

Подобные треугольники

Оглавление



Определение подобных треугольников



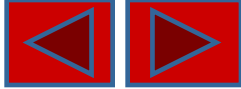
Признаки подобия треугольников



Применение подобия к доказательству теорем



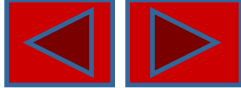
Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника



Определение подобных треугольников

- 1.1. Пропорциональные отрезки.
 - 1.2. Определение подобных треугольников
 - 1.3. Отношение площадей подобных треугольников.
 - 1.4. Свойства подобия.
-





1.1 Пропорциональные отрезки.

Отношением отрезков AB и CD называется отношение их длин, т. е.

$$\frac{AB}{CD}$$

Говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1 , если

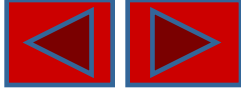
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$$

ПРИМЕР №1.

Отрезки AB и CD , длины которых равны 2 см и 1 см, пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1 , отрезки которых равны 3 см и 1,5 см. В самом деле,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{2}{3}$$



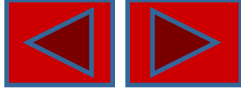


1.2. Определение подобных треугольников.



В повседневной жизни встречаются предметы одинаковой формы, но разных размеров, например футбольный и теннисный мячи, круглая тарелка и большое круглое блюдо. В геометрии фигуры одинаковой формы принято называть подобными. Так, подобными являются любые два квадрата, любые два круга. Введем понятие подобных треугольников.

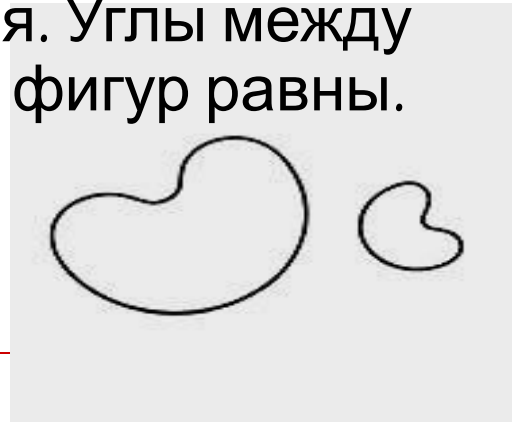


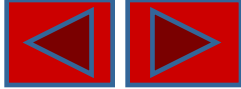


1.2. Определение подобных треугольников.

ПОДОБИЕ, геометрическое понятие, характеризующее наличие одинаковой формы у геометрических фигур, независимо от их размеров. Две фигуры $F1$ и $F2$ называются подобными, если между их точками можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором отношение расстояний между любыми парами соответствующих точек фигур $F1$ и $F2$ равно одной и той же постоянной k , называемой коэффициентом подобия. Углы между соответствующими линиями подобных фигур равны.

Подобные фигуры $F1$ и $F2$.



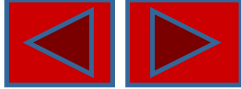


1.2. Определение подобных треугольников.

