



Построение отрезка по формуле

Проект по геометрии

Выполнили: Филимонова Екатерина

Руководитель: Шорина С.П.



Методический паспорт учебного проекта по геометрии.

Тема: Построение отрезка по заданной формуле.

Проблема: построить неизвестный отрезок, т.е. выразить его через известные отрезки и величины, разложить формулу, научиться строить отрезок по найденной формуле.

Актуальность исследований: На первый взгляд может показаться, что данная тема вряд ли имеет практическое применение в повседневной жизни. Однако, довольно сложно представить современный мир без архитектуры и программирования, где эта тема весьма актуальна и широко используется, не напрасно ведь мы изучаем в школе задачи на построение.

Объект исследования: построение на плоскости.

Предмет исследования: построение отрезков, заданных формулами.

Гипотеза: Практически по многим заданным формулам можно построить отрезок.

Цель проекта: Найти рациональные способы построений отрезков, заданных некоторыми степенными формулами и формулами с радикалами.





Теория. Общее определение.

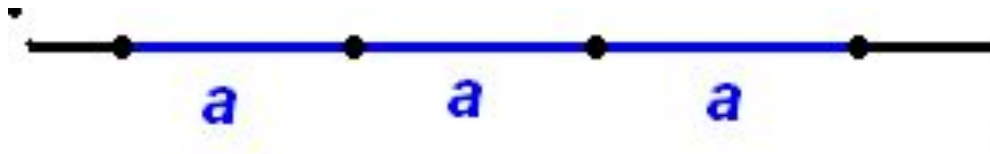
Особую часть задач на построение представляют собой задачи на построение по формуле, обычно они имеют следующий вид: исходя из данных отрезков (реже углов) построить отрезок (или угол), определяемый данной формулой. Иногда построение какого-либо объекта сводится к этой же задаче, если по данным в условии элементам удастся недостающие элементы построения вычислить и по полученной формуле они строятся линейкой и циркулем.



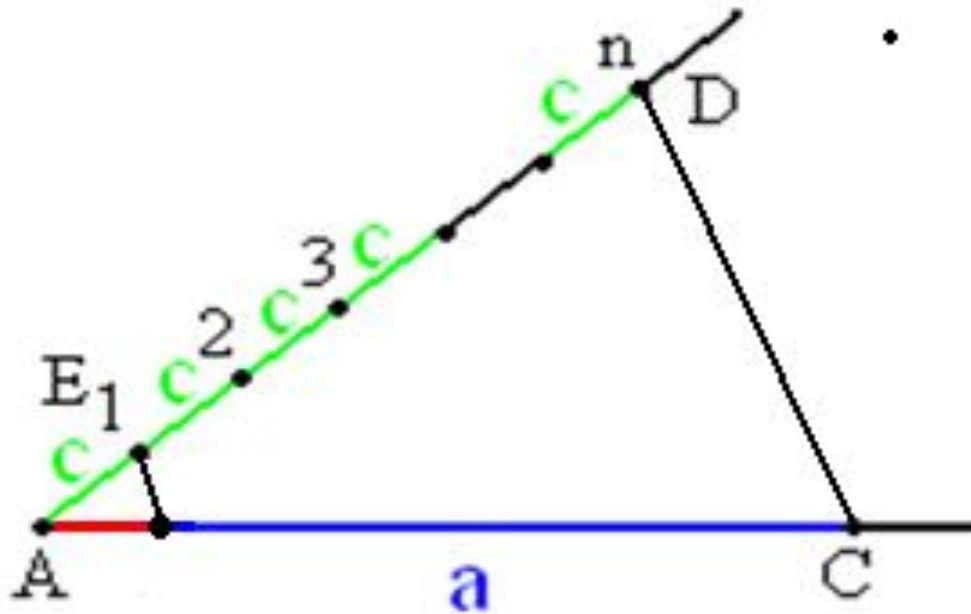
Для построения отрезков по формуле необходимо владеть элементарными стандартами построения. Их немного:



- 1) по отрезку a построить отрезок ta , где t -натуральное число. На прямой циркулем последовательно откладывается t раз отрезок a .



- 2) по отрезку a построить отрезок a/n , где n -натуральное число.



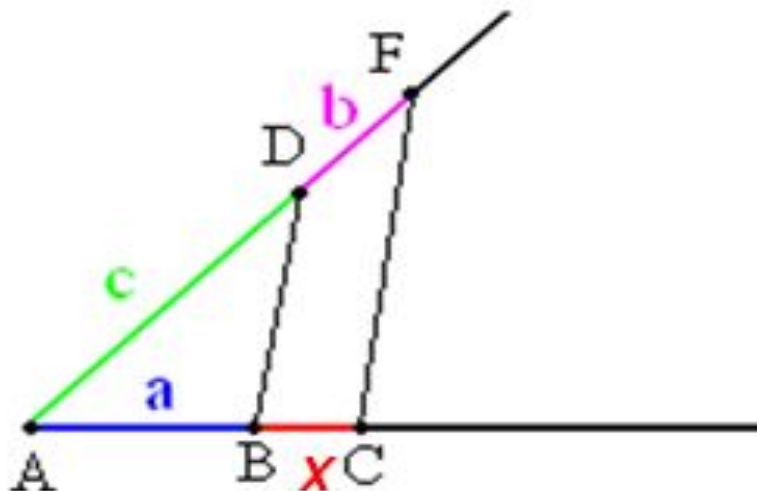
- 3) по отрезку a построить отрезок ta/n , где t и n - натуральные числа.

