Построение сечения куба, нахождение его координат и площади

Ларионова Н.Е.

учитель математики МАОУ ЛМИ

г. Саратов

ЗАДАЧА

по нахождению сечения куба, его координат и площади

- **Задача №1**

  Построить сечение куба, проходящего через точки P, Q, R, найти координаты точек сечения и площадь сечения,

  если P-середина BB_1,

  Q-середина B_1C_1,

  R=D.

Дано:

Куб **$ABCDA^1B^1C^1D^1$**

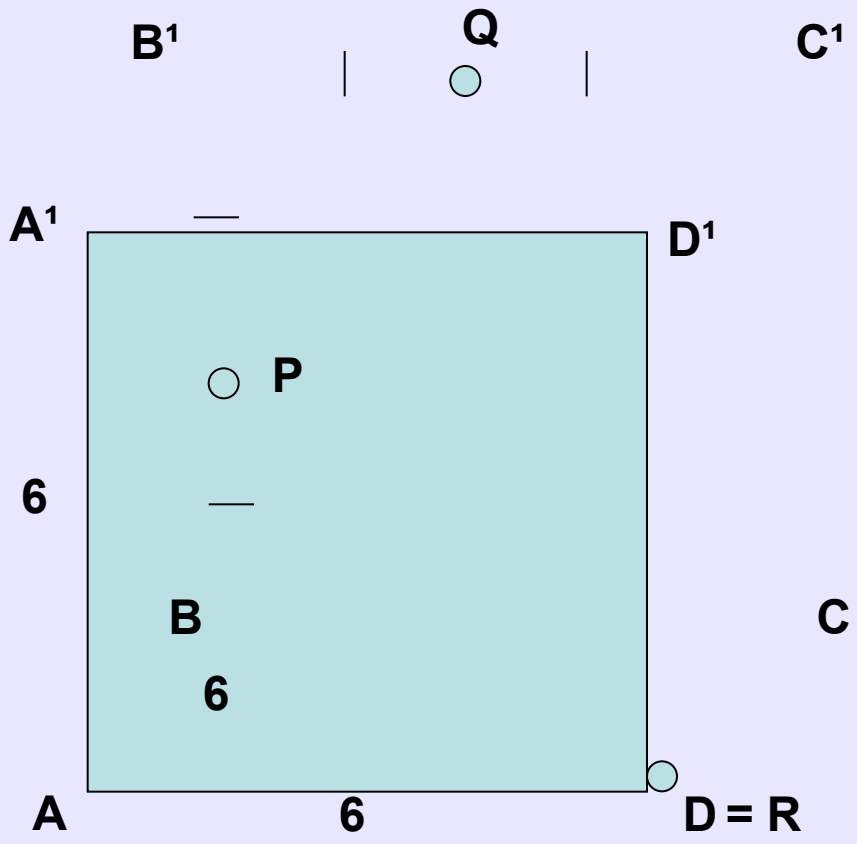
P – середина **BB^1**

Q – середина **B^1C^1**

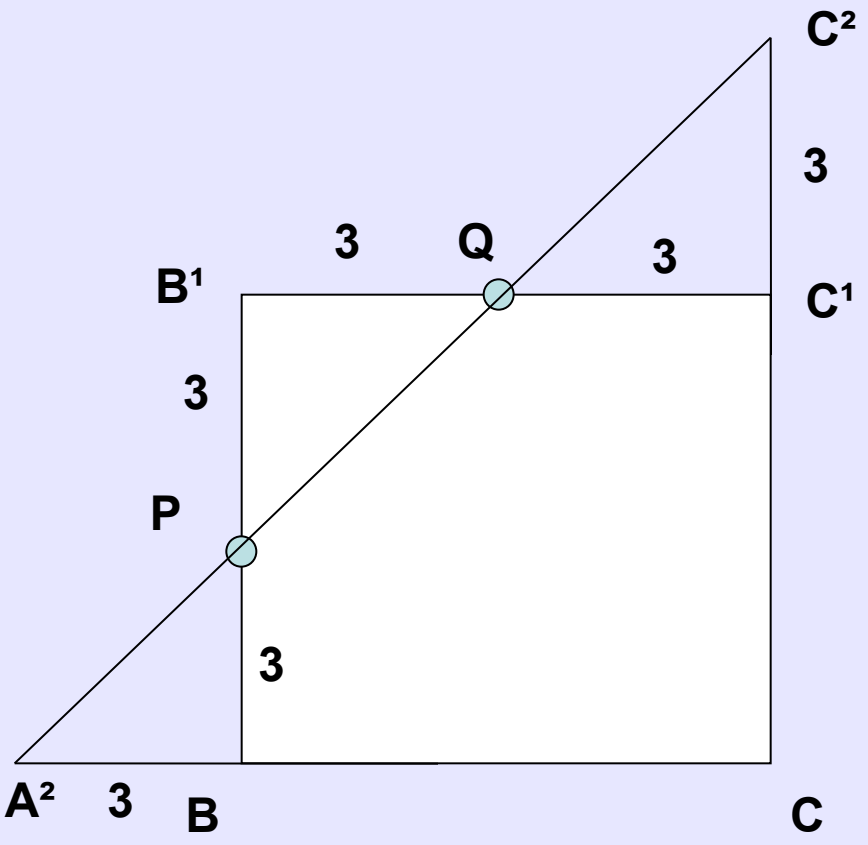
R = D

$AB = AA^1 = AD = 6$

Построить сечение куба, проходящего через точки P, Q, R, найти координаты точек сечения и площадь сечения.