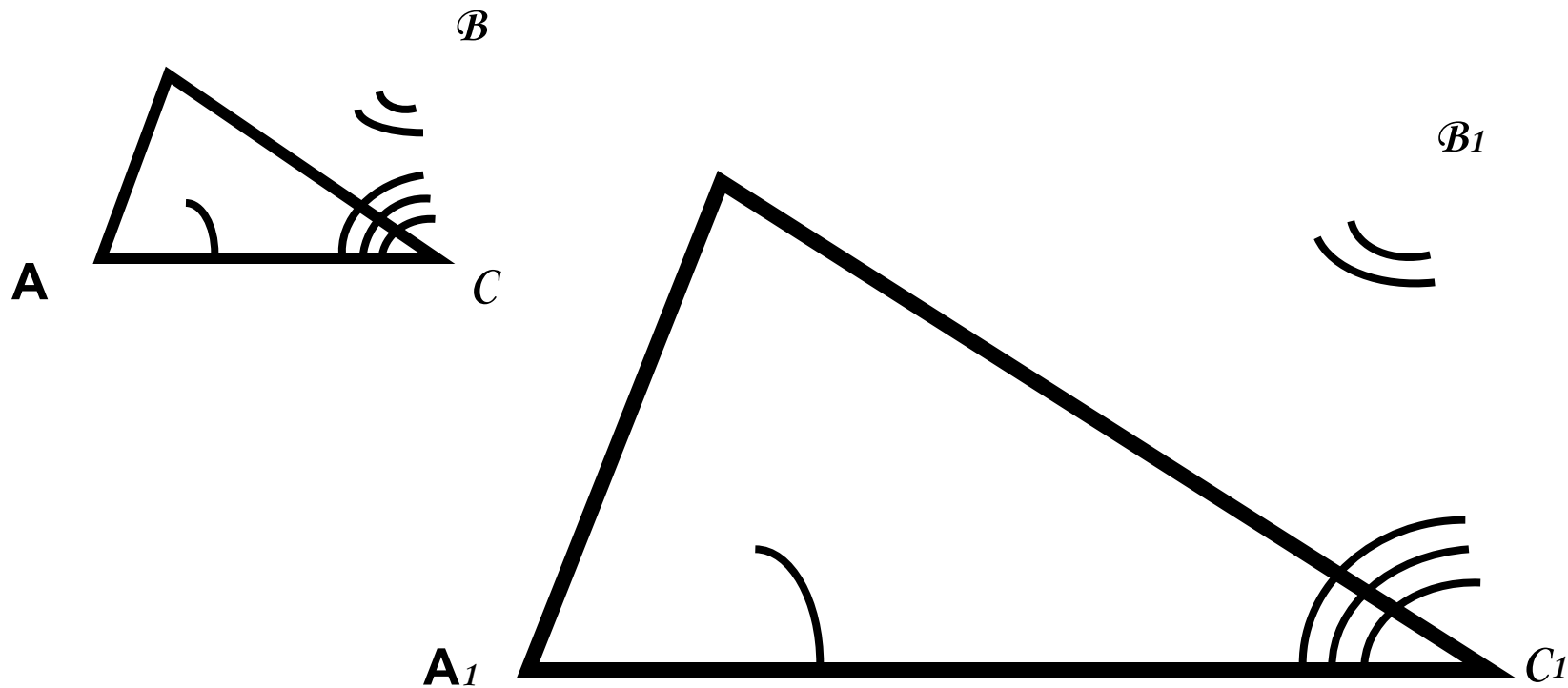
□ Задача № 1.

Пусть у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. В этом случае стороны AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , CA и C_1A_1 называются сходными.



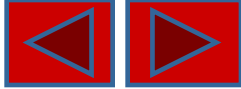


1.2. Определение подобных треугольников.



AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , CA и C_1A_1 - сходственные стороны





1.2. Определение подобных треугольников.

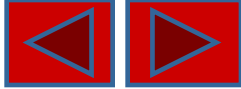
Определение. Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.

Другими словами, два треугольника подобны, если их можно обозначить буквами ABC и $A_1B_1C_1$ так, что $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$$

Число k , равное отношению сходственных сторон треугольников, называется коэффициентом подобия.





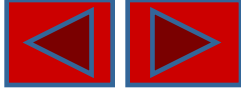
1.2. Определение подобных треугольников.

Подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так :

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

[Нажмите сюда и увидите подобные треугольники](#)





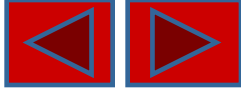
1.3. Отношение площадей подобных треугольников.

Теорема. Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Доказательство. Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и коэффициент подобия равен k . Обозначим буквами S и S_1 площади этих треугольников. Так как

$$A = A_1, \text{ то } \frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$$





1.3. Отношение площадей подобных треугольников.

По формулам имеем:

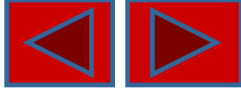
$$\frac{AB}{A_1B_1} = k, \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

поэтому

$$\frac{S}{S_1} = k^2$$

Теорема доказана.





