

***Построение сечения  
куба, нахождение его  
координат и  
площади***

***Ларионова Н.Е.  
учитель математики МАОУ ЛМИ  
г. Саратов***

# ЗАДАЧА

по нахождению сечения куба,

его координат и площади

- **Задача №1**

**Построить сечение куба,  
проходящего через точки P, Q, R,  
найти координаты точек сечения и  
площадь сечения,**

**если P-середина  $BB_1$ ,**

**Q-середина  $B_1C_1$ ,**

**R=D.**

# Дано:

Куб  $ABCD A' B' C' D'$

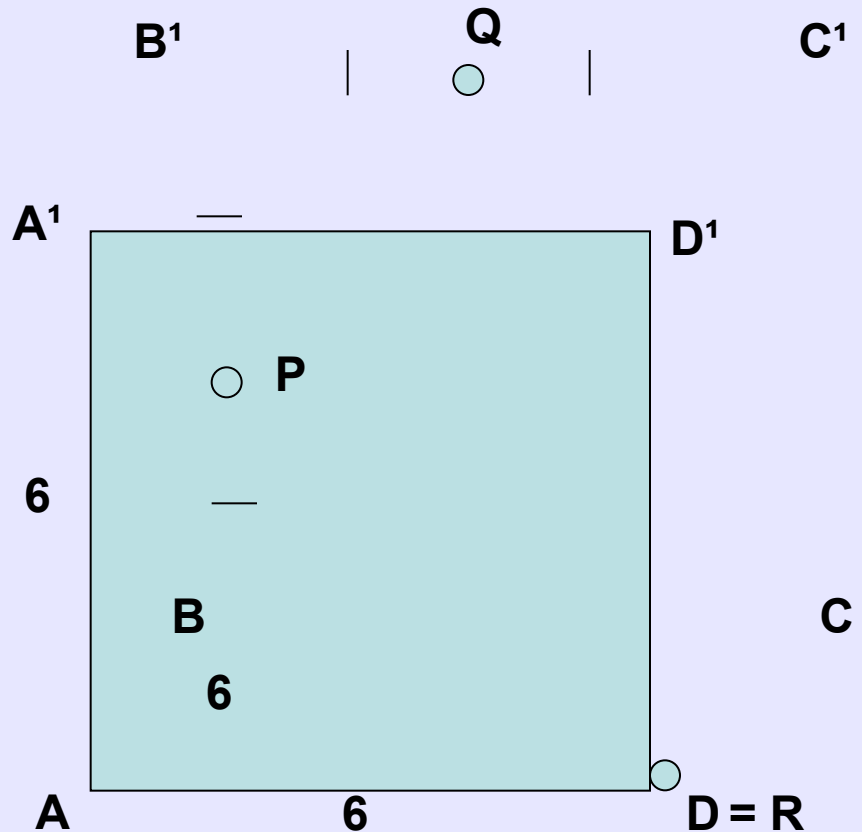
$P$  – середина  $BB'$

$Q$  – середина  $B' C'$

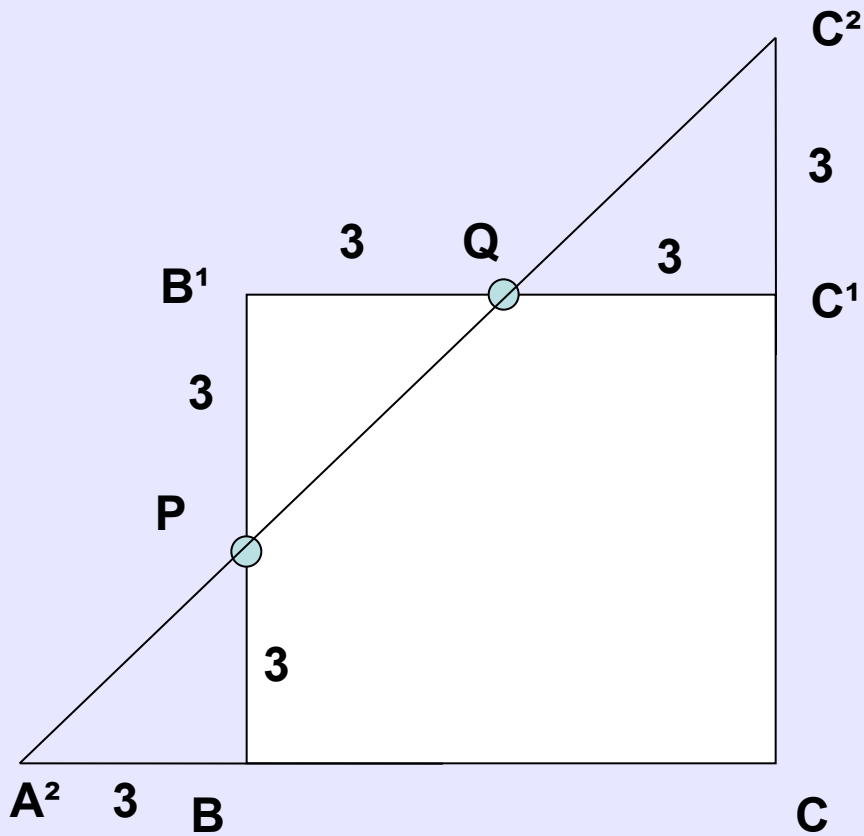
$R = D$

$AB = AA' = AD = 6$

Построить сечение куба, проходящего через точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , найти координаты точек сечения и площадь сечения.