Рассмотрим заднюю плоскость **BB^1CC^1**



Решение

$BB^1 = B^1C^1 = 6$ (по условию)

$B^1P = PB = 3$ (P середина BB^1)

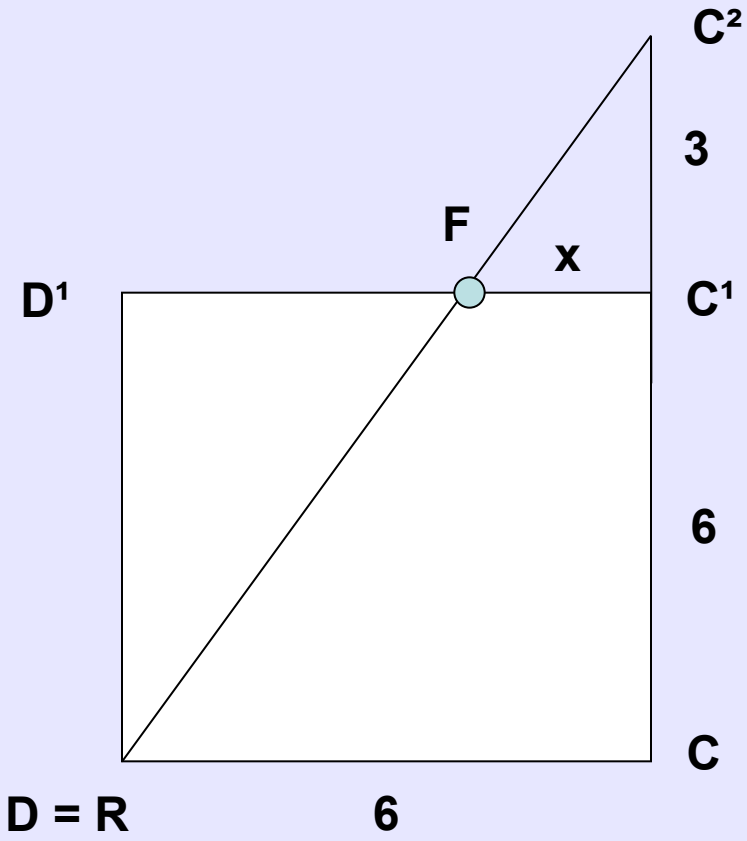
$B^1Q = QC^1 = 3$ (Q середина B^1C)

Продлим BC и CC^1 .Соединим точки P и Q . $PQ \cap BC = A^2$ $PQ \cap CC^1 = C^2$

Рассмотрим ΔB^1PQ.
$\angle B^1PQ = \angle B^1QP = 45^\circ$ (т.к. ΔB^1PQ – равнобедренный ($B^1P = B^1Q$))

Рассмотрим ΔB^1PQ и ΔC^1QC^2
$\Delta B^1PQ = \Delta C^1QC^2$ (по 2-ум сторонам и углу между ними) => $C^1C^2 = B^1P = 3$

Рассмотрим боковую плоскость DD^1CC^1



Решение

DC = CC¹ = 6 (по условию).
Продлим CC¹, так чтобы C¹C² = 3

Пусть FC¹ = x

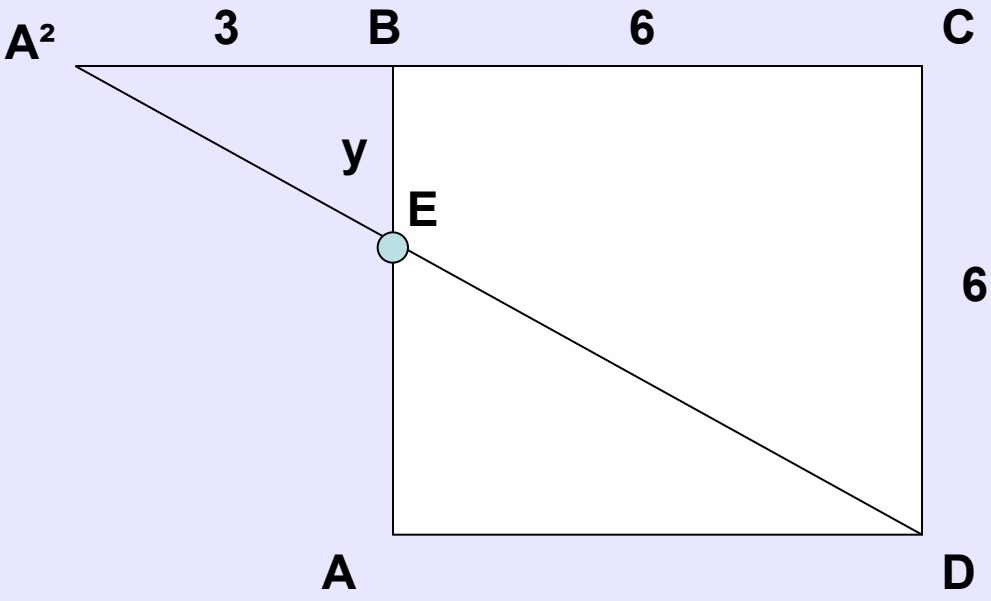
Рассмотрим ∆ DC²C и ∆ FC²C¹ ∆

DC²C ~ ∆ FC²C¹ (по 2-ум сторонам и углу между ними)

$$\frac{CC^2}{C^1C^2} = \frac{DC}{FC^1} \Rightarrow \frac{9}{3} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 2$$

