

Аналитическая геометрия

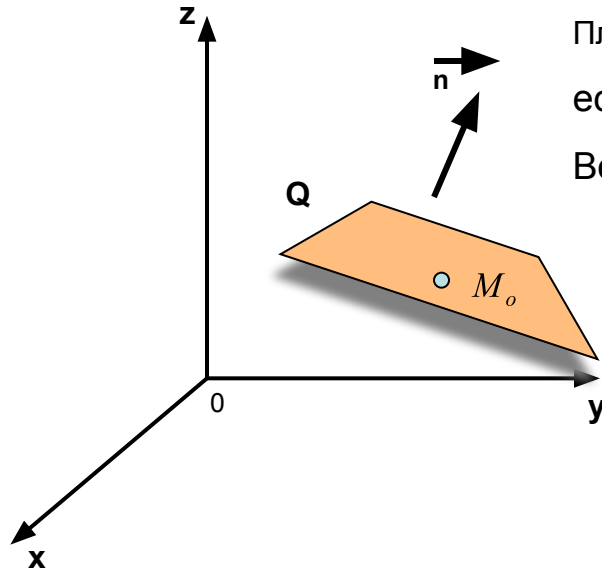
A faint, stylized illustration of a balance scale is visible in the background. The scale is positioned on the right side of the frame, with its vertical column and horizontal beam extending across the top. Two pans are suspended from the beam by thin lines. The entire scene is set against a solid, dark brown background.

Часть 2

Геометрия в пространстве

Аналитическая геометрия в пространстве.

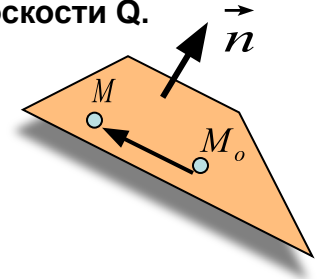
- Уравнения плоскости.



Плоскость Q определена единственным образом, если задана одна точка $M_o \in Q$ и вектор $\vec{n} \perp Q$. Вектор $\vec{n} \perp Q$ называют **нормальным** вектором.

Необходимое и достаточное условие того, что точка M принадлежит плоскости Q .

$$\overrightarrow{M_oM} \perp \vec{n}$$



- 1. Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору.

- Заданы: точка $M_o(x_o, y_o, z_o)$
- и нормальный вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$
- Уравнение плоскости:

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$$

Пусть точка $M(x, y, z) \in Q$
 Тогда $\overrightarrow{M_oM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_oM} \cdot \vec{n} = 0$



Аналитическая геометрия в пространстве.

- **2. Общее уравнение плоскости.**

- Уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

- называется **общим уравнением плоскости**.
- Коэффициенты **A, B, C** в уравнении определяют **координаты нормального вектора**:

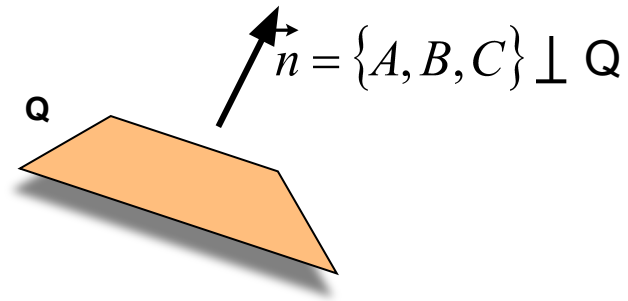
$$\vec{n} = \{A, B, C\}$$

Теорема.

Всякое уравнение первой степени с тремя переменными **x, y, z** вида

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

задает **плоскость** в пространстве и наоборот, **всякая плоскость** в пространстве может быть задана уравнением с тремя переменными **x, y, z** вида (1).



Аналитическая геометрия в пространстве.

3. Исследование общего уравнения плоскости.