Рассмотрим заднюю плоскость  $BB^1CC^1$



## Решение

$$BB^1 = B^1C^1 = 6 \text{ (по условию)}$$

$$B^1P = PB = 3 \text{ (P середина } BB^1)$$

$$B^1Q = QC^1 = 3 \text{ (Q середина } B^1C)$$

Продлим  $BC$  и  $CC^1$ . Соединим точки  $P$  и  $Q$ .  $PQ \cap BC = A^2$        $PQ \cap CC^1 = C^2$

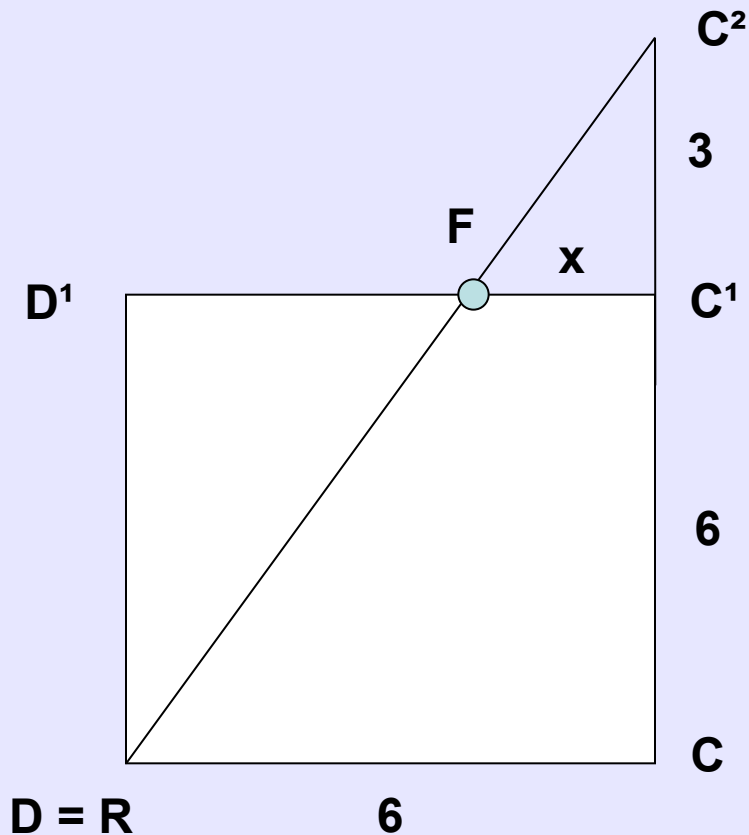
Рассмотрим  $\triangle B^1PQ$ .

$$\angle B^1PQ = \angle B^1QP = 45^\circ \text{ (т.к. } \triangle B^1PQ \text{ – равнобедренный (} B^1P = B^1Q))$$

Рассмотрим  $\triangle B^1PQ$  и  $\triangle C^1QC^2$

$$\triangle B^1PQ = \triangle C^1QC^2 \text{ (по 2-ум сторонам и углу между ними)} \Rightarrow C^1C^2 = B^1P = 3$$

# Рассмотрим боковую плоскость $DD^1CC^1$



## Решение

$DC = CC^1 = 6$  (по условию).  
Продлим  $CC^1$ , так чтобы  $C^1C^2 = 3$

Пусть  $FC^1 = x$

Рассмотрим  $\triangle DC^2C$  и  $\triangle FC^2C^1$

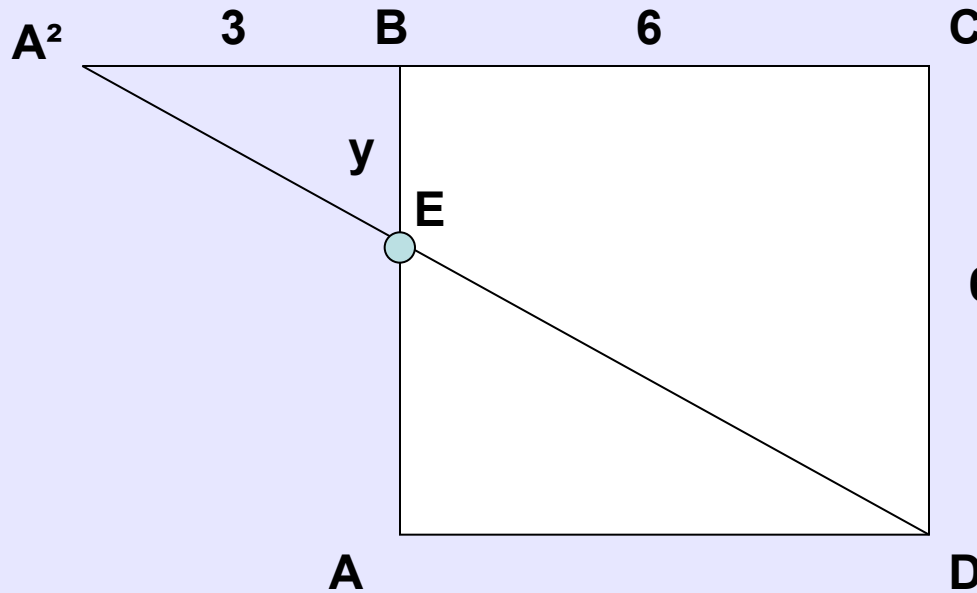
$DC^2C \sim \triangle FC^2C^1$  (по 2-ум  
сторонам и углу между ними)

$$\frac{CC^2}{C^1C^2} = \frac{DC}{FC^1} \Rightarrow \frac{9}{3} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 2$$