Комбинация 1 и 2 построений. Сначала строим отрезок z , равный отрезку at , а потом отрезок z/n , равный отрезку ta/n .

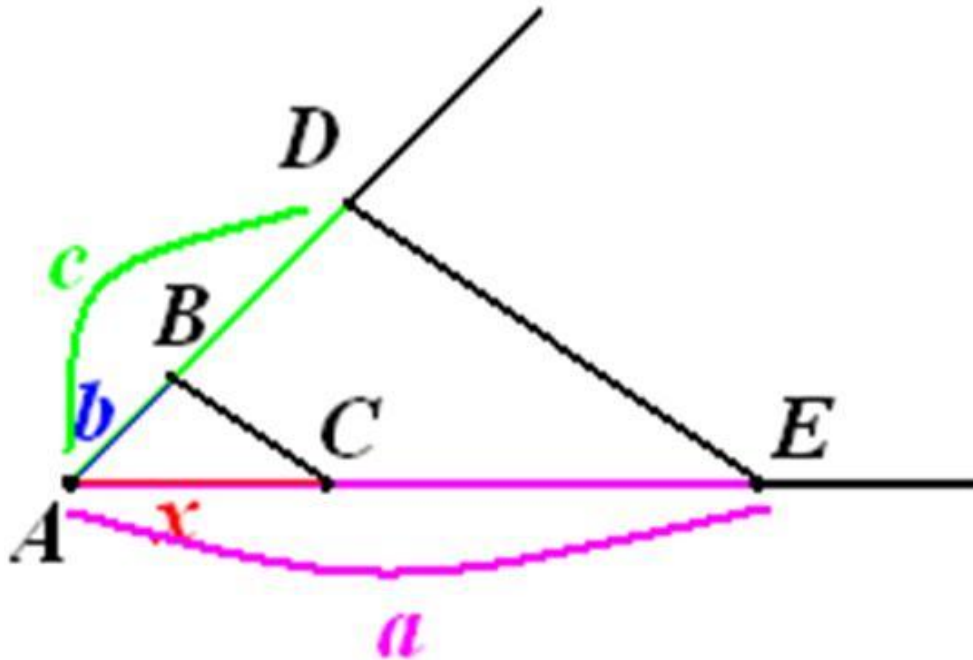
- 4) по отрезкам a и b построить отрезки $a+b$ и $a-b$ (если $a > b$).

Отложенный на прямой отрезок a увеличивается или уменьшается на отрезок b .

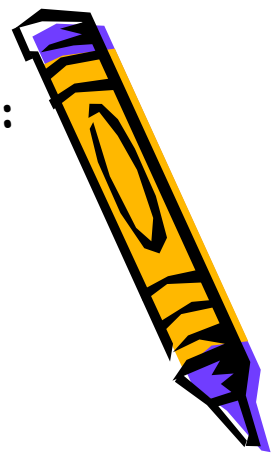
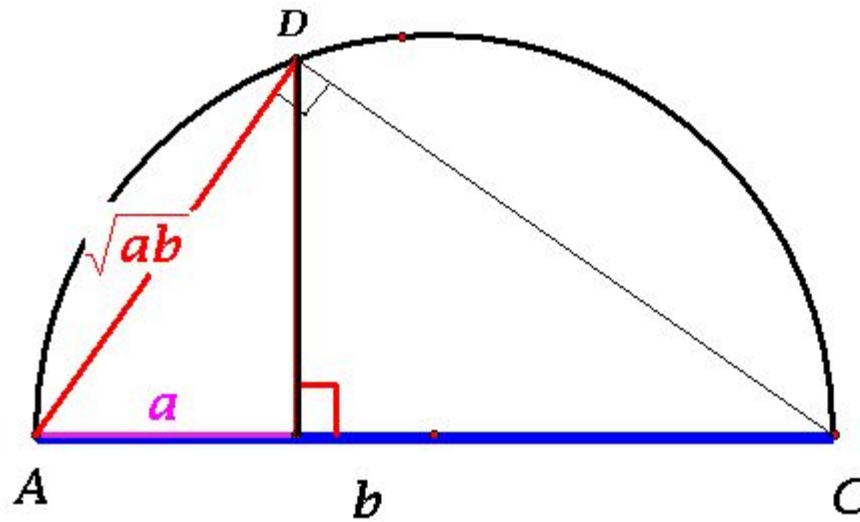
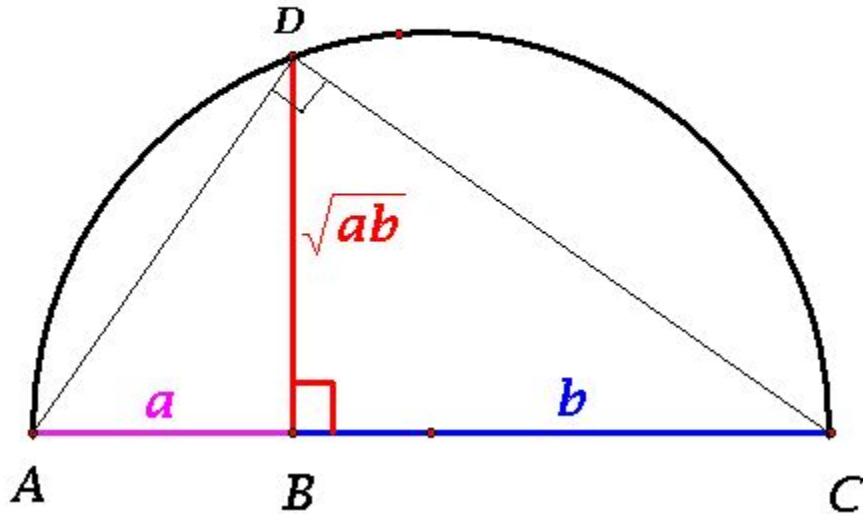
- 5) по отрезкам a , b и c построить отрезок $x=ab/c$ (построение пропорциональных отрезков с использованием теоремы Фалеса: $a/c=x/b$)