FC¹ = 2 , а FD¹ = 4

Рассмотрим нижнюю плоскость **ABCD**



Решение

BC = CD = 6 (по условию)
Продлим CB, так чтобы A²B = 3

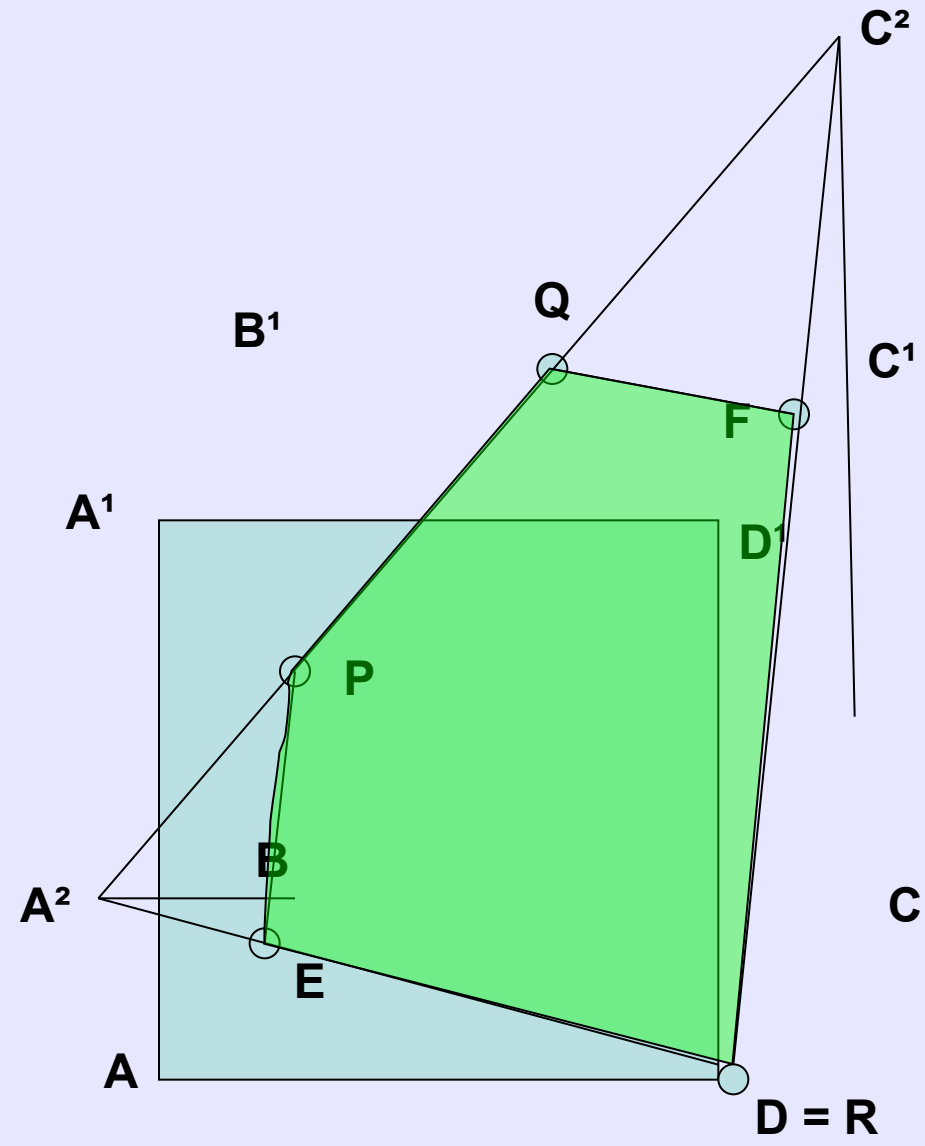
Пусть BE = y

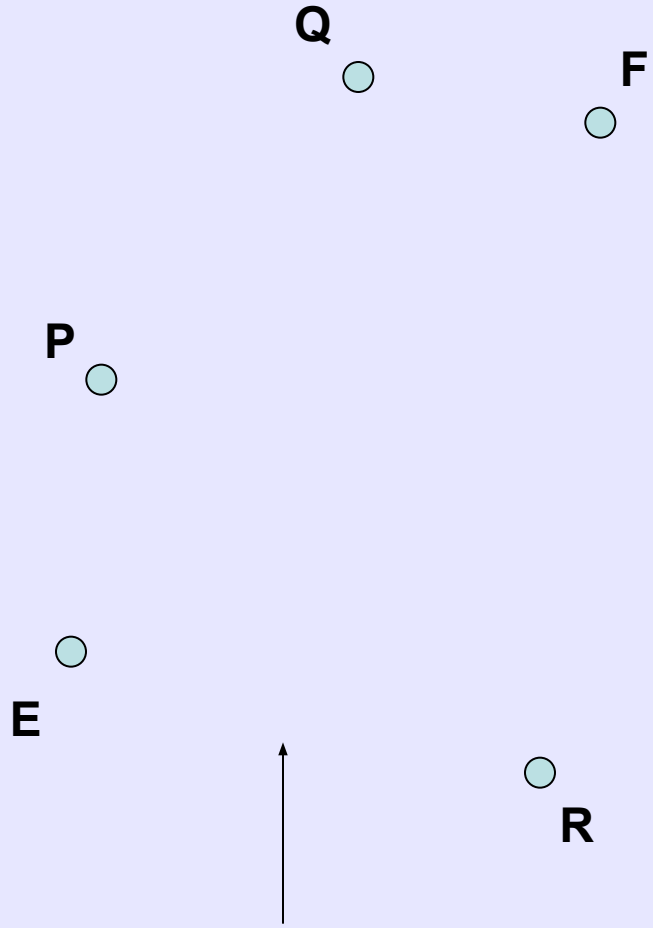
Рассмотрим ∆ A²BE и ∆ A²CD
∆ A²BE ~ ∆ A²CD (по 2-ум сторонам и углу между ними)

$$\frac{A^2B}{A^2C} = \frac{BE}{CD} \Rightarrow \frac{3}{9} = \frac{y}{6} \Rightarrow y = 2$$

BE = 2, а AE = 4

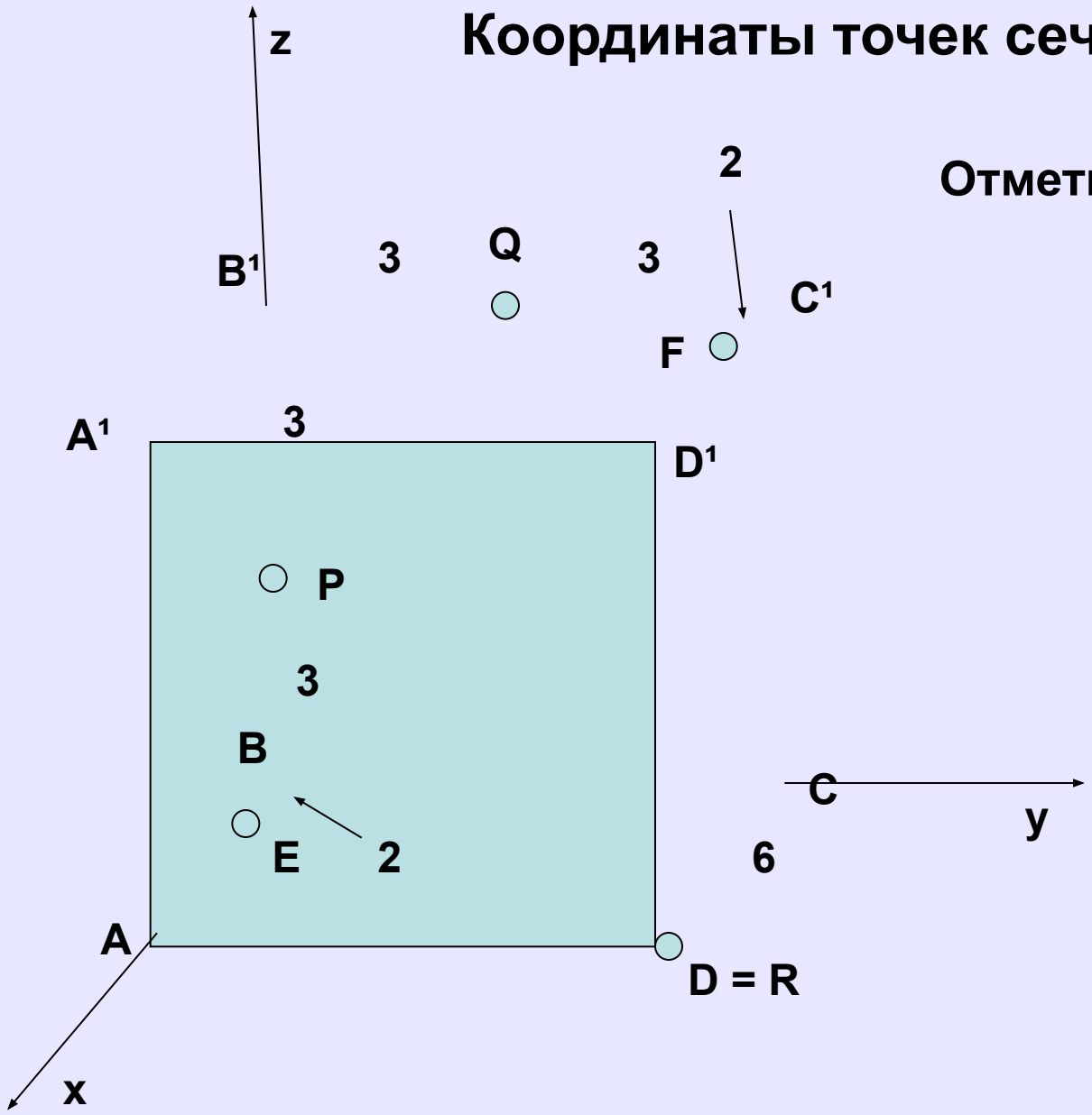
Сечение куба, проходящей через точки P, Q, R