$FC^1 = 2$ , а  $FD^1 = 4$

Рассмотрим нижнюю плоскость **ABCD**

## Решение



$BC = CD = 6$  (по условию)  
Продлим  $CB$ , так чтобы  $A^2B = 3$

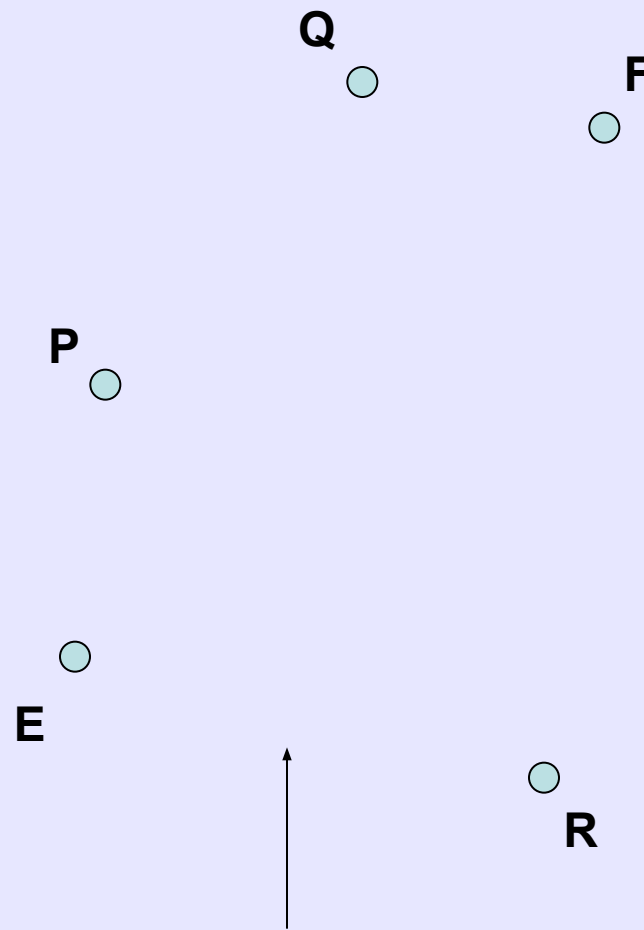
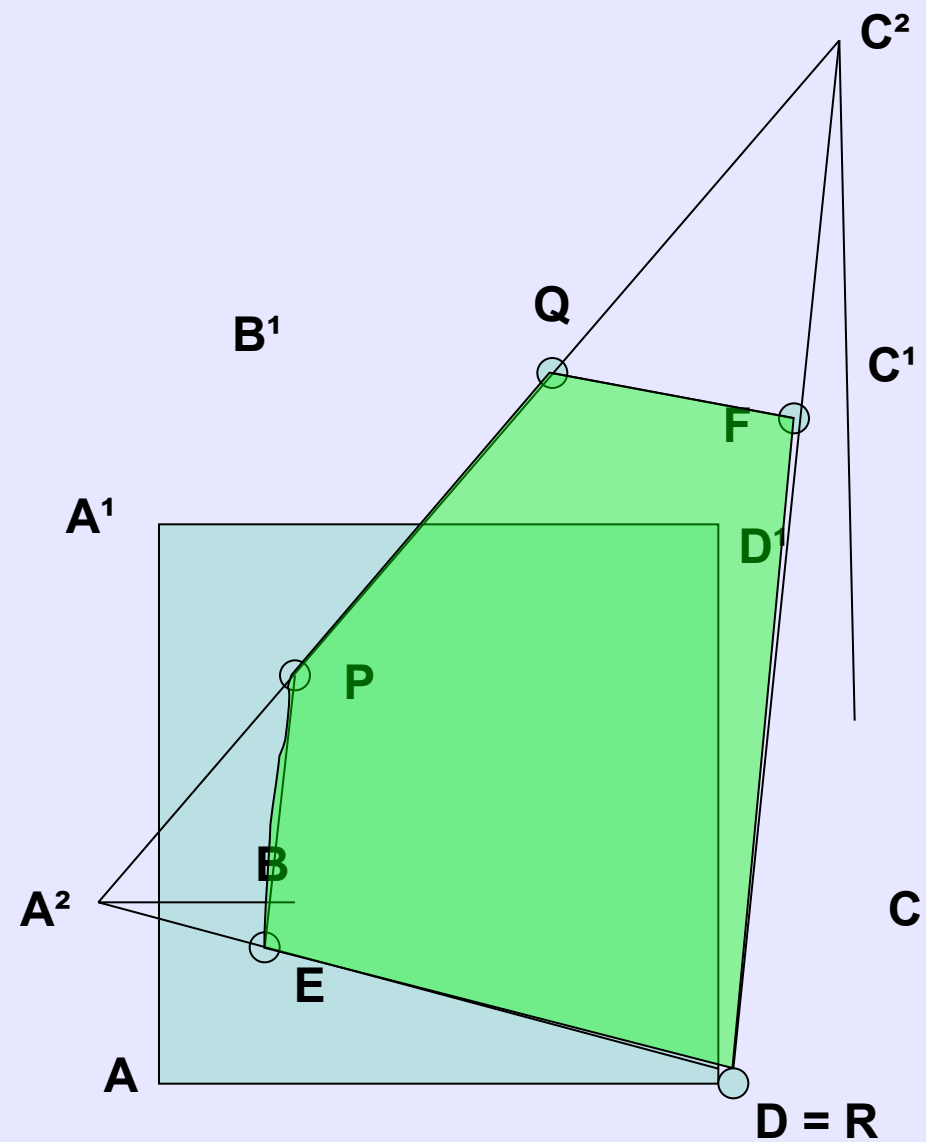
Пусть  $BE = y$

6 Рассмотрим  $\triangle A^2BE$  и  $\triangle A^2CD$   
 $\triangle A^2BE \sim \triangle A^2CD$  (по 2-ум  
сторонам и углу между ними)

$$\frac{A^2B}{A^2C} = \frac{BE}{CD} \Rightarrow \frac{3}{9} = \frac{y}{6} \Rightarrow y = 2$$