5а). Возможен и другой вариант построения отрезка $x=ab/c$ - при помощи подобия треугольников: $x/b=a/c$.



- 6) по отрезкам a и b построить отрезок $x = \sqrt{ab}$
- Существует несколько вариантов такого построения, например:





Но не все построения возможны, скажем, нельзя по отрезку a построить $\frac{a}{a}$, a^2 или

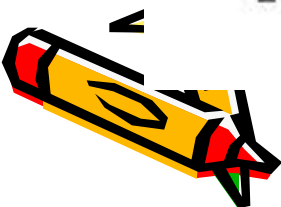
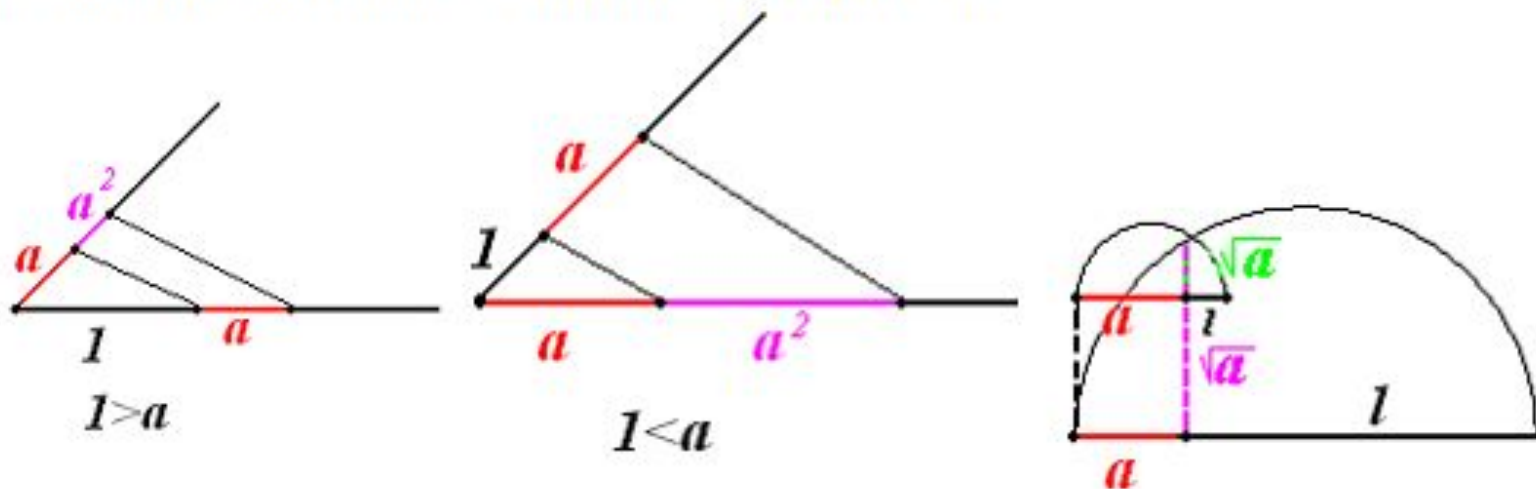
\sqrt{a} , т.к. они не имеют размерности длины (размерность $\frac{a}{a}$ отсутствует,

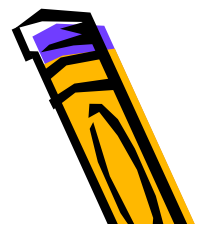
размерности a^2 (см²) и \sqrt{a} (√см)). Данные построения возможны только при указании отрезка единичной длины l , чтобы сохранить размерность длины (см),

тогда $\frac{a}{a} = \frac{a \cdot l}{a}$, $a^2 = \frac{a \cdot a}{l}$, $\sqrt{a} = \sqrt{a \cdot l}$ будут иметь размерность. Без указания

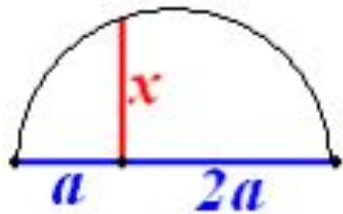
единичного отрезка ничего нельзя сказать и о величинах $\frac{a}{a}$, a^2 или \sqrt{a} .

Причем, если единичный отрезок $l > a$, то $a^2 < a$ и $\sqrt{a} > a$, а если $l < a$, то $a^2 > a$ и $\sqrt{a} < a$.





А, например, построить отрезок $\sqrt{2a}$ можно, $\sqrt{2a} = \sqrt{2a \cdot a}$.