Сечение куба (PQFRE)

Координаты точек сечения куба



Отметим оси координат x, y, z

x y z

P (0, 0, 3)

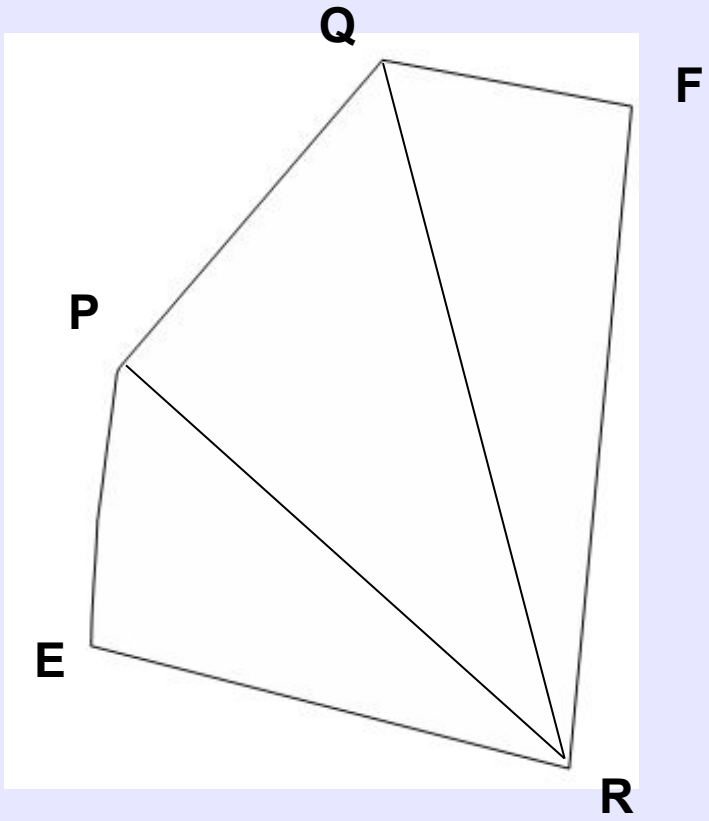
Q (0, 3, 6)

F (2, 6, 6)

R (6, 6, 0)

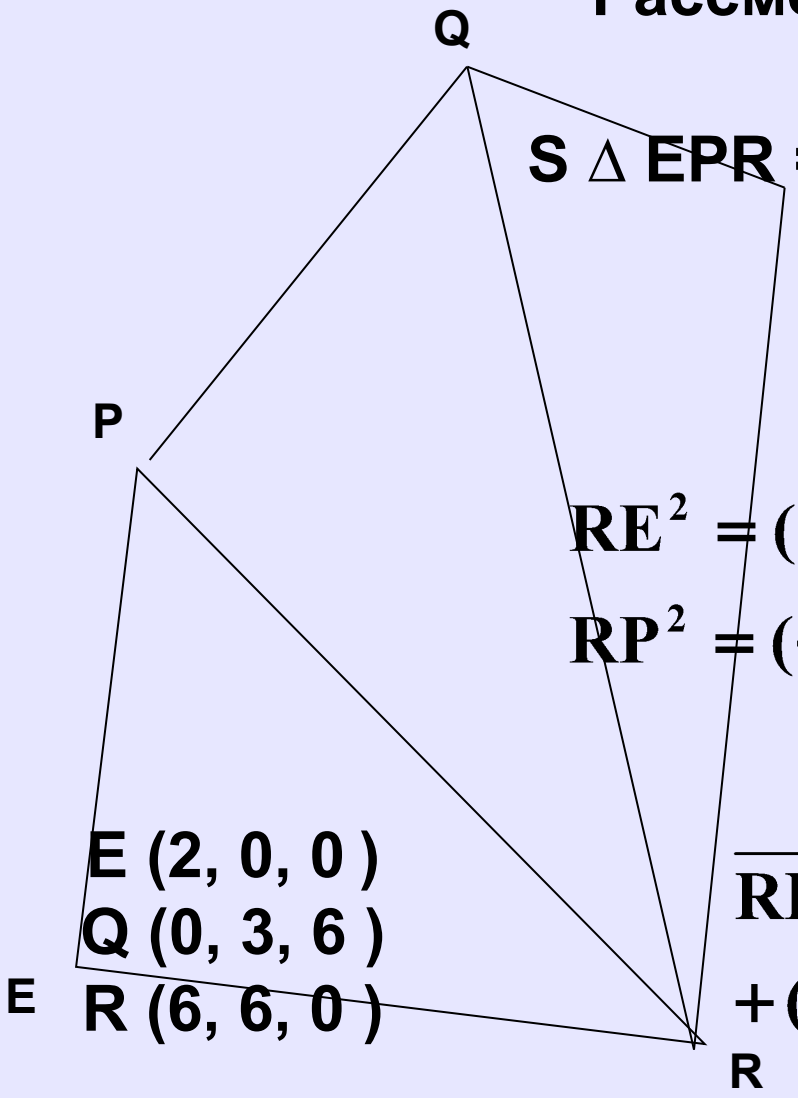
E (2, 0, 0)

Нахождение площади сечения куба



Разобьём плоскость сечения куба на три треугольника, чтобы подсчитать площадь всего сечения куба.

