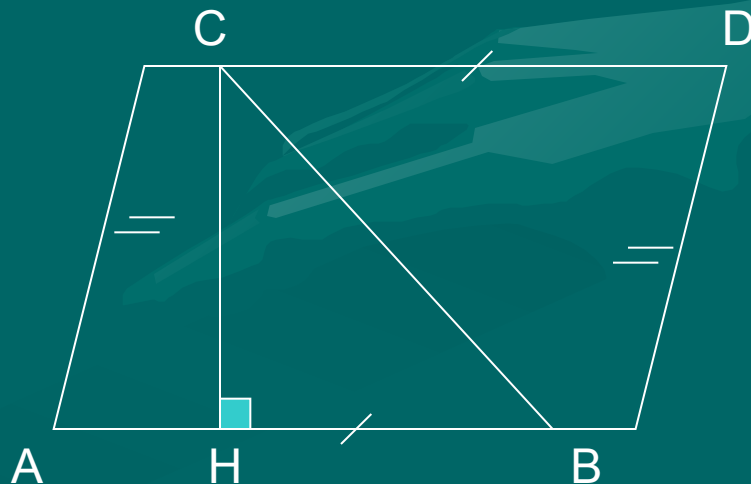
Пусть  $S$  – площадь треугольника  $ABC$ . Примем сторону  $AB$  за основание и проведем высоту  $CH$ . Докажем, что

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CH$$

Достроим треугольник  $ABC$  до параллелограмма  $ABDC$ .

Треугольники  $ABC$  и  $DCB$  равны по трем сторонам ( $BC$  – их общая сторона,  $AB = CD$  и  $AC = BD$ ), поэтому их площади равны. Следовательно, площадь

$S$  треугольника  $ABC$  равны половине площади параллелограмма  $ABDC$ , т. е.  $S = \frac{1}{2} AB \cdot CH$ . Теорема доказана.



## *Следствие 1:*

Площадь прямоугольного  
треугольника равна половине  
произведения его катетов.

## Следствие 2:

Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

Воспользовавшись этим следствием докажем теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу.



## *Теорема:*

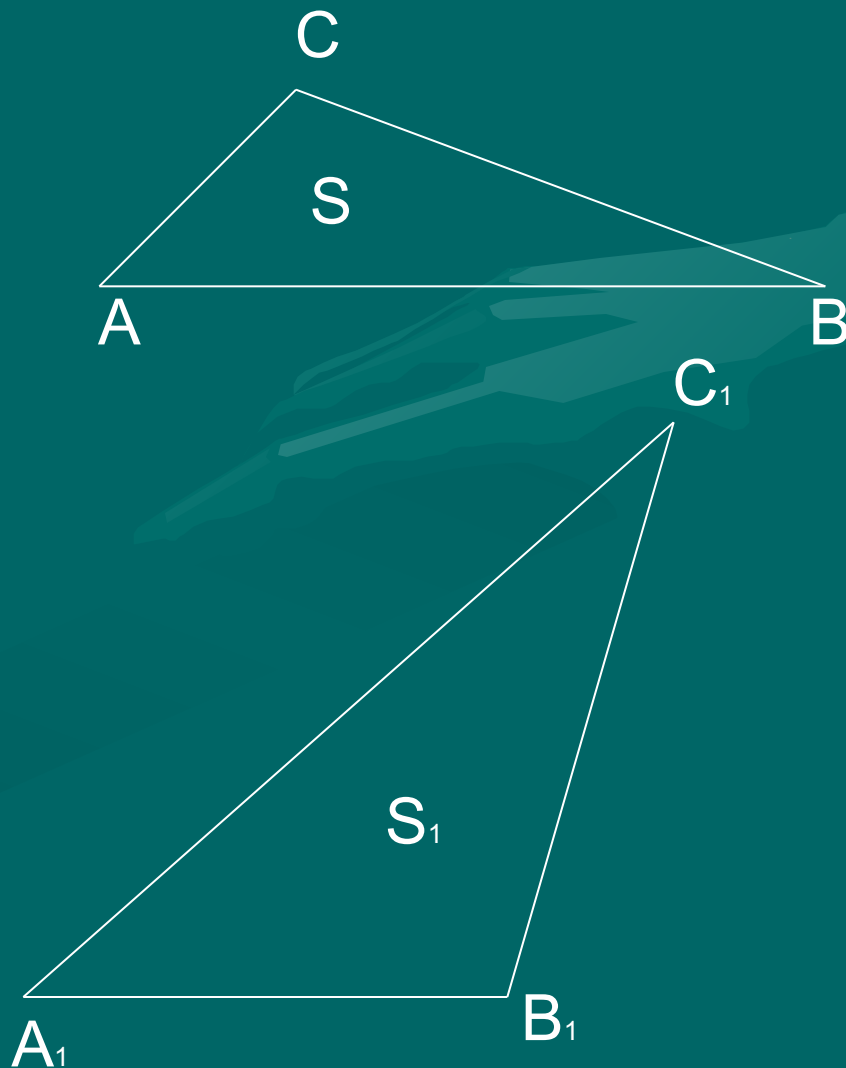
Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