Отсутствие единичного отрезка часто усложняет построение. Так чтобы по отрезкам

a и b построить отрезок $x = \frac{a^4}{a^3 + b^3}$ без единичного отрезка, приходится

преобразовывать последнее выражение, например, к виду $x = \frac{a^2}{a + \frac{b^2}{a} \times \frac{b}{a}} = \frac{a \times a}{a + \frac{b \times b}{a} \times \frac{b}{a}}$

и последовательно построить отрезки $c = \frac{b \times b}{a}$, $d = \frac{cb}{a}$, $e = a + d$, $x = \frac{a \times a}{e}$.

Иногда найти подходящее преобразование бывает очень сложно, и потому тот же отрезок строят с использованием единичного отрезка.



Задача 1.

Условие: По данным отрезкам a и b построить отрезок, заданный формулой

$$f = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$$

Решение:

Преобразовываем выражение:

$$f = \sqrt[4]{a^2 \left(a^2 + \frac{b^4}{a^2} \right)}$$

Вводим переменную:

$$x = \frac{b^2}{a}; \quad \frac{b}{a} = \frac{x}{b}$$

Получаем:

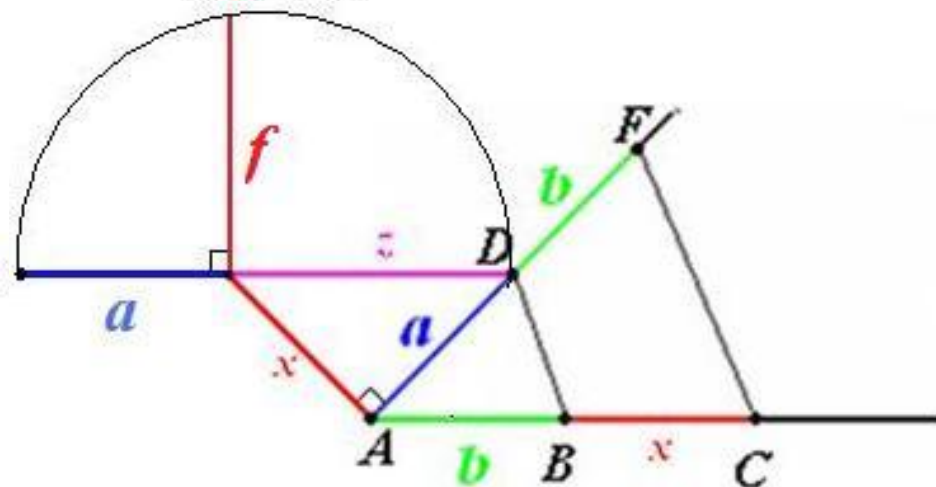
$$f = \sqrt[4]{a^2 (a^2 + x^2)}$$

Вводим еще одну переменную:

Таким образом получаем:

$$f = \sqrt[4]{a^2 z^2} = \sqrt{az}$$

Данный отрезок мы можем построить без труда.



Задача 3.

Условие: По данным отрезкам a, b, c построить отрезок, заданный формулой $x = \sqrt{ab + bc + cd}$

Решение:

$$x = \sqrt{\left(\frac{ab}{l} + \frac{bc}{l} + \frac{cd}{l}\right) \times l}$$

Строим последовательно:

$$\frac{ab}{l} = z(1)$$

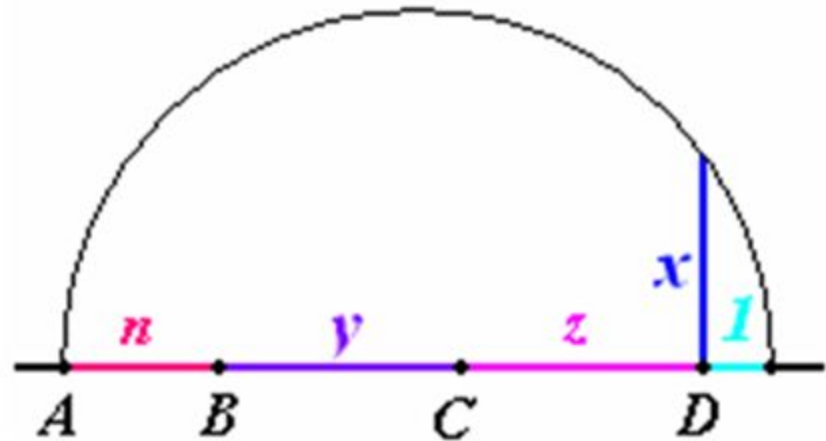
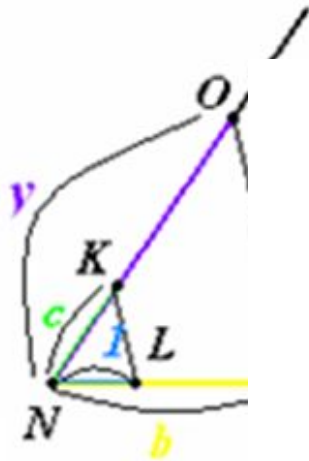
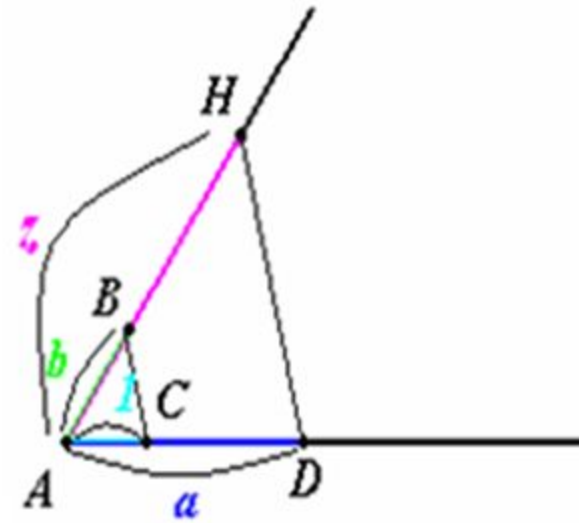
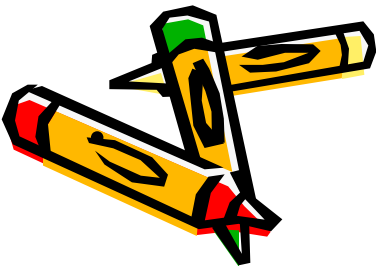
$$\frac{bc}{l} = y(2)$$