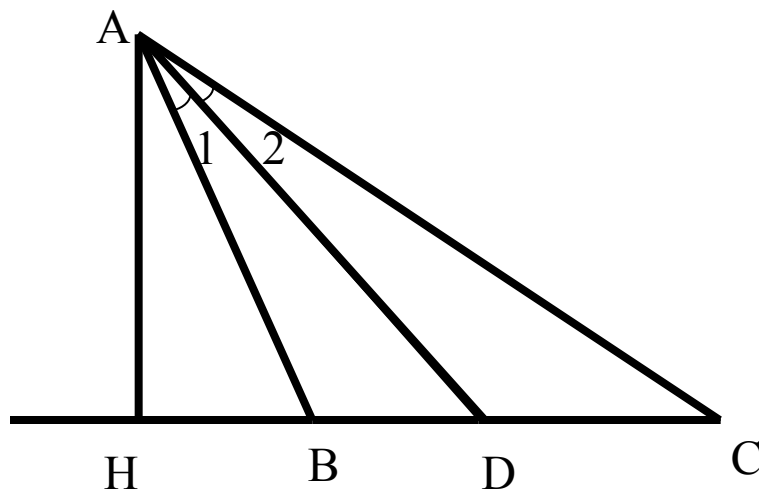
Свойства подобия.

Задача №2.

Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника

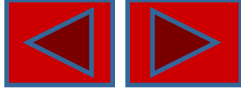
Решение.

Пусть AD – биссектриса треугольника ABC . Докажем, что $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$.



Треугольники ABD и ACD имеют общую высоту AH , поэтому $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{DC}$





Свойства подобия.

С другой стороны, эти же треугольники имеют по равному углу ($\angle A = \angle A_1$), поэтому

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AD} = \frac{AB}{AC}$$

Из двух равенств для отношений площадей получаем

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \qquad \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$$

, или

Что и требовалось доказать.





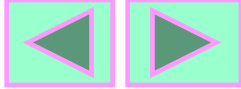
Признаки подобия треугольников

 *Первый признак*

 *Второй признак*

 *Третий признак*



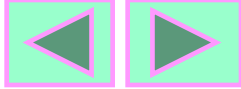


Первый признак

Теорема: Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle A_1 \\ \angle B = \angle B_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1$$





Первый признак



Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$

$$\angle A = \angle A_1$$

$$\angle B = \angle B_1$$

Доказать: $ABC \sim A_1B_1C_1$

ABC

Доказательство:

По теореме о сумме углов: $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$, а $\angle C_1 = 180^\circ - \angle A_1 - \angle B_1$, значит $\angle C = \angle C_1$.

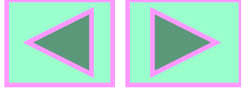
Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ и $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AC \cdot CB}{A_1C_1 \cdot C_1B_1}$

От этого следует: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$

Получается, что сходственные стороны

пропорциональны



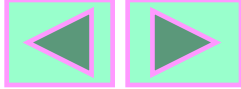


Второй признак

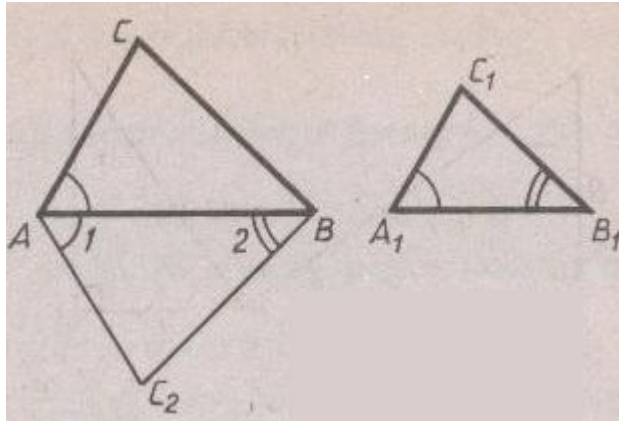
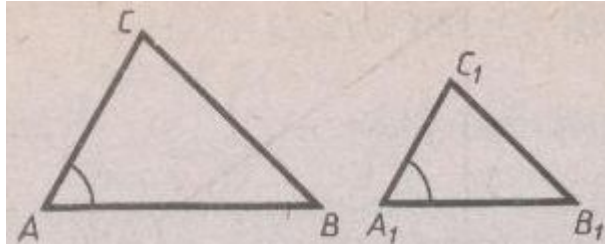
Теорема. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \\ \angle A = \angle A_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$





Второй признак



Дано $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \quad \angle A = \angle A_1$$