Рассмотрим Δ EPR



E (2, 0, 0)
Q (0, 3, 6)
R (6, 6, 0)

$$S\ \Delta EPR = \frac{1}{2}\sqrt{RE^2 * RP^2 - (\overline{RE} * \overline{RP})^2}$$

$$\overline{RE} = (\overline{-4,-6,0})$$

$$\overline{RP} = (\overline{-6,-6,3})$$

$$RE^2 = (-4)^2 + (-6)^2 + (0)^2 = 16 + 36 + 0 = 52$$

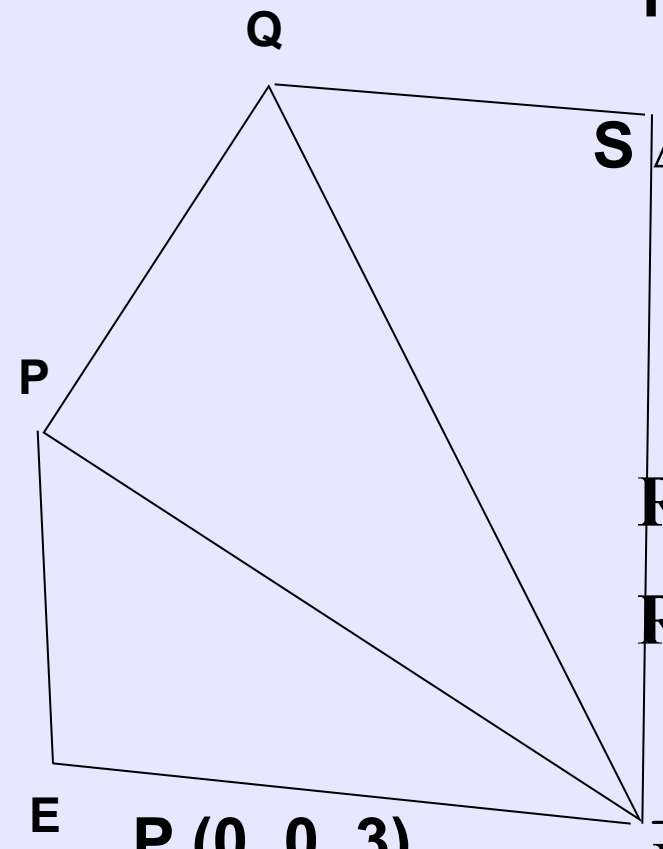
$$RP^2 = (-6)^2 + (-6)^2 + (3)^2 = 36 + 36 + 9 = 81$$

$$\overline{RE} * \overline{RP} = ((-4) * (-6)) + ((-6) * (-6)) +$$

$$+ ((0) * (3)) = 24 + 36 + 0 = 60$$

$$S\ \Delta EPR = \frac{1}{2}\sqrt{52 * 81 - (60)^2} = \frac{\sqrt{612}}{2} = \sqrt{153}$$

Рассмотрим Δ QPR



P (0, 0, 3)
Q (0, 3, 6)
R (6, 6, 0)

$$S\,\Delta\,QPR = \frac{1}{2}\sqrt{RQ^2 * RP^2 - (\overline{RQ} * \overline{RP})^2}$$

$$\overline{RQ} = (\overline{-6,-3,6})$$

$$\overline{RP} = (\overline{-6,-6,3})$$

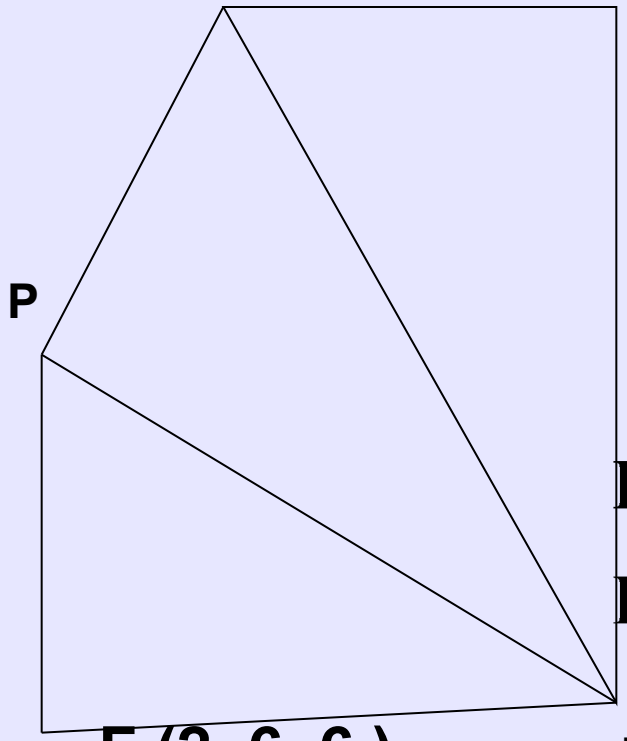
$$RQ^2 = (-6)^2 + (-3)^2 + (6)^2 = 36 + 9 + 36 = 81$$

$$RP^2 = (-6)^2 + (-6)^2 + (3)^2 = 36 + 36 + 9 = 81$$

$$\overline{RQ} * \overline{RP} = ((-6) * (-6)) + ((-3) * (-6)) +$$

$$+ ((6) * (3)) = 36 + 18 + 18 = 72$$

$$S\,\Delta\,QPR = \frac{1}{2}\sqrt{81 * 81 - (72)^2} = \frac{\sqrt{1377}}{2} = \frac{3\sqrt{153}}{2}$$



F (2, 6, 6)
Q (0, 3, 6)
R (6, 6, 0)