$$\frac{cd}{l} = n(3)$$

Получаем:

$$x = \sqrt{(z + y + n) \cdot l}$$

Данный отрезок мы можем без труда построить.



Задача 5.



Условие:

По данным отрезкам a и b построить отрезок, заданный формулой $x = \frac{a^{10} + b^{10}}{a^9 + b^9}$

Решение: $x = \frac{a^{10} + b^{10}}{a^9 + b^9} = \frac{\frac{a^{10}}{l^9} + \frac{b^{10}}{l^9}}{\frac{a^9}{l^8} + \frac{b^9}{l^8}} \times l; \quad \frac{a^{10}}{l^9} = a_{10}; \quad \frac{b^{10}}{l^9} = b_{10}; \quad \frac{a^9}{l^8} = a_9; \quad \frac{b^9}{l^8} = b_9.$

Выбираем длину отрезка a за длину единичного отрезка. ($l = a$).

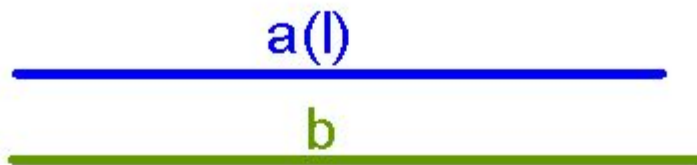
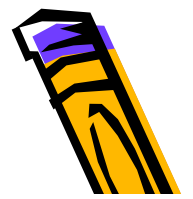
Тогда отрезки $\frac{a^{10}}{l^9} = a; \quad \frac{a^9}{l^8} = a.$

Способ построения отрезка b_{10}

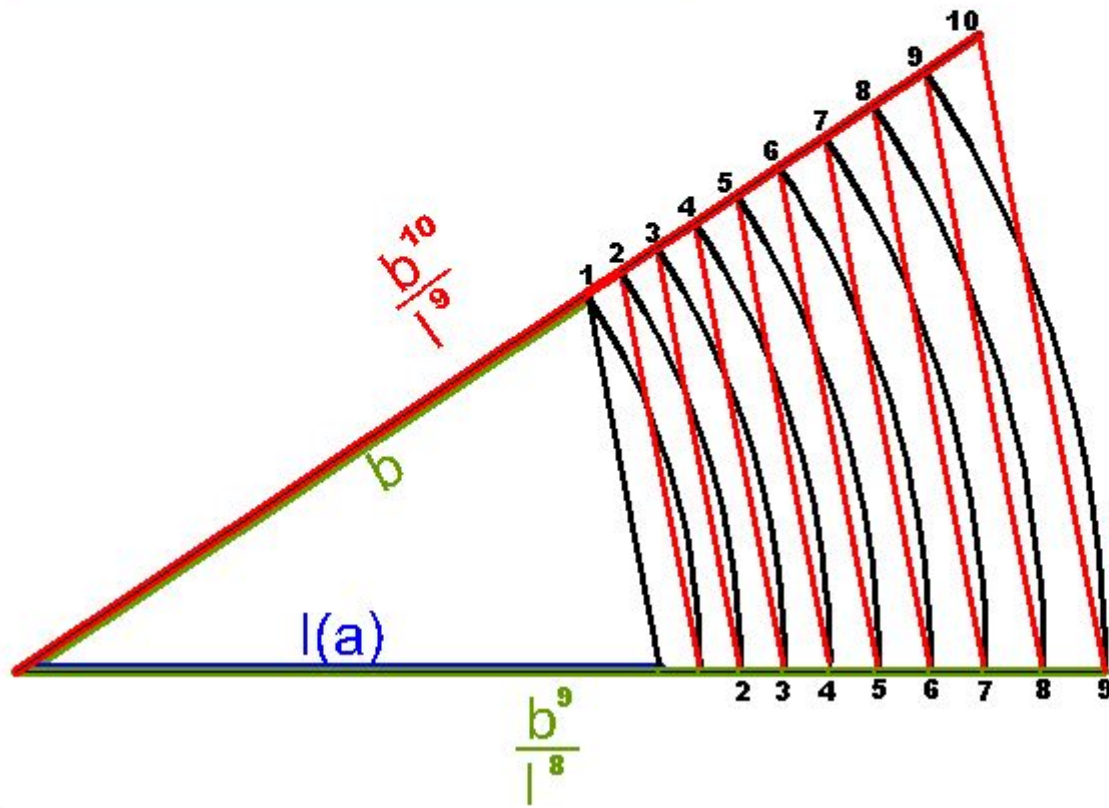
$$b_{10} = \frac{b^{10}}{l^9} = \frac{b \times b \times b \times b \times b \times b \times b \times b \times b \times b}{l \times l \times l \times l \times l \times l \times l \times l \times l}$$



$$b_{10} = \frac{b^{10}}{l^9} = \frac{b \times b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l}$$