- 1. Коэффициент $D=0$ \Rightarrow точка $O(0,0,0) \in Q$ (рис. 1)
- 2. Коэффициент $A=0$ $\Rightarrow \vec{n} = (0, B, C) \perp OX \Rightarrow Q \parallel OX$ (рис. 2)
- 3. Коэффициент $B=0$ $\Rightarrow \vec{n} = (A, 0, C) \perp OY \Rightarrow Q \parallel OY$ (рис. 3)
- 4. Коэффициент $C=0$ $\Rightarrow \vec{n} = (A, B, 0) \perp OZ \Rightarrow Q \parallel OZ$ (рис. 4)

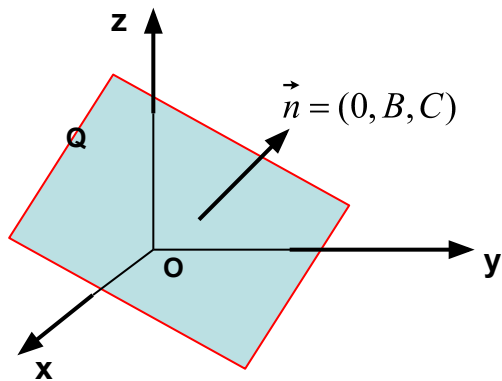


Рис. 2

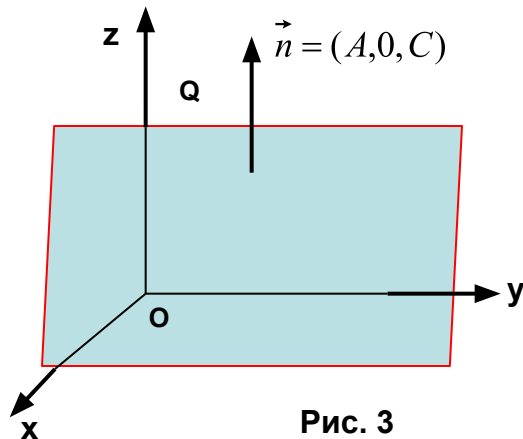


Рис. 3

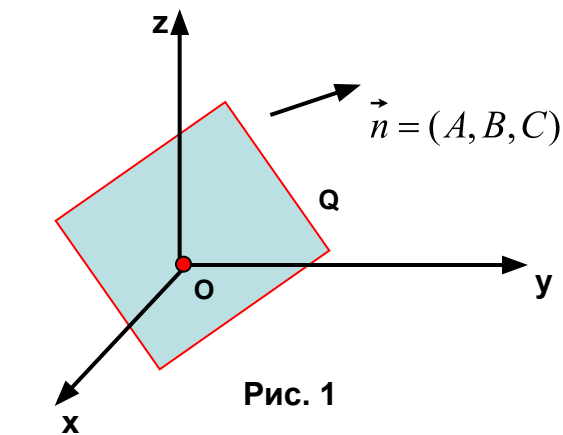


Рис. 1

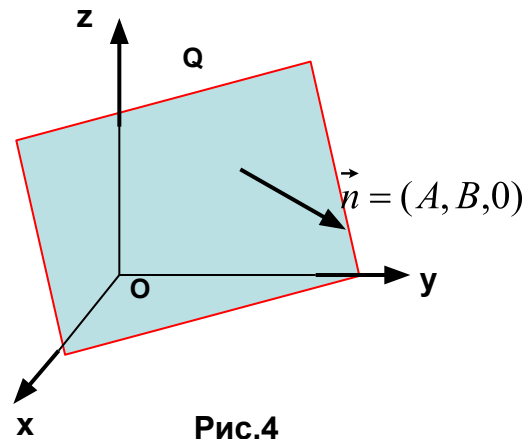