$BE = 2$ , а  $AE = 4$

# Сечение куба, проходящей через точки P, Q, R

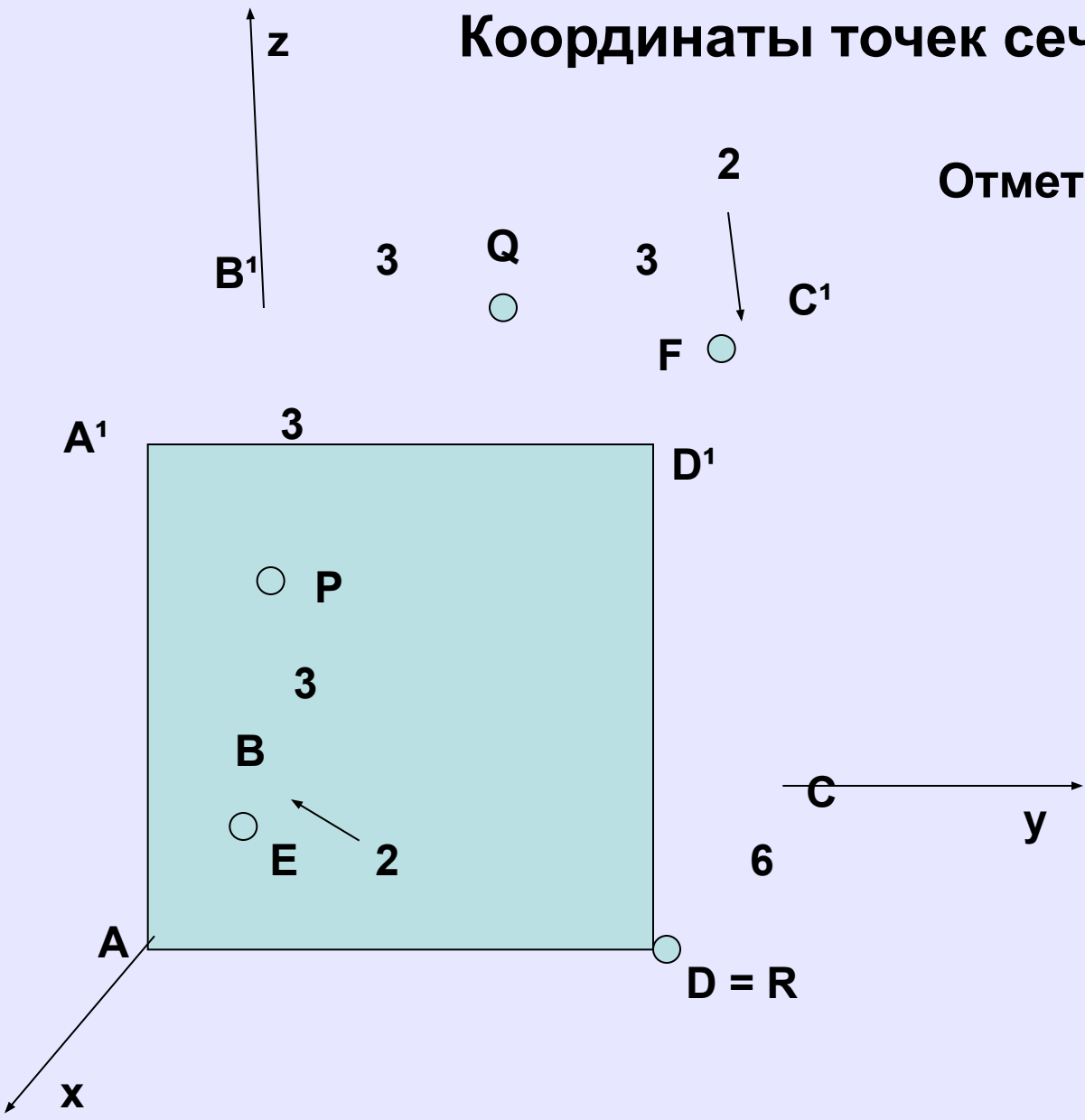


Сечение куба (PQFRE)



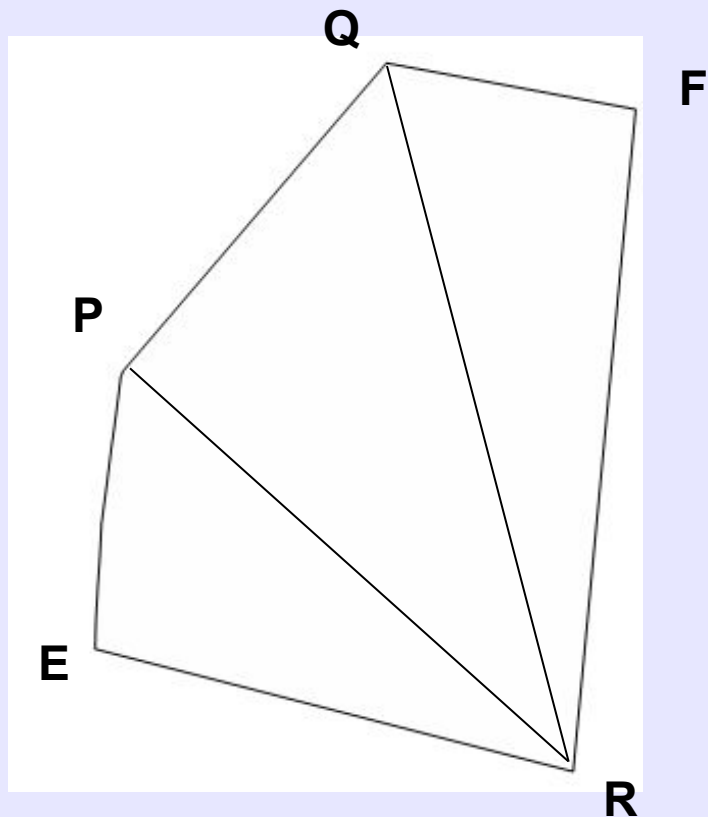
# Координаты точек сечения куба

Отметим оси координат  $x, y, z$



- |          | $x$        | $y$       | $z$        |
|----------|------------|-----------|------------|
|          | ↓          | ↓         | ↓          |
| <b>P</b> | <b>(0,</b> | <b>0,</b> | <b>3)</b>  |
| <b>Q</b> | <b>(0,</b> | <b>3,</b> | <b>6 )</b> |
| <b>F</b> | <b>(2,</b> | <b>6,</b> | <b>6 )</b> |
| <b>R</b> | <b>(6,</b> | <b>6,</b> | <b>0 )</b> |
| <b>E</b> | <b>(2,</b> | <b>0,</b> | <b>0 )</b> |