$(b > a)$



$$b_{10} = \frac{b^{10}}{l^9} = \frac{b \times b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l} \times \frac{b}{l}$$

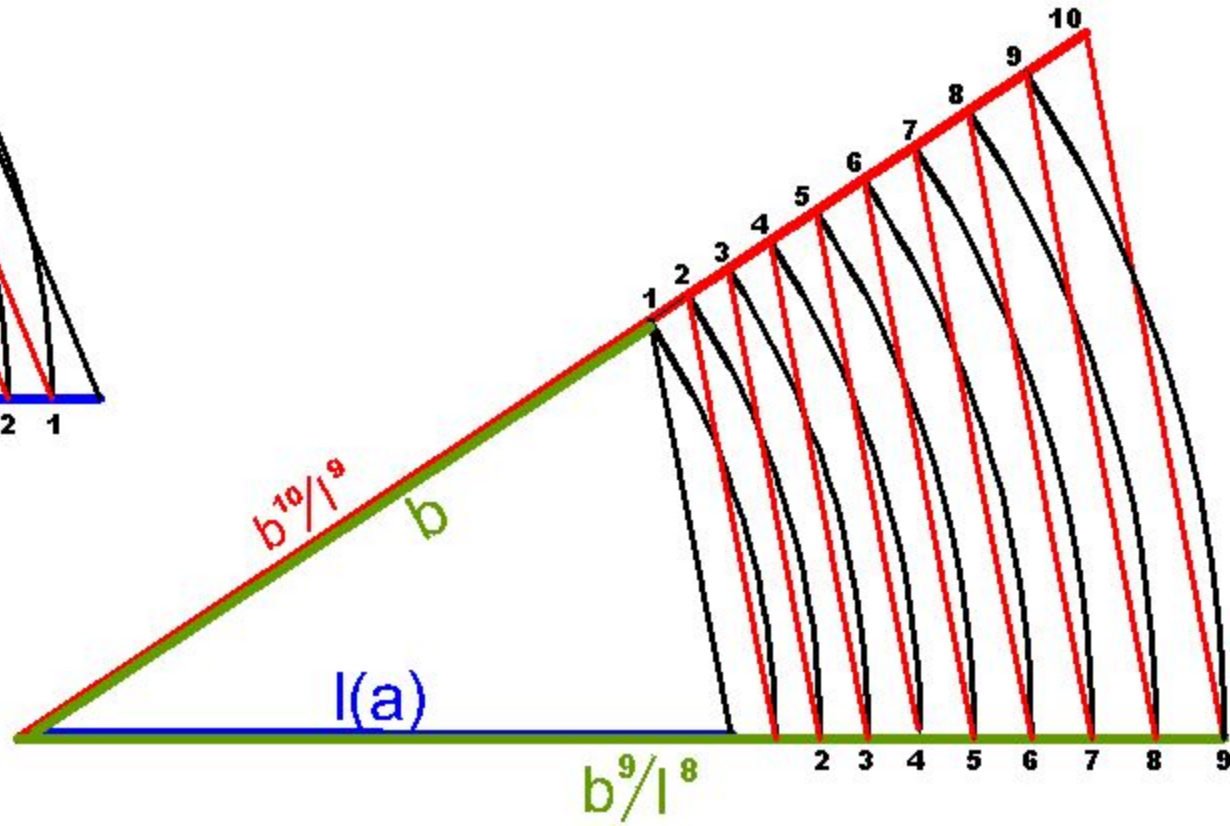
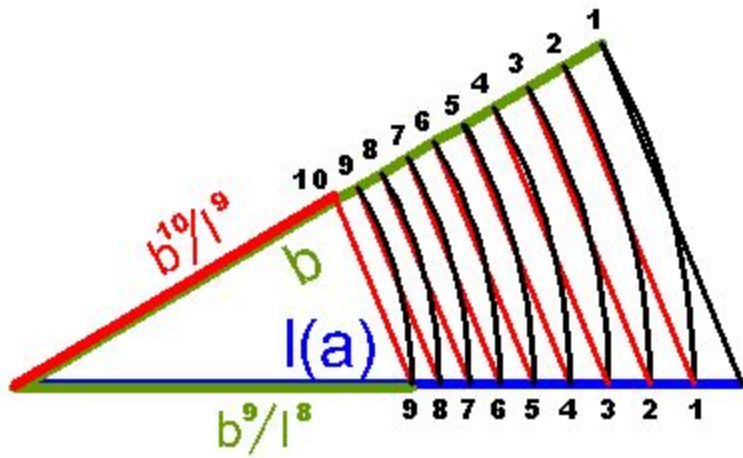