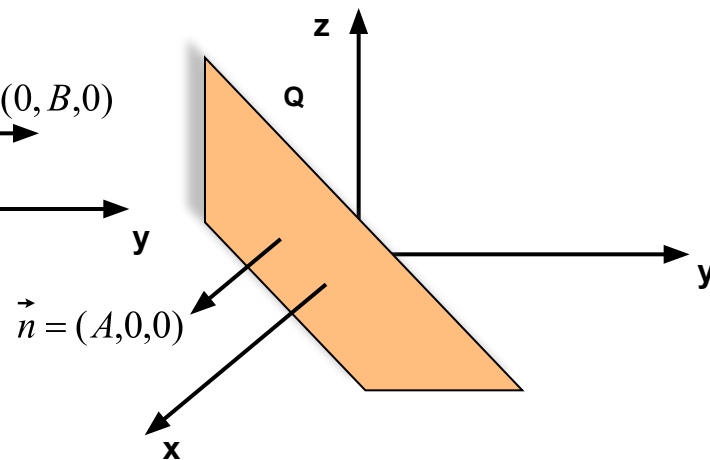
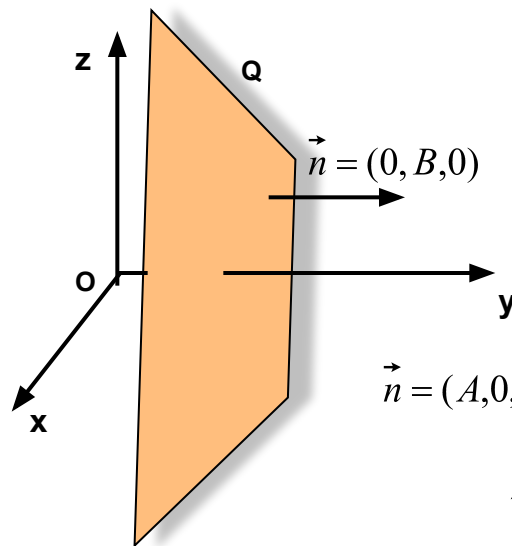
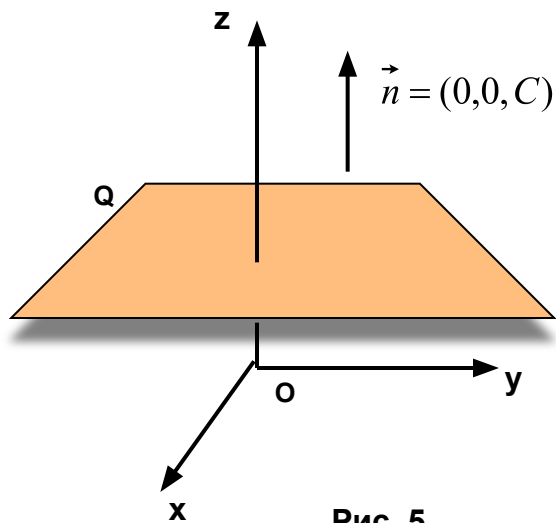


Рис. 4

Аналитическая геометрия в пространстве.

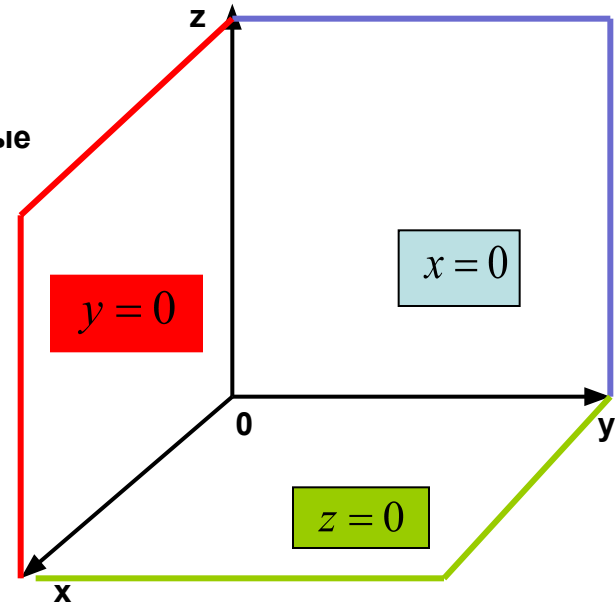
- 5. Коэффициенты $A=B=0 \Rightarrow \vec{n} = (0,0,C) \parallel OZ \Rightarrow Q \perp OZ$ (рис. 5)
- 6. Коэффициенты $A=C=0 \Rightarrow \vec{n} = (0,B,0) \parallel OY \Rightarrow Q \perp OY$ (рис. 6)
- 7. Коэффициенты $B=C=0 \Rightarrow \vec{n} = (A,0,0) \parallel OX \Rightarrow Q \perp OX$ (рис. 7)



Аналитическая геометрия в пространстве.