Рассмотрим Δ FQR

$$S\ \Delta FQR = \frac{1}{2}\sqrt{RQ^2 * RF^2 - (\overline{RQ} * \overline{RF})^2}$$

$$\overline{RQ} = (\overline{-6,-3,6})$$

$$\overline{RF} = (\overline{-4,0,6})$$

$$RQ^2 = (-6)^2 + (-3)^2 + (6)^2 = 36 + 9 + 36 = 81$$

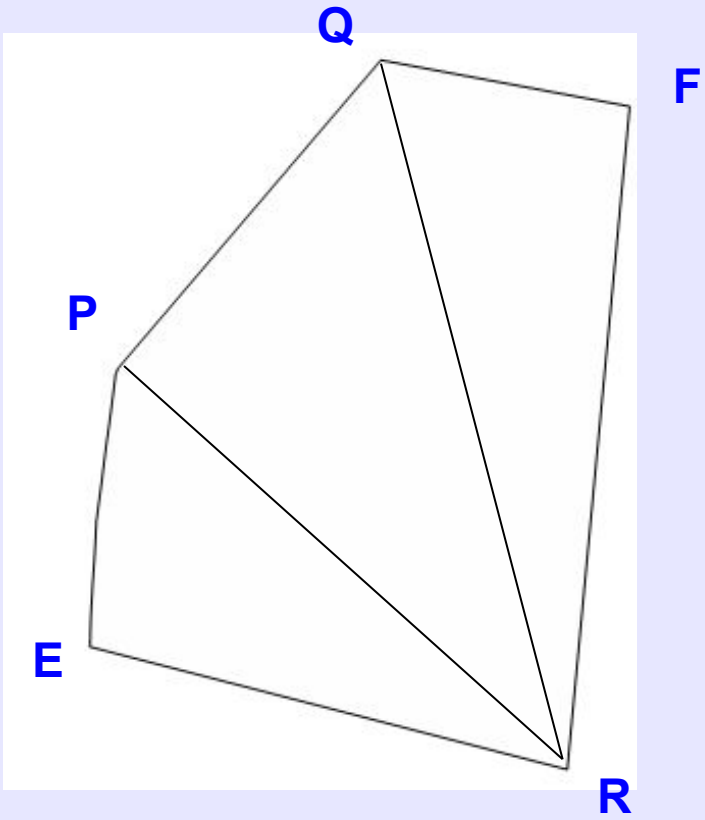
$$RF^2 = (-4)^2 + (0)^2 + (6)^2 = 16 + 0 + 36 = 52$$

$$\overline{RQ} * \overline{RF} = ((-6) * (-4)) + ((-3) * (0)) +$$

$$+ ((6) * (6)) = 24 + 0 + 36 = 60$$

$$S\ \Delta FQR = \frac{1}{2}\sqrt{81 * 52 - (60)^2} = \frac{\sqrt{612}}{2} = \sqrt{153}$$

Нахождение площади сечения куба

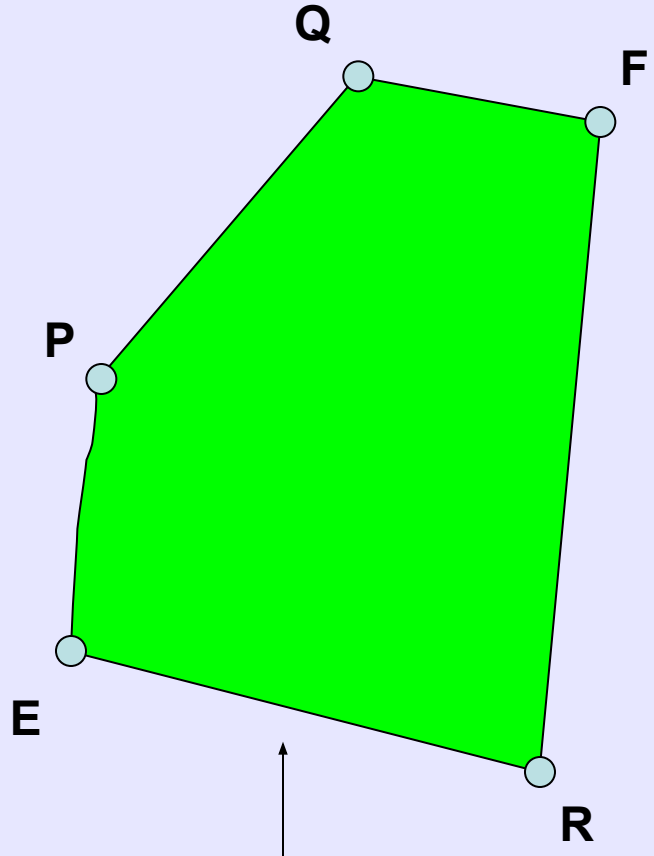


$$S_{\text{сеч.}}PQFRE = \Delta QPR + \Delta QPR + \Delta QPR + \Delta FQR$$

$$S_{\text{сеч.}}PQFRE = \sqrt{153} + \frac{3\sqrt{153}}{2} + \sqrt{153} =$$

$$= (7\sqrt{153})/2 = (21\sqrt{17})/2$$

$$S_{\text{сеч.}}PQFRE = (21\sqrt{17})/2$$



Сечение куба (PQFRE)

P (0, 0, 3)

Q (0, 3, 6)

F (2, 6, 6)

R (6, 6, 0)

E (2, 0, 0)

Координаты точек сечения куба

Площадь сечения куба

$$S_{\text{СЕЧ.}}PQFRE = (21\sqrt{17})/2$$

- **Задача №2**

  Построить сечение куба, проходящего через точки P, Q, R, найти координаты точек сечения и площадь сечения,

  если P-середина AA_1,

  Q-середина A_1B_1,

  R- серединаAD.

Дано:

Куб **$ABCDA^1B^1C^1D^1$**

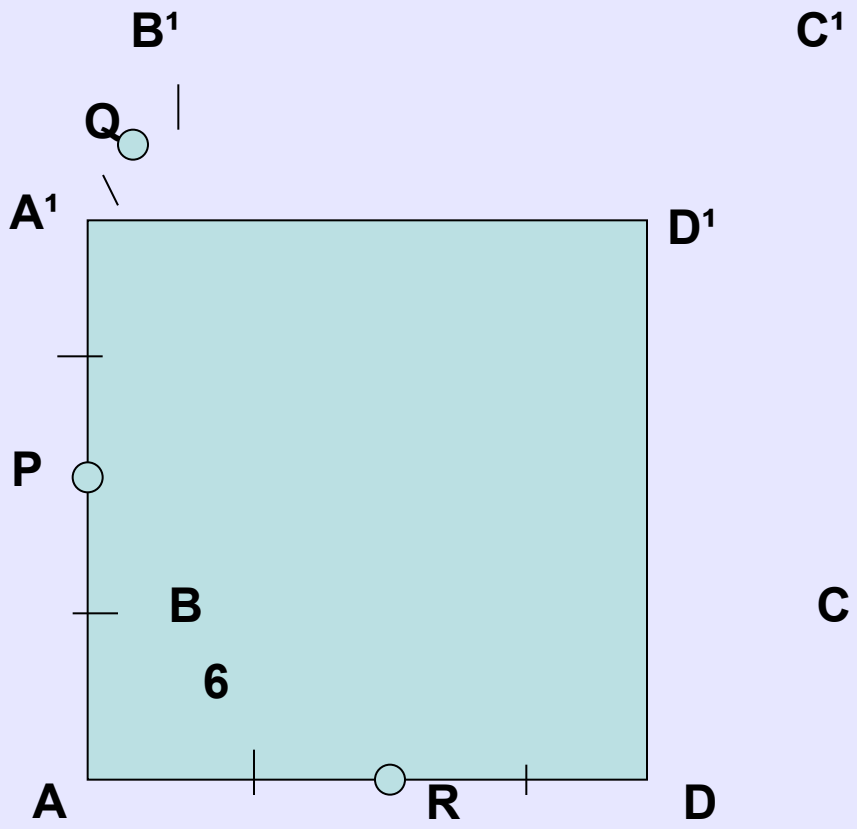
P – середина **AA^1**

Q – середина **A^1B^1**

R – середина AD

$AB = AA^1 = AD = 6$

Построить сечение куба, проходящего через точки P, Q, R, найти координаты точек сечения и площадь сечения.



Координаты точек:

P(6;0;3)

Q(3;0;6)

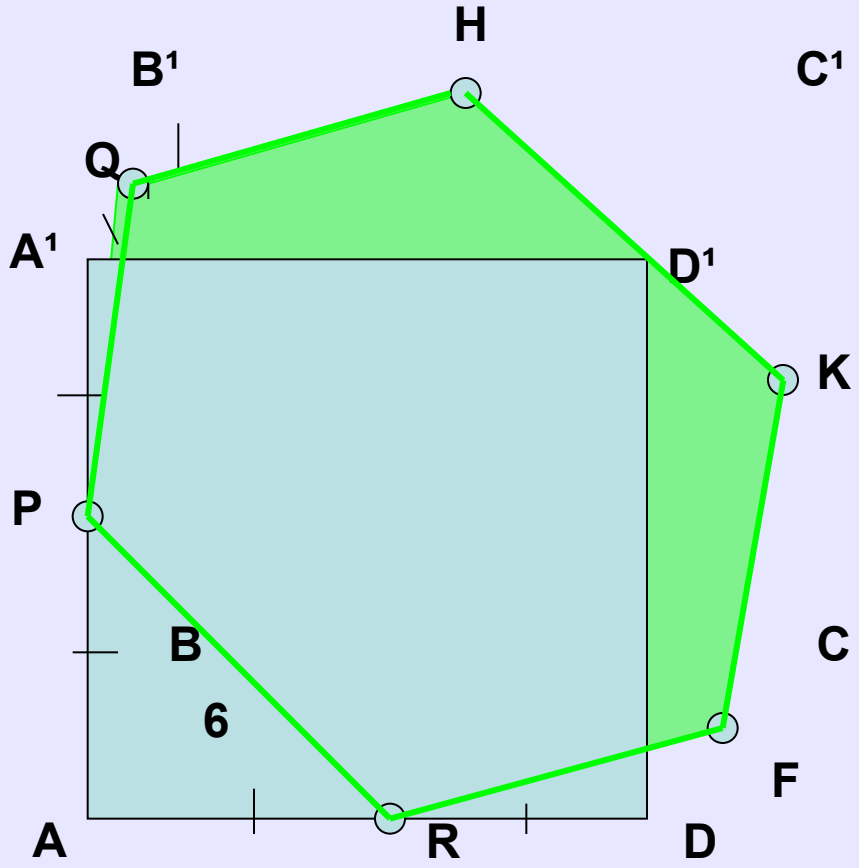
H(0;3;6)

K(0;6;3)

F(3;6;0)

R(6;3;0)

$S_{PQHKFR} = 27\sqrt{3}$



- **Задача №3**

  Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки P, Q, R, найти координаты точек сечения, если P принадлежит AA_1,

  AP=2,

  Q принадлежит A_1D_1,

  D_1Q=2,

  R=B.

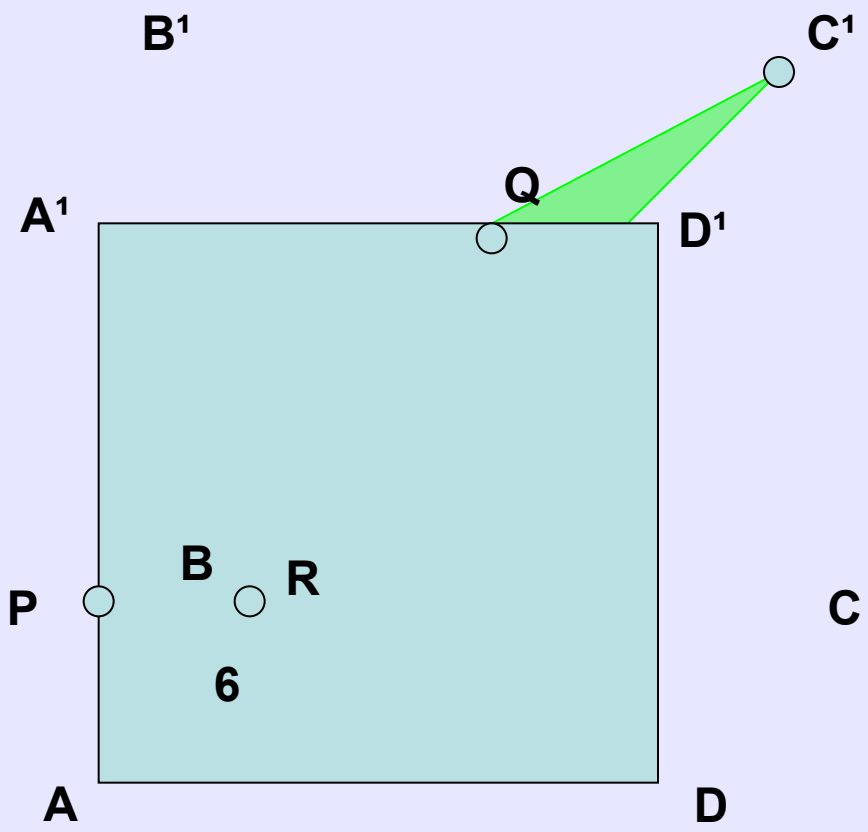
Координаты точек:

P(6;0;2)

Q(6;4;6)

R(0;0;0)

C_1(0;6;6)



- **Задача №4**

  Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки P, Q, R, найти координаты точек сечения, если P принадлежит AA_1,

  AP=2,

  Q –середина B_1C_1,

  R принадлежит DD_1,

  $D_1R=2$.