## Нахождение площади сечения куба



**Разобьём плоскость сечения куба на три треугольника, чтобы подсчитать площадь всего сечения куба.**

## Рассмотрим $\triangle EPR$

Q

$$S_{\triangle EPR} \neq \frac{1}{2} \sqrt{RE^2 * RP^2 - (\overline{RE} * \overline{RP})^2}$$

$$\overline{RE} = (-4, -6, 0)$$

$$\overline{RP} = (-6, -6, 3)$$

$$RE^2 = (-4)^2 + (-6)^2 + (0)^2 = 16 + 36 + 0 = 52$$

$$RP^2 = (-6)^2 + (-6)^2 + (3)^2 = 36 + 36 + 9 = 81$$

E (2, 0, 0)

Q (0, 3, 6)

E R (6, 6, 0)

$$\overline{RE} * \overline{RP} = ((-4) * (-6)) + ((-6) * (-6)) + ((0) * (3)) = 24 + 36 + 0 = 60$$

R

$$S_{\triangle EPR} = \frac{1}{2} \sqrt{52 * 81 - (60)^2} = \frac{\sqrt{612}}{2} = \sqrt{153}$$

Рассмотрим  $\triangle QPR$

Q

S  $\triangle QPR = \frac{1}{2} \sqrt{RQ^2 * RP^2 - (\overline{RQ} * \overline{RP})^2}$

$$\overline{RQ} = (-6, -3, 6)$$

$$\overline{RP} = (-6, -6, 3)$$

$$RQ^2 = (-6)^2 + (-3)^2 + (6)^2 = 36 + 9 + 36 = 81$$

$$RP^2 = (-6)^2 + (-6)^2 + (3)^2 = 36 + 36 + 9 = 81$$

$$\begin{aligned} \overline{RQ} * \overline{RP} &= ((-6) * (-6)) + ((-3) * (-6)) + \\ &+ ((6) * (3)) = 36 + 18 + 18 = 72 \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} P &(0, 0, 3) \\ Q &(0, 3, 6) \\ R &(6, 6, 0) \end{aligned}$$

$$S \triangle QPR = \frac{1}{2} \sqrt{81 * 81 - (72)^2} = \frac{\sqrt{1377}}{2} = \frac{3\sqrt{153}}{2}$$

Q

F Рассмотрим  $\triangle FQR$ 

$$S_{\triangle FQR} = \frac{1}{2} \sqrt{RQ^2 * RF^2 - (\overline{RQ} * \overline{RF})^2}$$

$$\overline{RQ} = (-6, -3, 6)$$

$$\overline{RF} = (-4, 0, 6)$$

$$RQ^2 = (-6)^2 + (-3)^2 + (6)^2 = 36 + 9 + 36 = 81$$

$$RF^2 = (-4)^2 + (0)^2 + (6)^2 = 16 + 0 + 36 = 52$$

$$\begin{aligned} \overline{RQ} * \overline{RF} &= ((-6) * (-4)) + ((-3) * (0)) + \\ &+ ((6) * (6)) = 24 + 0 + 36 = 60 \end{aligned}$$

$$S_{\triangle FQR} = \frac{1}{2} \sqrt{81 * 52 - (60)^2} = \frac{\sqrt{612}}{2} = \sqrt{153}$$