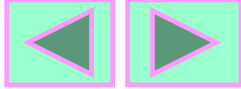
Д- $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle ABC_2$, у которого $\angle 2 = \angle B_1$

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по первому признаку), значит $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, с другой стороны $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, из этих равенств получается $AC = AC_2$. $\triangle ABC = \triangle ABC_2$ - по двум сторонам и углу между ними (AB - общая сторона, $\angle A = \angle A_1$, $AC = AC_2$ и $\angle 2 = \angle B_1$), значит $\angle 2 = \angle B$ и $\angle 2 = \angle B_1$, $\angle B = \angle B_1$ ■



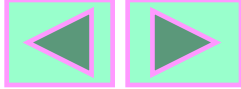


Третий признак

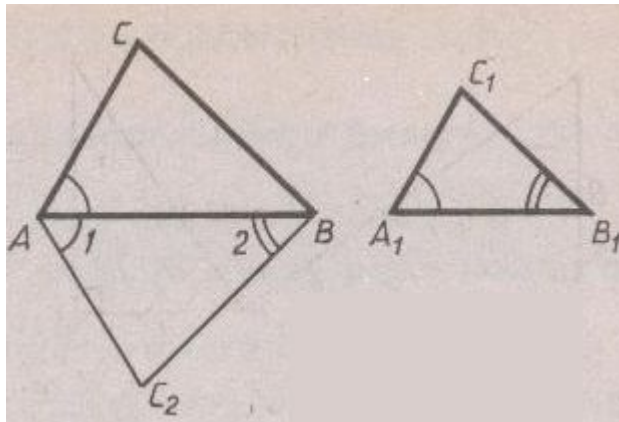
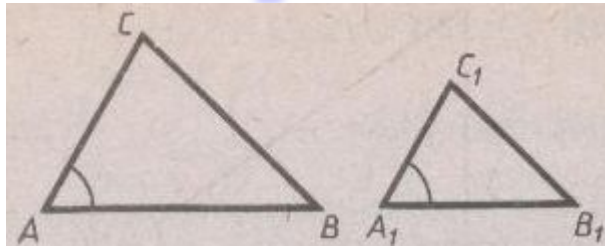
Теорема: Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобные.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k \implies \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$





Третий признак



Дано: $\triangle ABC$ и

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

Д-ть: $\triangle ABC \sim \triangle$

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle ABC_2$, у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$

$\triangle ABC_2 \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по первому признаку), $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC_2}{B_1C_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1} = k$

Значит $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC_2}{B_1C_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1} = k \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ABC_2$

значит $\angle A = \angle 1$, а так как $\angle 1 = \angle A_1$, то $\angle A = \angle A_1$

Значит $\triangle ABC \sim \triangle$

Т $\triangle ABC$



Применение подобия к доказательству теорем и задач



Средняя линия треугольника



Медианы в треугольнике



Высота в треугольнике



Среднее пропорциональное



Следствие 1



Следствие 2



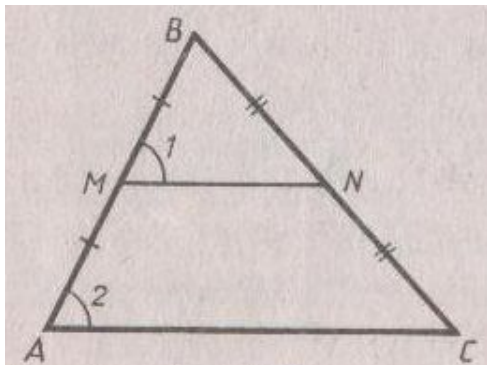
Средняя линия треугольника

Средняя линия треугольника – это отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Теорема: Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.