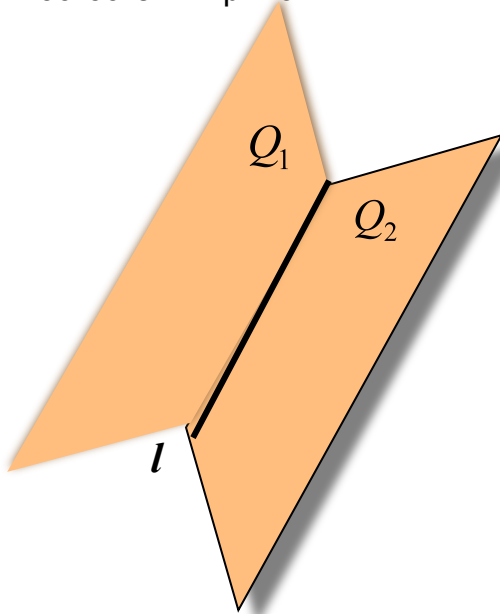
- 8. Коэффициенты $A=B=D=0 \Rightarrow z = 0$
- 9. Коэффициенты $A=C=D=0 \Rightarrow y = 0$
- 10. Коэффициенты $B=C=D=0 \Rightarrow x = 0$

Координатные
плоскости



Аналитическая геометрия в пространстве.

- Уравнения прямой в пространстве.
- 1. Общее уравнение прямой.
 - Аксиома: линия пересечения двух плоскостей – прямая.



$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (Q_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (Q_2) \end{cases} \quad (2)$$

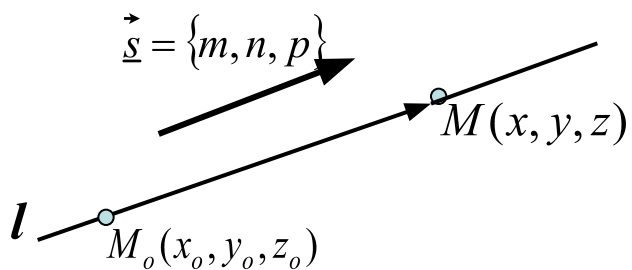
Теорема.

Система уравнений (2) определяет **прямую в пространстве** тогда и только тогда, когда коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2

Система уравнений (2) называется **общим уравнением** прямой.

Аналитическая геометрия в пространстве.

- 2. Канонические уравнения прямой.



$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (= \lambda)$$

Пусть точка $M(x, y, z) \in l$.
Тогда $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = \lambda \vec{s}$

- 3. Параметрические уравнения прямой.

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = \lambda \Rightarrow x = x_0 + \lambda m \\ \frac{y - y_0}{n} = \lambda \Rightarrow y = y_0 + \lambda n \\ \frac{z - z_0}{p} = \lambda \Rightarrow z = z_0 + \lambda p \end{cases}$$

$$l: \begin{cases} x = x_0 + \lambda m \\ y = y_0 + \lambda n \\ z = z_0 + \lambda p \end{cases}$$

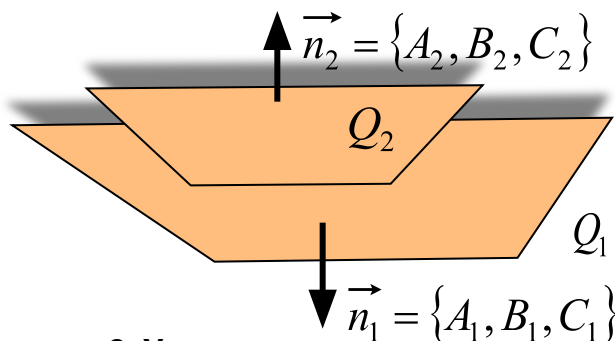
$-\infty \square \lambda \square \infty$ – параметр

Аналитическая геометрия в пространстве.

- **Взаимное расположение плоскостей и прямых в пространстве.**

- 1. **Условие параллельности плоскостей.** $Q_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

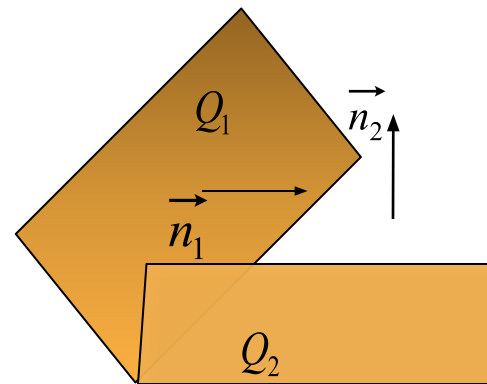
$$Q_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$