$$F (2, 6, 6)$$

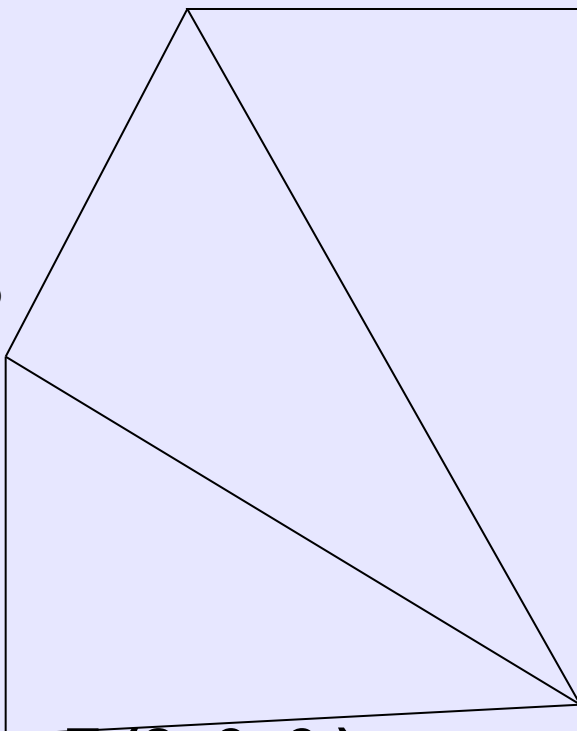
$$Q (0, 3, 6)$$

$$R (6, 6, 0)$$

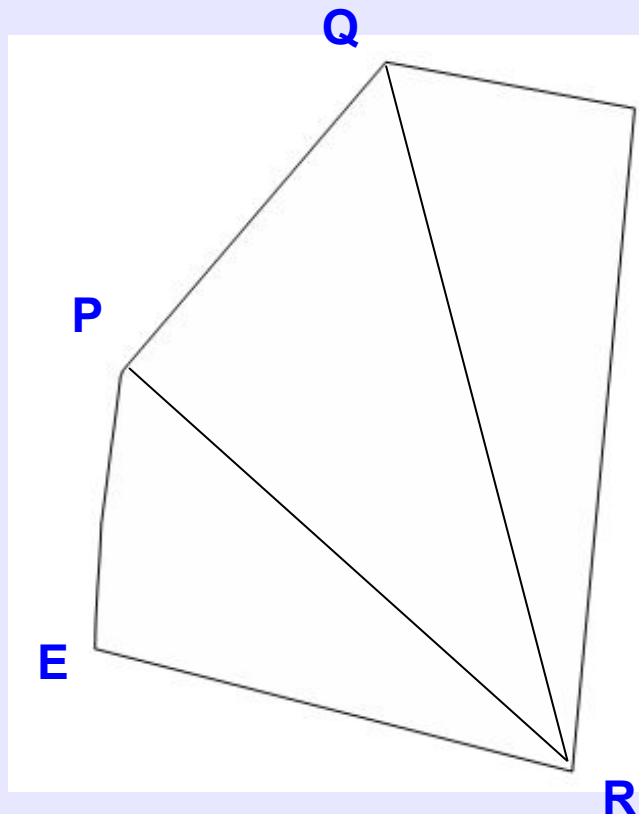
R

P

E



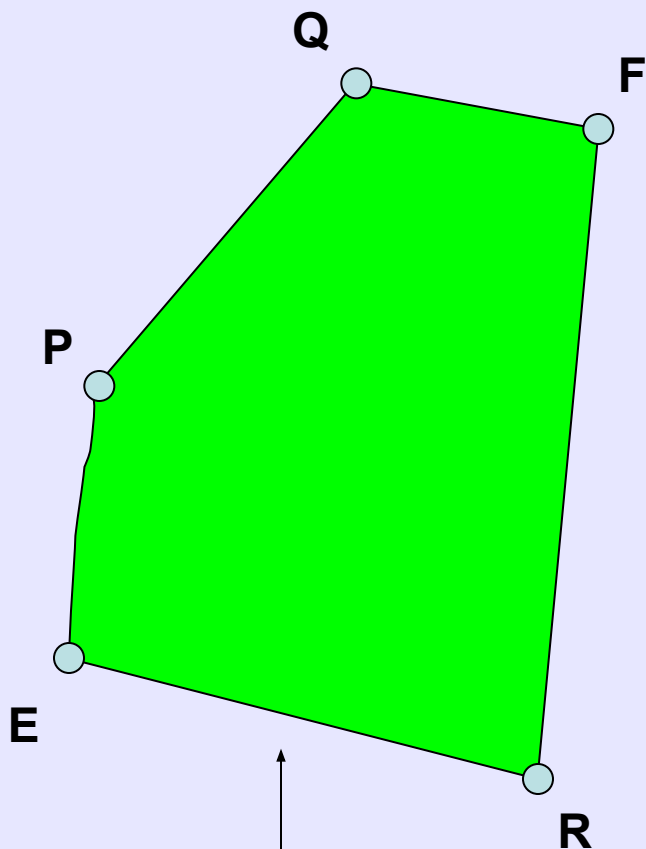
## Нахождение площади сечения куба



$$S_{\text{сеч. PQFRE}} = \Delta QPR + \\ + \Delta QPR + \Delta FQR$$

$$S_{\text{сеч. PQFRE}} = \sqrt{153} + \\ + \frac{3\sqrt{153}}{2} + \sqrt{153} = \\ = (7\sqrt{153})/2 = (21\sqrt{17})/2$$

$$S_{\text{сеч. PQFRE}} = (21\sqrt{17})/2$$



Сечение куба (PQFRE)

- P (0, 0, 3)
- Q (0, 3, 6)
- F (2, 6, 6)
- R (6, 6, 0)
- E (2, 0, 0)

↑  
Координаты точек сечения куба

Площадь сечения куба



$$S_{\text{сеч. PQFRE}} = (21\sqrt{17}) / 2$$

- **Задача №2**

**Построить сечение куба,  
проходящего через точки P, Q, R,  
найти координаты точек сечения и  
площадь сечения,**

**если P-середи́на  $AA_1$ ,**

**Q-середи́на  $A_1B_1$ ,**

**R- середи́на  $AD$ .**



# Дано:

Куб  $ABCD A^1 B^1 C^1 D^1$

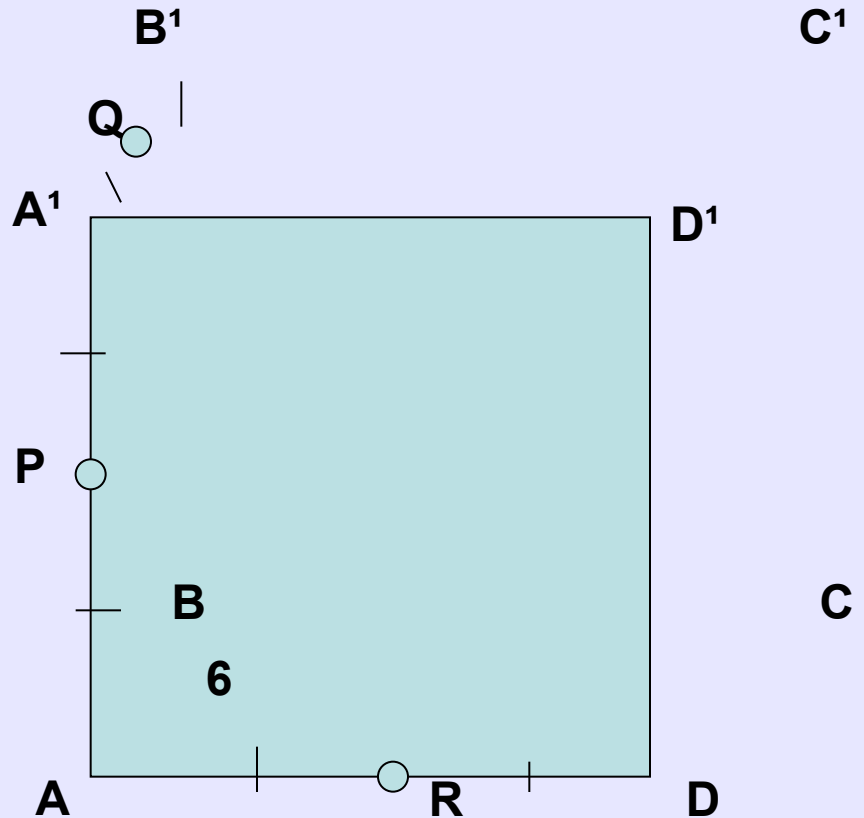
$P$  – середина  $AA^1$

$Q$  – середина  $A^1 B^1$

$R$  – середина  $AD$

$AB = AA^1 = AD = 6$

Построить сечение куба, проходящего через точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , найти координаты точек сечения и площадь сечения.