Средняя линия треугольника



Дано $\triangle ABC$

MN – средняя линия

Доказать:

$MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$

Доказательство:

$\triangle VMN$ и $\triangle VAC$ – подобны, так как

- 1) $\angle V$ – общий
- 2) $VM:VA = VN:VC = 1:2$

Значит $\angle VMN = \angle VAC$ и $MN/AC = 1/2$

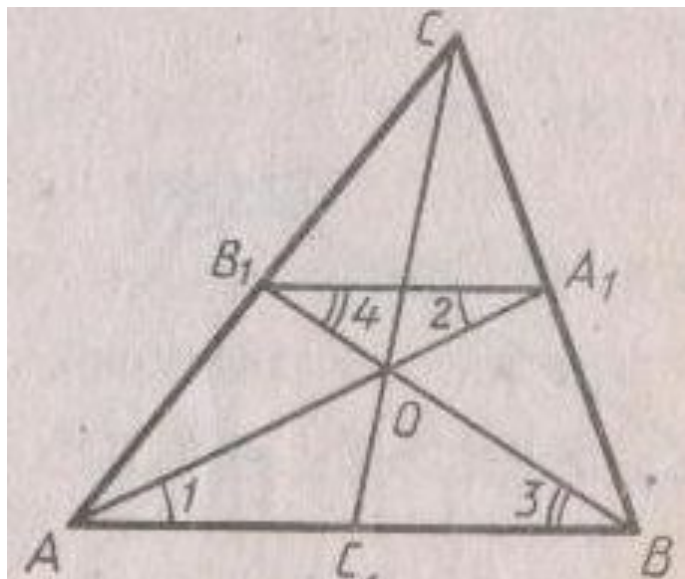
То $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$

Теорема доказана. ■



Медианы в треугольнике

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.



Дано: $\triangle ABC$

т.О – пересечение
медиан

$$BB_1 \cap AA_1 \cap CC_1 = O$$

Доказать: $\frac{AO}{OC_1} = \frac{BO}{OA_1} = \frac{CO}{OB_1} = \frac{2}{1}$



Медианы в треугольнике

Доказательство:

A_1B_1 – средняя линия, и $A_1B_1 \parallel AB$, поэтому $\angle 2 = \angle 3$ и $\angle 4$

Значит $\triangle AOB \sim \triangle A_1OB_1$ (по двум углам) $\frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AB}{A_1B_1}$

Но $AB = 2A_1B_1$, поэтому $AO = 2A_1O$ и $BO = 2B_1O$. Значит точка O – пересечение медиан AA_1 и BB_1 делит каждую из них в отношении $2:1$, считая от вершины.

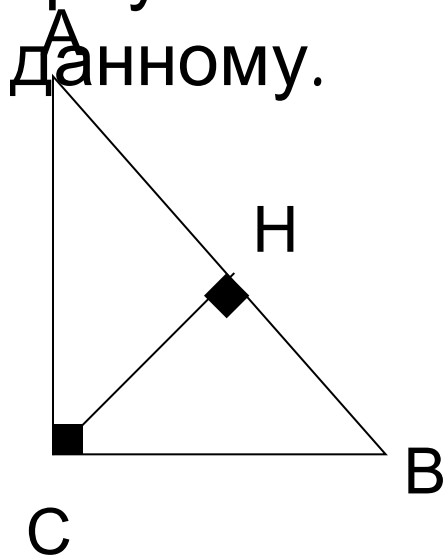
Аналогично доказывается, что точка O – пересечение медиан BB_1 и CC_1 делит каждую из них в отношении $2:1$, считая от вершины.

Значит точка O – пересечения медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 делит их в отношении $2:1$, считая от вершины. ■



Высота в треугольнике

Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных треугольника, каждый из которых подобен данному.



Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный
CH – высота

Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle ACH$

$\triangle ABC \sim \triangle CBH$

$\triangle ACH \sim \triangle CBH$



Высота в треугольнике

Доказательство:

$\triangle ABC \cong \triangle ACH$ (по двум углам: A - как общий и
прямым),

$\triangle ABC \cong \triangle BCH$ (по двум углам: B - общий и
прямыми),

Рассмотрим $\triangle ACH$ и $\triangle BCH$ - прямоугольные

1) угол $\angle HCA = \angle HCB$ - прямые углы

2) угол $\angle A = \angle B$

Значит $\triangle ACH \cong \triangle BCH$. ■



Среднее пропорциональное

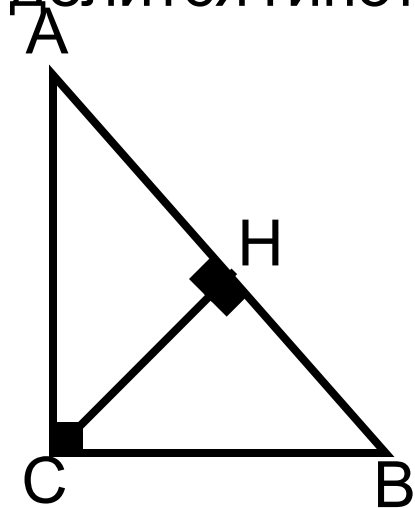
Отрезок $X\gamma$ называется средним пропорциональным (или средним геометрическим) между отрезками AB и CD , если

$$X\gamma = \sqrt{AB \cdot CD}$$



Следствие 1

Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой.



Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный

CH – высота

Доказать: $CH = \sqrt{AH \cdot HB}$

Доказательство:

$\triangle AHC \sim \triangle CHB$, поэтому $\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{HB}$

Следовательно

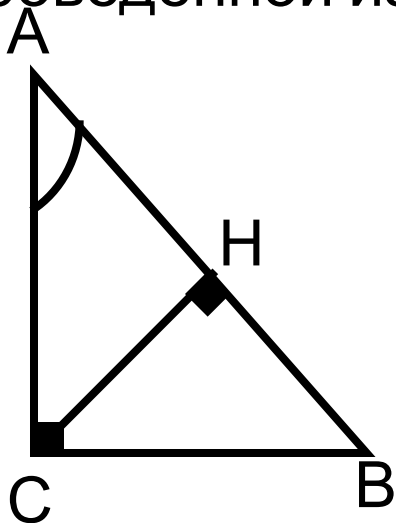
$$CH^2 = AH \cdot HB \quad \Rightarrow \quad CH = \sqrt{AH \cdot HB}$$

Значит



Следствие 2

Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключенным между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла.



Дано: $\triangle ABC$ –
прямоугольный

CH – высота $AC = \sqrt{AB \cdot AH}$

Доказать:
Доказательство:

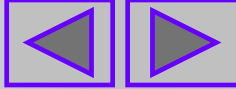
$\triangle ABC \sim \triangle ACH$ (по двум углам),

поэтому

$$\frac{CA}{AB} = \frac{AH}{AC}$$

Значи $AC = \sqrt{AB \cdot AH}$ ■

т



Соотношение между сторонами и углами прямоугольного тре



Синус



Косинус



Тангенс



Котангенс

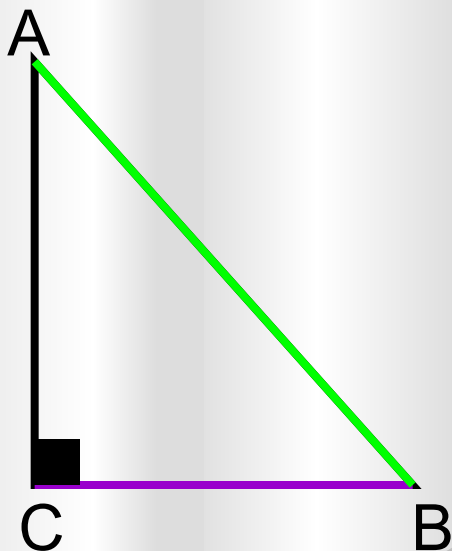
ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖ





СИНУС

Синус острого угла прямоугольного треугольника – это отношение противолежащего катета к гипотенузе.



$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

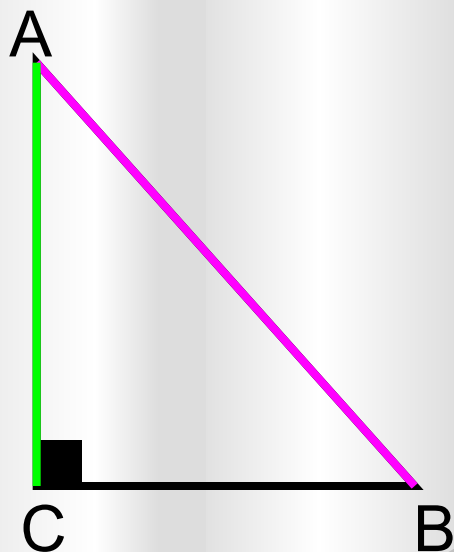




Косинус

Косинус острого угла прямоугольного треугольника –

это отношение прилежащего катета к гипотенузе.