$a(l)$

$b < a$

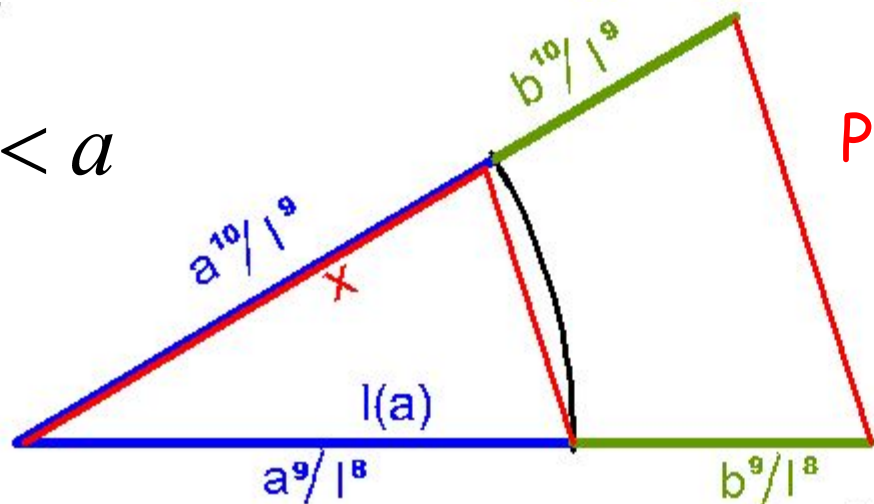
$a(l)$

$b > a$



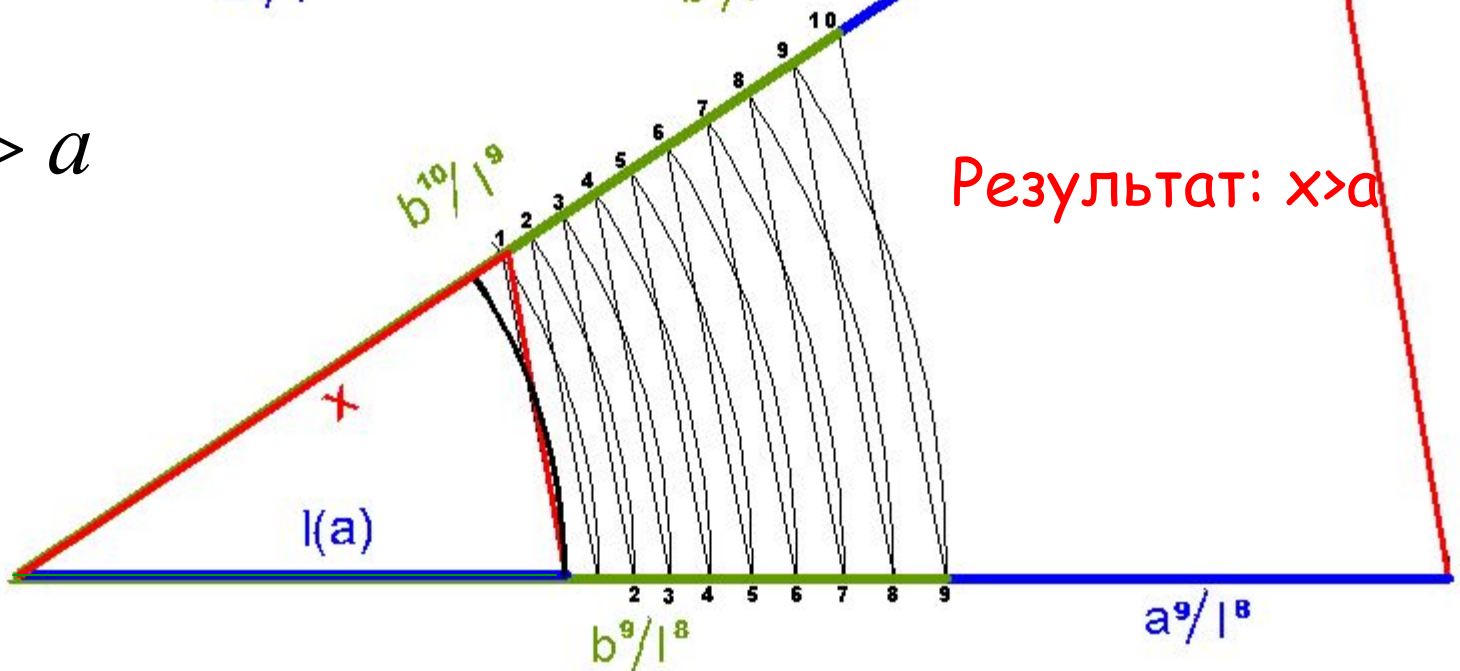
$$x = \frac{a^{10} + b^{10}}{a^9 + b^9}$$

$b < a$



Результат: $x < a$

$b > a$



Результат: $x > a$



Задача 6.

Условие: По заданным отрезкам a , b , c и d построить отрезок, заданный формулой $x = \sqrt[4]{abcd}$

Решение:

$$x = \sqrt[4]{abcd} = \sqrt[4]{ab} * \sqrt[4]{cd} = \sqrt{\sqrt{ab}} * \sqrt{\sqrt{cd}}$$