Координаты точек:

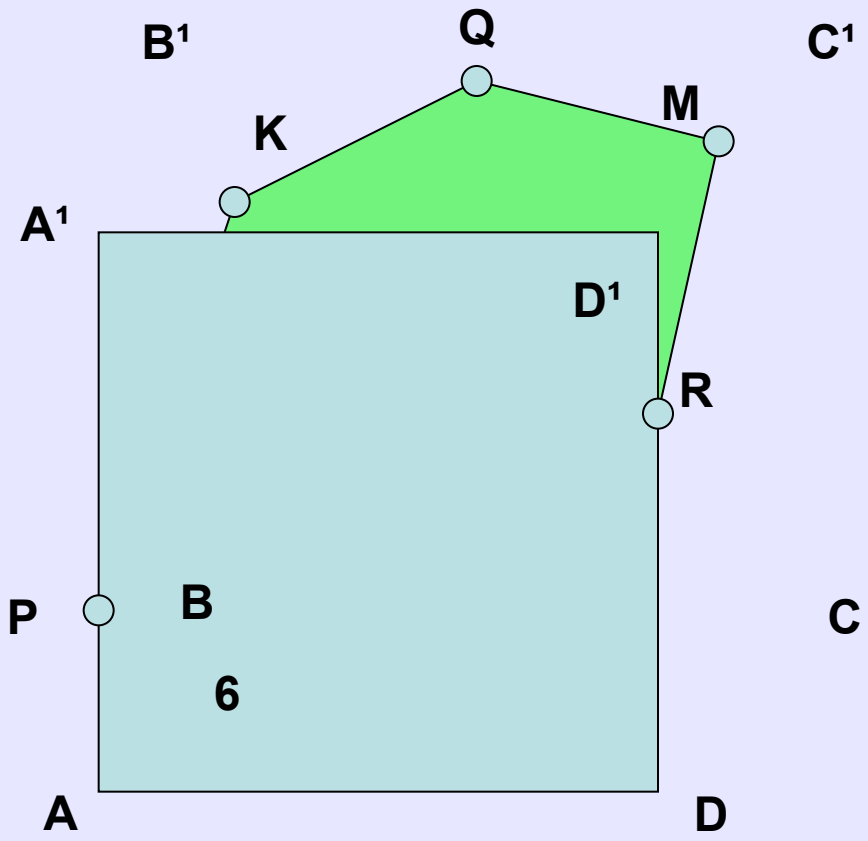
Q(0;3;6)

K(0;0;5)

P(6;0;2)

R(6;6;4)

M(2;6;6)



- **Задача №4**

  Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки P, Q, R, найти координаты точек сечения и площадь сечения,

  если P принадлежит BB_1,

  BP=2,

  Q –середина CC_1,

  C_1Q=2,

  R принадлежит DD_1,

  D_1R=2.

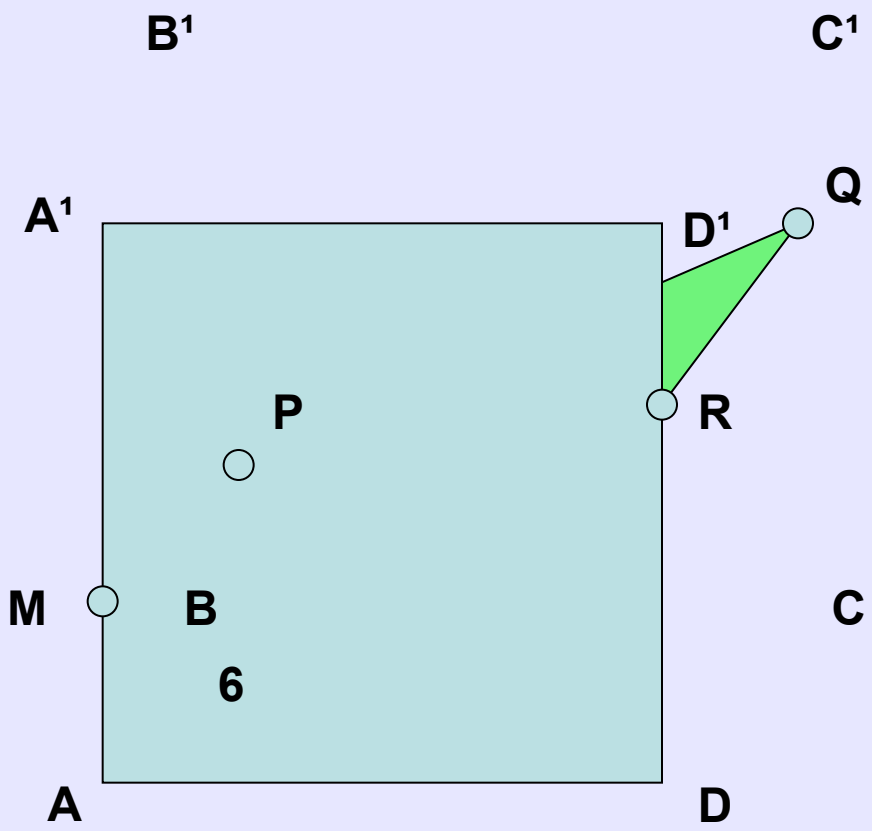
Координаты точек:

P(0;0;2)

Q(0;6;4)

R(6;6;4)

M(6;0;2)



$S_{PQRM} = 12\sqrt{10}$

Задачи для самостоятельного решения:

- **Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки P, Q, R, найти координаты точек сечения и площадь сечения, если:**

1. *P принадлежит CC_1, $C_1P=2$,*

   Q- середина AD, R-середина A_1B_1.

2. *P принадлежит CC_1, $C_1P=1$,*

   Q- середина AD, R-середина AA_1.

3. *P принадлежит DD_1, $D_1P=1$,*

Q- середина AD, R-середина AB.

4. *P принадлежит AA_1, $A_1P=1$,*

Q- середина D_1D, R принадлежит CC_1, $CR=1$.

5. *P принадлежит BB_1, $BP=2$,*

Q- середина C_1D_1, R-середина AA_1.