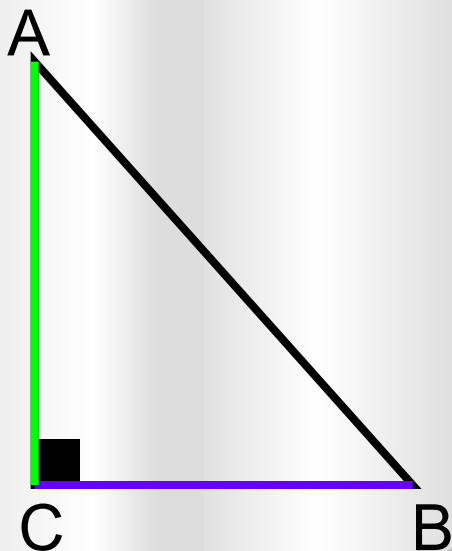
$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$





Тангенс

Тангенс острого угла прямоугольного треугольника – это отношение противолежащего катета к прилежащему катету.



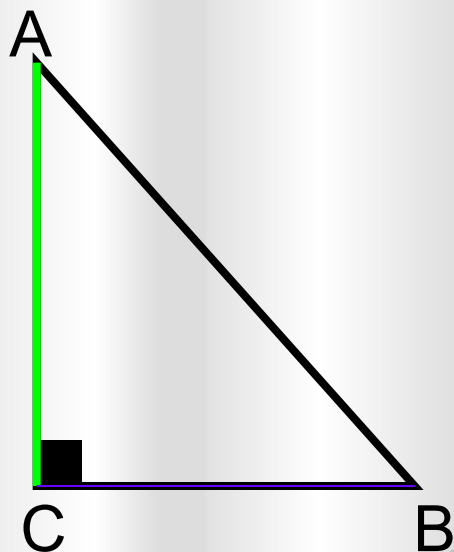
$$tgA = \frac{BC}{AC} = \frac{\sin A}{\cos A}$$





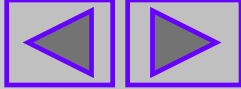
Котангенс

Тангенс острого угла прямоугольного треугольника – это отношение прилежащего катета к противолежащему катету.



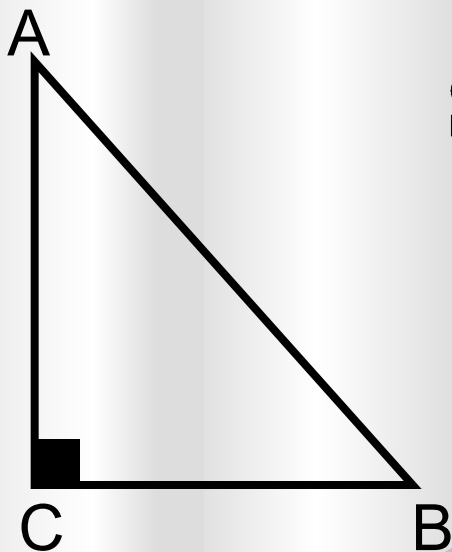
$$ctg A = \frac{AC}{BC}$$





ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА.

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$



$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$$



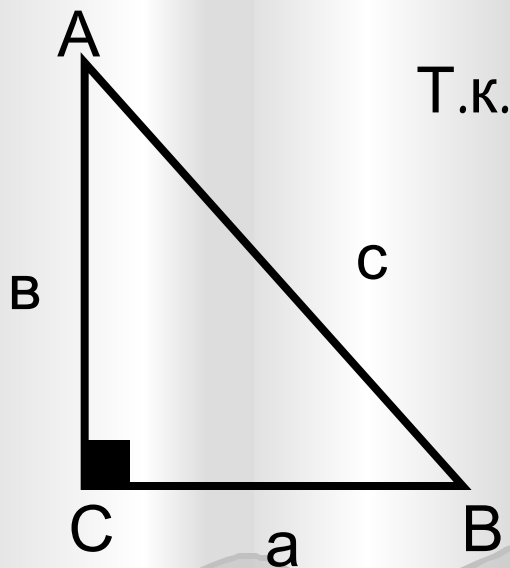


Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30, 45 и 60 градусов

ABC – прям.

$$\angle A = 30^{\circ}$$

$$a = \frac{1}{2} c \implies \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{a}{c} = \sin A$$

$$\angle A = 30^{\circ}$$

$$\sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}$$





Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30, 45 и 60 градусов

ABC – прям.