## Координаты точек:

P(6;0;3)

Q(3;0;6)

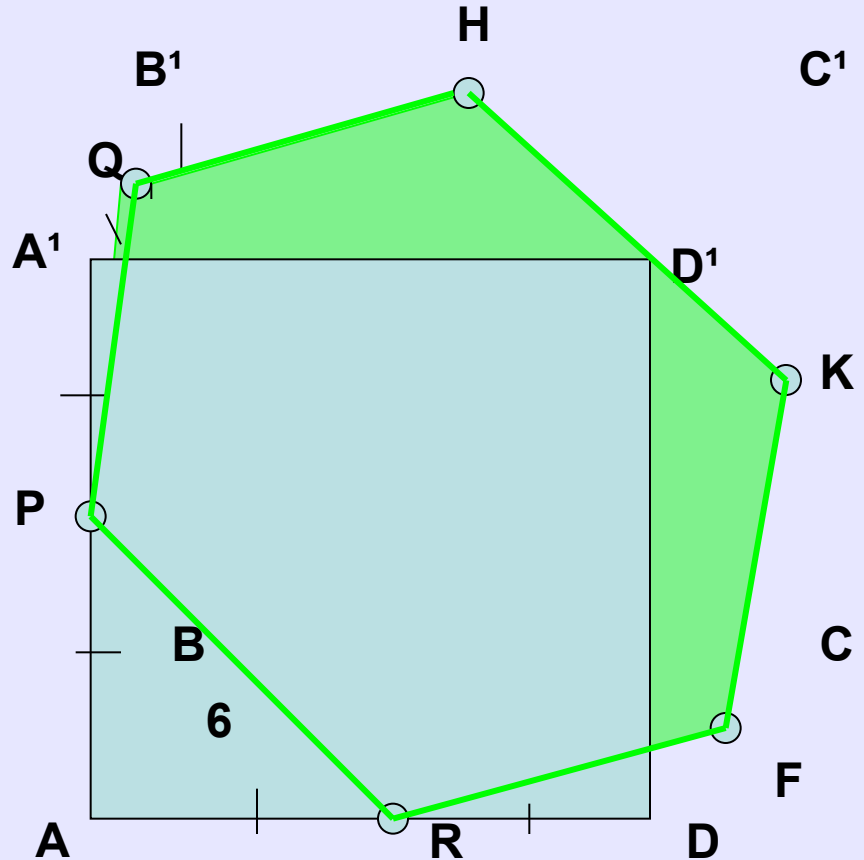
H(0;3;6)

K(0;6;3)

F(3;6;0)

R(6;3;0)

$$S_{PQHKFR} = 27\sqrt{3}$$



- **Задача №3**

**Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки P, Q, R, найти координаты точек сечения, если P принадлежит AA<sub>1</sub>,**

**AP=2,**

**Q принадлежит A<sub>1</sub>D<sub>1</sub>,**

**D<sub>1</sub>Q=2,**

**R=B.**

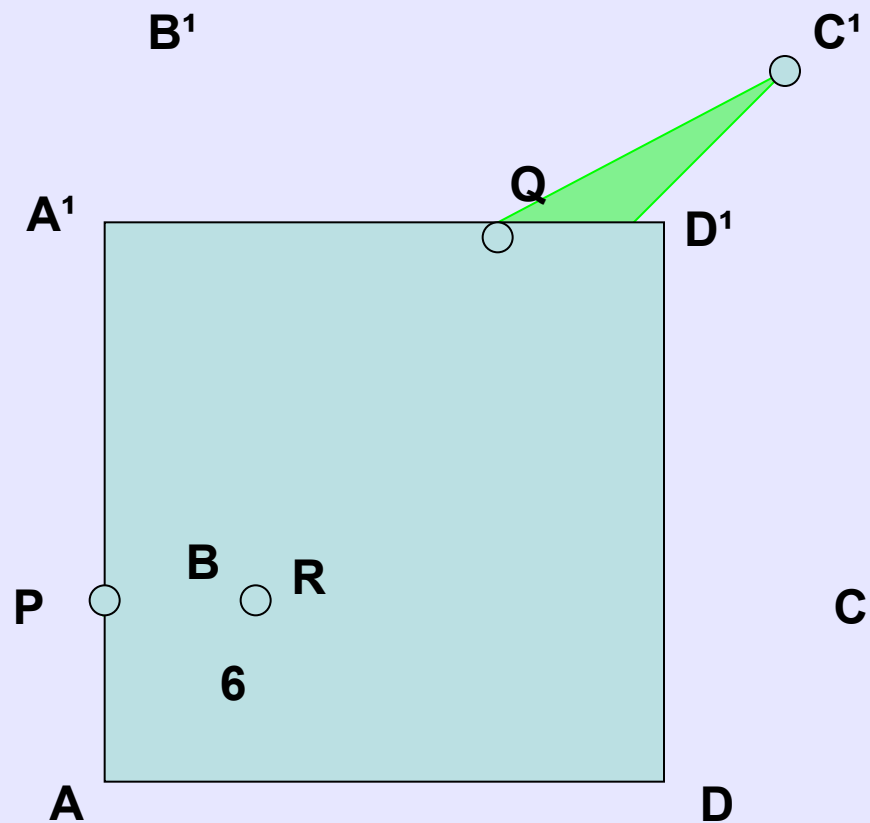
## Координаты точек:

$P(6;0;2)$

$Q(6;4;6)$

$R(0;0;0)$

$C_1(0;6;6)$



- **Задача №4**

**Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки P, Q, R, найти координаты точек сечения, если P принадлежит AA<sub>1</sub>,**