## Доказательство:

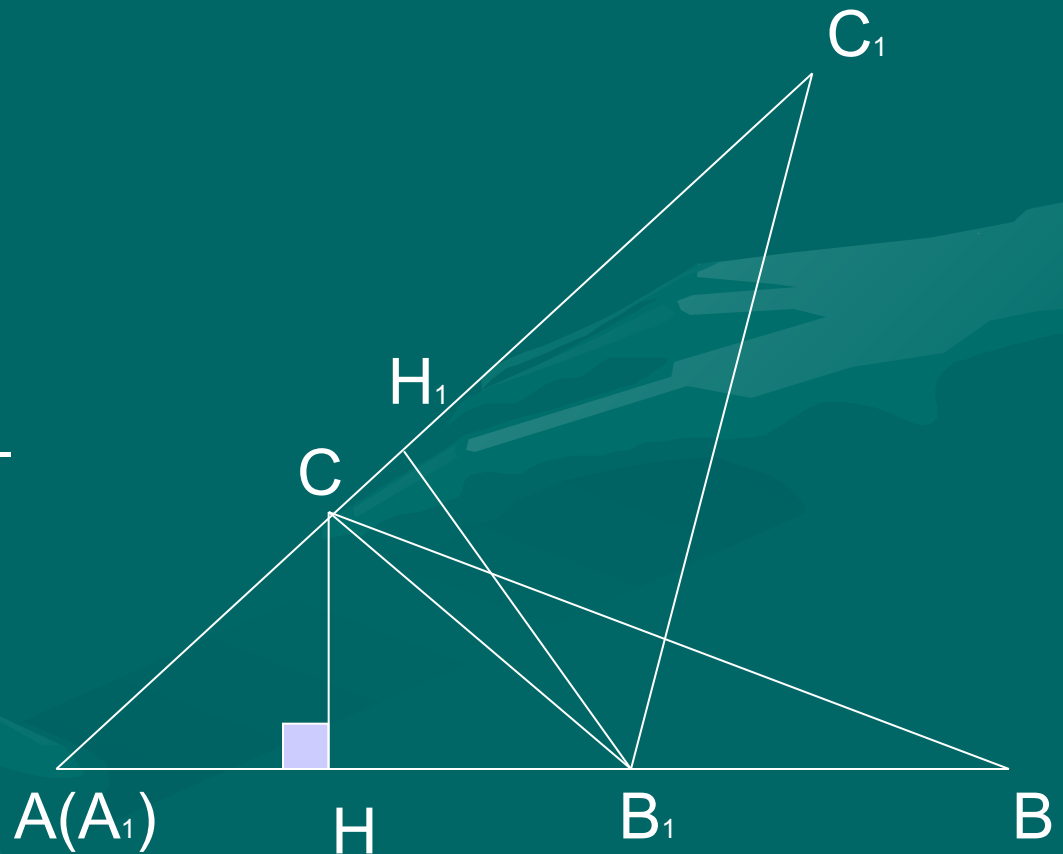
Пусть  $S$  и  $S_1$  — площади треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , у которых углы  $A=A_1$ .

Докажем, что

$$S/S_1 = AB/A_1B_1 \cdot AC/A_1C_1$$

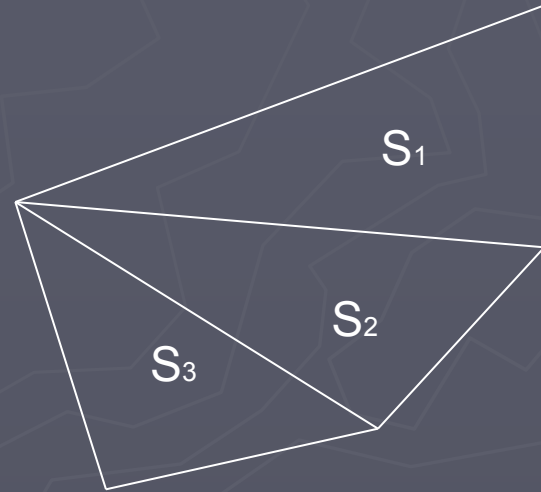


Наложим треугольники  $ABC$  на треугольник  $A_1B_1C_1$  так, чтобы вершина  $A$  совместилась с вершиной  $A_1$ , а стороны  $AB$  и  $AC$  наложились соответственно на лучи  $A_1B_1$  и  $A_1C_1$ . Треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  имеют общую высоту  $CH$ , поэтому  $S_{ABC}/S_{A_1B_1C_1} = AB/A_1B_1$ . Треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  также имеют общую высоту —  $B_1H_1$ , поэтому  $S_{ABC}/S_{A_1B_1C_1} = AC/A_1C_1$ . Перемножаем полученные равенства. Теорема доказана.



# Площадь трапеции.

Для вычисления площади произвольного многоугольника обычно поступают так: разбивают многоугольник на треугольники и находят площадь каждого треугольника. Сумма площадей этих треугольников равна площади данного многоугольника.



$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

# *Теорема:*

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.

# Доказательство:

Рассмотрим трапецию  $ABCD$  с основанием  $AD$  и  $BC$ , высотой  $BH$  и площадью  $S$ . Докажем, что  $S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH$ .

Диагональ  $BD$  разделяет трапецию на два треугольника  $ABD$  и  $BCD$ , поэтому  $S = S_{ABD} + S_{BCD}$ .

Примем отрезки  $AD$  и  $BH$  за основание и высоту треугольника  $ABD$ , а отрезки  $BC$  и  $DH_1$  за основания и высоту треугольника  $BCD$ . Тогда

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BH, \quad S_{BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot DH_1.$$

Так как  $DH_1 = BH$ , то  $S_{BCD} = \frac{1}{2}AD \cdot BH$ . Таким образом,  $S = \frac{1}{2}AD \cdot BH + \frac{1}{2}BC \cdot BH = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH$ .

Теорема доказана.