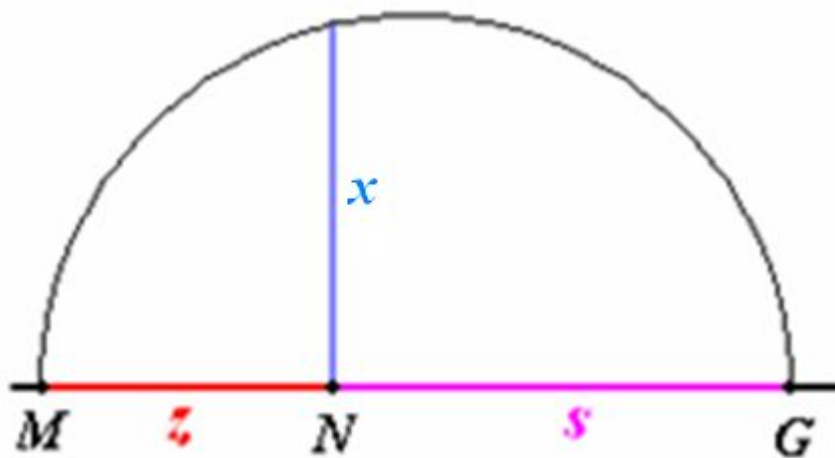
Производим замену переменных:

$$\sqrt{ab} = z(1)$$

$$\sqrt{cd} = s(2)$$

Получаем:

$$x = \sqrt{zs}(3)$$



Задача 8

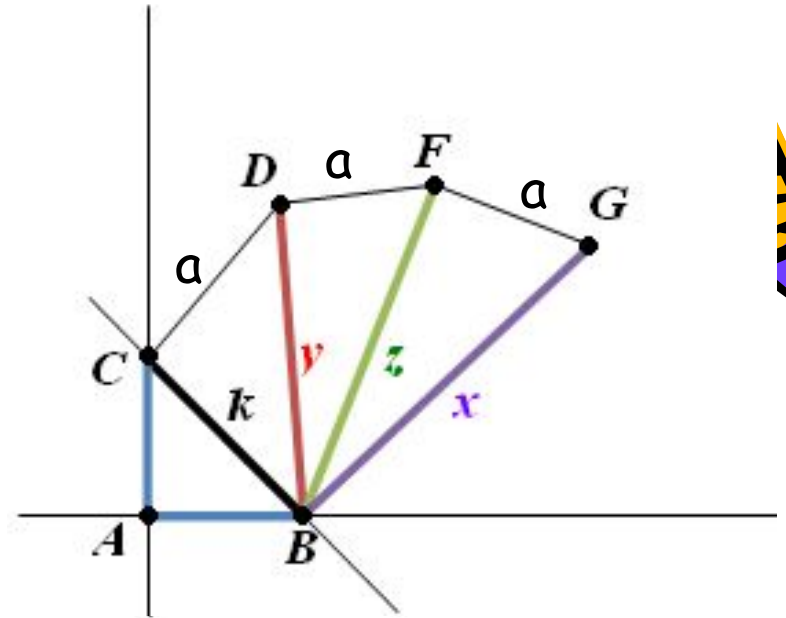
Условие: По данному отрезку a построить отрезок, заданный формулой $x = a\sqrt{5}$

Решение:

Откладываем на одной стороне прямой отрезок $a=AC$, проводим перпендикуляр и на нем откладываем отрезок $a=AB$. Соединяем два конца отрезков и получаем z , равный $a\sqrt{2}$ (по теореме Пифагора). И так повторить 4 раза.

Получаем:

$$x = a\sqrt{5}$$



$$k = a\sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$

$$z = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = a\sqrt{4}$$

$$x = \sqrt{(a\sqrt{4})^2 + a^2} = a\sqrt{5}$$



Задача 10.

Условие: По данному отрезку a и острому углу L построить отрезок, заданный формулой

$$z = a \times \sqrt{\sin L}$$

Решение:

$$z = a \times \sqrt{\sin L} = \sqrt{a \times a \times \sin L} =$$

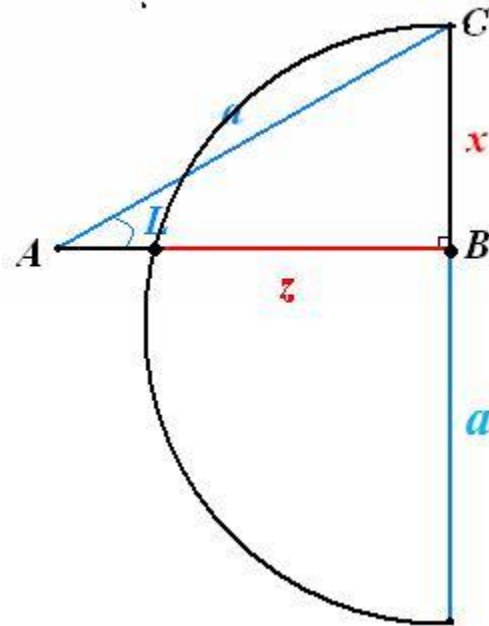
$$= \sqrt{a \times x}, \quad x = a \times \sin L$$

Строим прямоугольный треугольник ABC с острым углом L и гипотенузой a . Тогда

$$\sin L = \frac{CB}{AB} = \frac{CB}{a}$$

$$x = a \times \sin L = a \times \frac{CB}{a} = CB$$

$$z = \sqrt{a \times x}$$





Заключение

В процессе работы над проектом мы научились разлагать заданные формулы для длины искомого отрезка на элементарные составляющие, по которым легко выполнять построения, используя теорему Фалеса, Пифагора или пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике, освоили приемы построения в процессе решения конкретных задач и подтвердили гипотезу, что можно построить отрезки, заданные многими формулами. Думаем, что этот опыт пригодится нам при поиске решения разных задач, а сам проект можно демонстрировать на уроках геометрии.