$$Q_1 \parallel Q_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

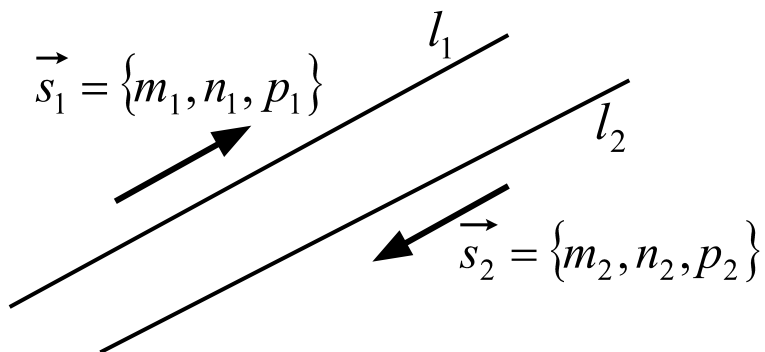
- 2. **Условие перпендикулярности плоскостей.**

$$Q_1 \perp Q_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$



Аналитическая геометрия в пространстве.

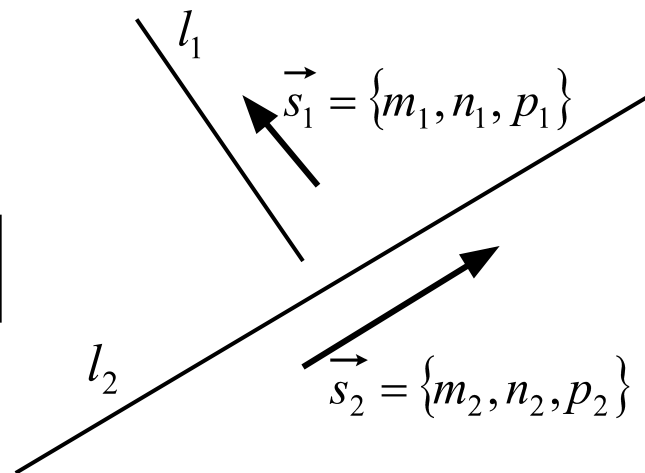
- 3. Условие параллельности прямых.



$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}}$$

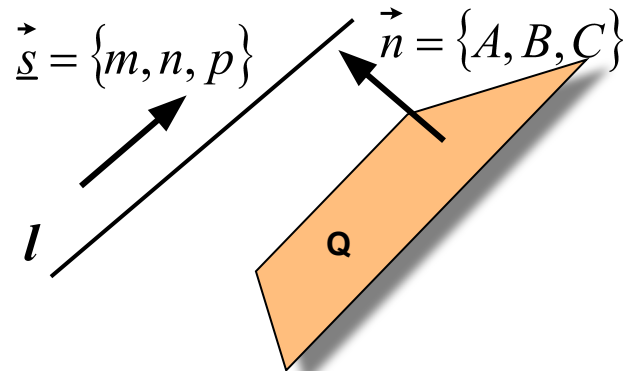
- 4. Условие перпендикулярности прямых.

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow \boxed{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0}$$



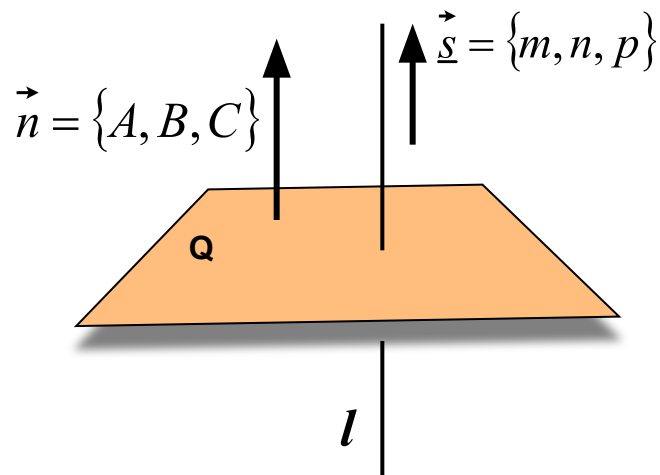
Аналитическая геометрия в пространстве.

- 5. Условие параллельности прямой и плоскости.



$$l \parallel Q \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{s} \vec{n} = 0 \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$$

- 6. Условие перпендикулярности прямой и плоскости.



$$l \perp Q \Leftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$$