**AP=2,**

**Q –середина B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>,**

**R принадлежит DD<sub>1</sub>,**

**D<sub>1</sub>R=2.**

## Координаты точек:

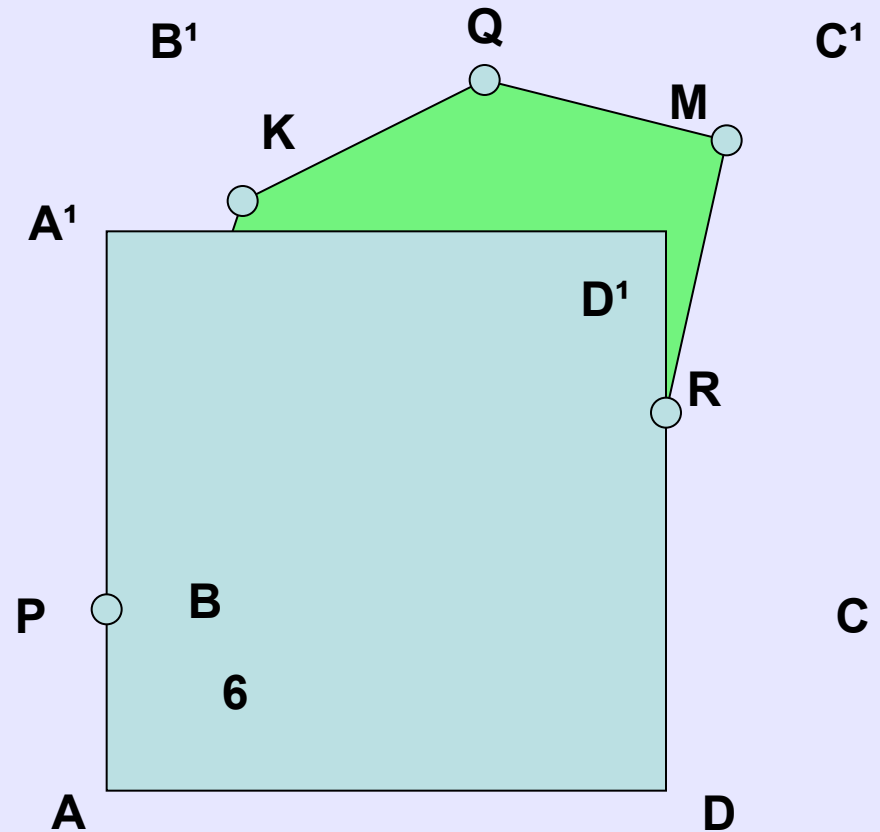
$Q(0;3;6)$

$K(0;0;5)$

$P(6;0;2)$

$R(6;6;4)$

$M(2;6;6)$



- **Задача №4**

**Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки P, Q, R, найти координаты точек сечения и площадь сечения,**

**если P принадлежит  $BB_1$ ,**

**$BP=2$ ,**

**Q –середина  $CC_1$ ,**

**$C_1Q=2$ ,**

**R принадлежит  $DD_1$ ,**

**$D_1R=2$ .**

## Координаты точек:

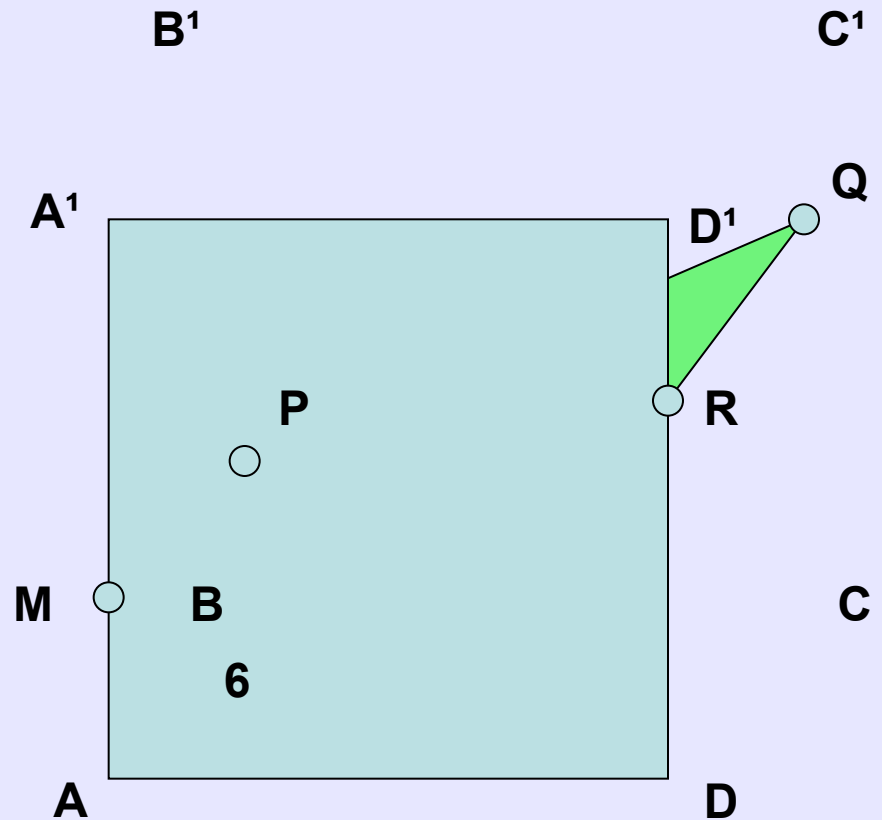
$P(0;0;2)$

$Q(0;6;4)$

$R(6;6;4)$

$M(6;0;2)$

$$S_{PQRM} = 12\sqrt{10}$$





# Задачи для самостоятельного решения:

- Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , найти координаты точек сечения и площадь сечения, если:

1.  $P$  принадлежит  $CC_1$ ,  $C_1P=2$ ,

$Q$ - середина  $AD$ ,  $R$ -середина  $A_1B_1$ .

2.  $P$  принадлежит  $CC_1$ ,  $C_1P=1$ ,

$Q$ - середина  $AD$ ,  $R$ -середина  $AA_1$ .

3.  $P$  принадлежит  $DD_1, D_1P=1,$   
Q- середина  $AD, R$ -середина  $AB.$
4.  $P$  принадлежит  $AA_1, A_1P=1,$   
Q- середина  $D_1D, R$  принадлежит  $CC_1,$   
 $CR=1.$
5.  $P$  принадлежит  $BB_1, BP=2,$   
Q- середина  $C_1D_1, R$ -середина  $AA_1.$