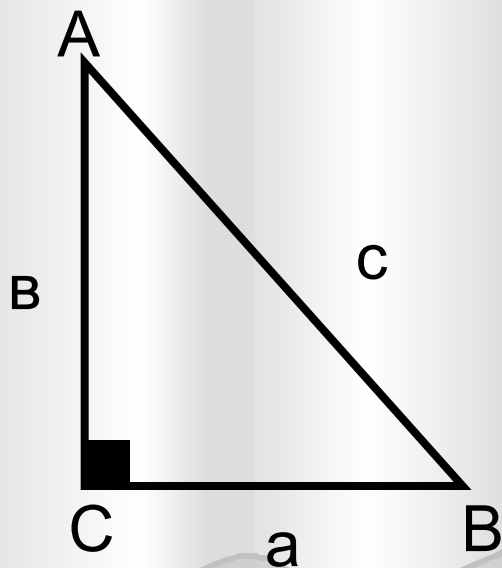
$$\angle A = 30^\circ$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$a =$$

$$c =$$

$$2$$



По теореме

$$\text{Пифагора: } b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$





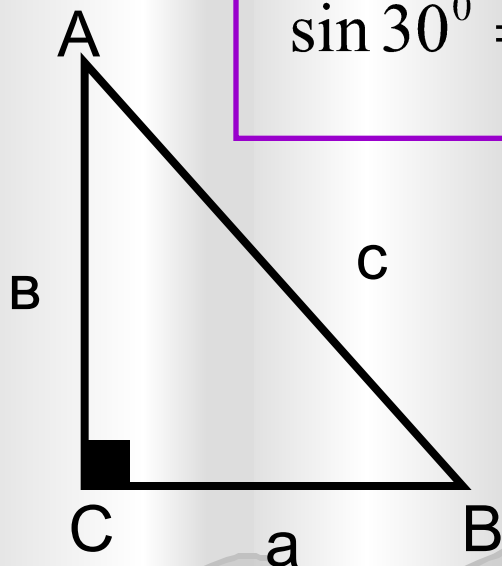
ЗНАЧЕНИЯ СИНУСА, КОСИНУСА И ТАНГЕНСА ДЛЯ УГЛОВ 30, 45 И 60 ГРАДУСОВ

$$\sin 30^{\circ} = \frac{a}{c} = \cos 60^{\circ}$$

$$\sin 30^{\circ} = \frac{1}{2} = \cos 60^{\circ}$$

$$\cos 30^{\circ} = \frac{b}{c} = \sin 60^{\circ}$$

$$\cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^{\circ}$$

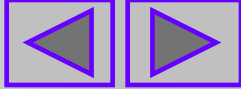


$$\sin 45^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^{\circ}$$

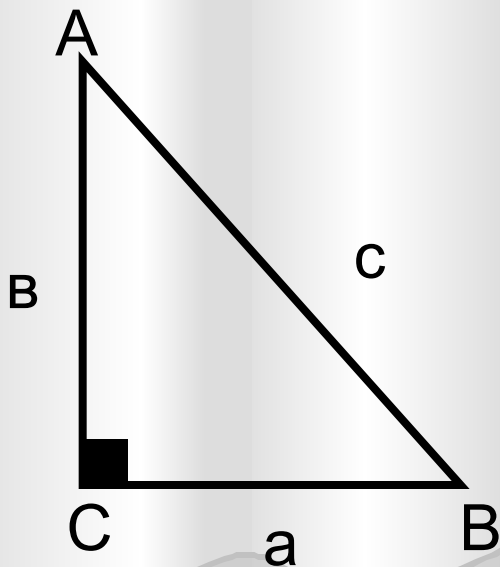
$$\operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{ctg} 60^{\circ}$$

$$\operatorname{tg} 60^{\circ} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = \operatorname{ctg} 30^{\circ}$$





Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30, 45 и 60 градусов



a	30^0	45^0	60^0
$\sin a$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos a$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg a$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg a$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



