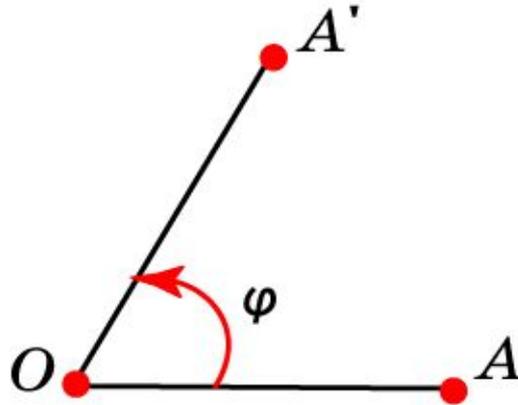


# Поворот

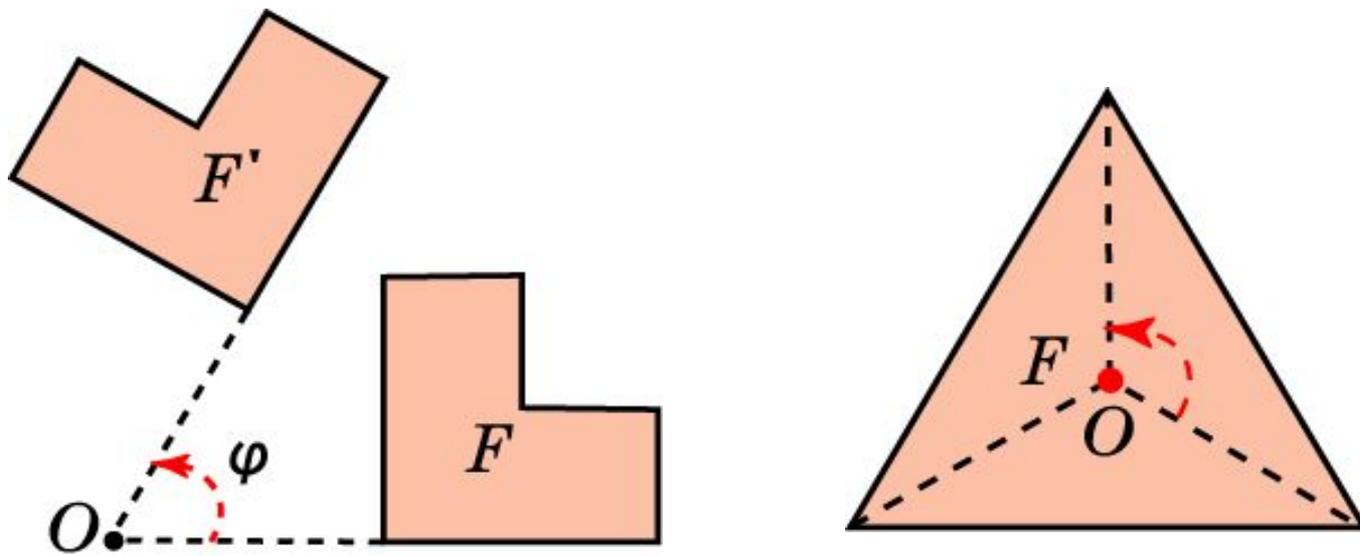
Говорят, что точка  $A'$  плоскости получается из точки  $A$  **поворотом** вокруг точки  $O$  на угол  $\varphi$ , если  $OA' = OA$  и  $\sphericalangle AOA' = \varphi$ .



Преобразование плоскости, при котором данная точка  $O$  остается на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг точки  $O$  в одном и том же направлении (против часовой стрелки или по часовой стрелке) на заданный угол  $\varphi$ , называется **поворотом** вокруг точки  $O$  на угол  $\varphi$ .

## Симметрия $n$ -го порядка

Говорят, что фигура  $F'$  получается **поворотом** фигуры  $F$  вокруг точки  $O$  на угол  $\varphi$ , если все точки фигуры  $F'$  получаются всевозможными поворотами точек фигуры  $F$  вокруг точки  $O$  на угол  $\varphi$ .

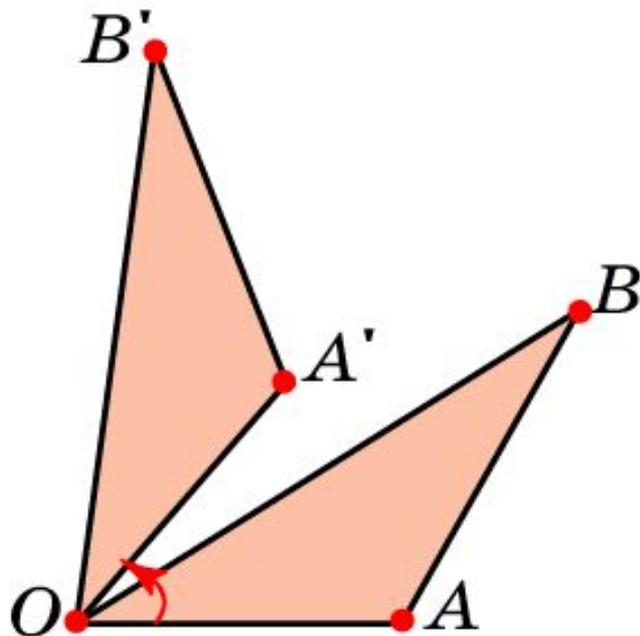


Точка  $O$  называется **центром симметрии  $n$ -го порядка** фигуры  $F$ , если при повороте фигуры  $F$  вокруг точки  $O$  на угол  $\frac{360^\circ}{n}$  фигура  $F$  совмещается сама с собой.

# Свойства

**Свойство 1.** Поворот сохраняет расстояния между точками.

**Свойство 2.** Поворот переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.



# Вопрос 1

Что называется поворотом вокруг точки?

**Ответ:** Преобразование плоскости, при котором данная точка  $O$  остается на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг точки  $O$  в одном и том же направлении (против часовой стрелки или по часовой стрелке) на заданный угол  $\varphi$ , называется поворотом вокруг точки  $O$  на угол  $\varphi$ .

## Вопрос 2

Какая точка называется центром симметрии  $n$ -го порядка?

**Ответ:** Точка  $O$  называется центром симметрии  $n$  - го порядка фигуры  $F$ , если при повороте фигуры  $F$  вокруг точки  $O$  на угол  $\frac{360^\circ}{n}$  фигура  $F$  совмещается сама с собой.

## Вопрос 3

Сформулируйте свойства поворота.

**Ответ:** 1. Поворот сохраняет расстояния между точками.

2. Поворот переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи и прямые в прямые.

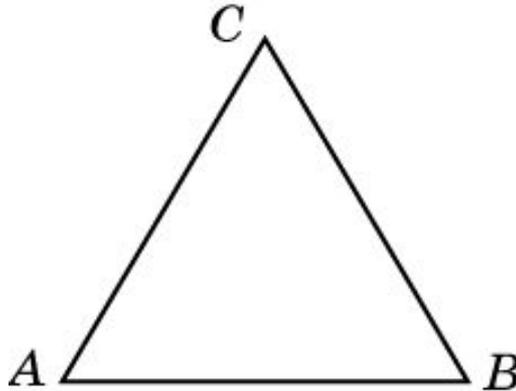
# Упражнение 1

На какой угол нужно повернуть прямую, чтобы полученная прямая была: а) перпендикулярна исходной; б) параллельна исходной.

**Ответ:** а)  $90^\circ$ ; б)  $180^\circ$ .

## Упражнение 2

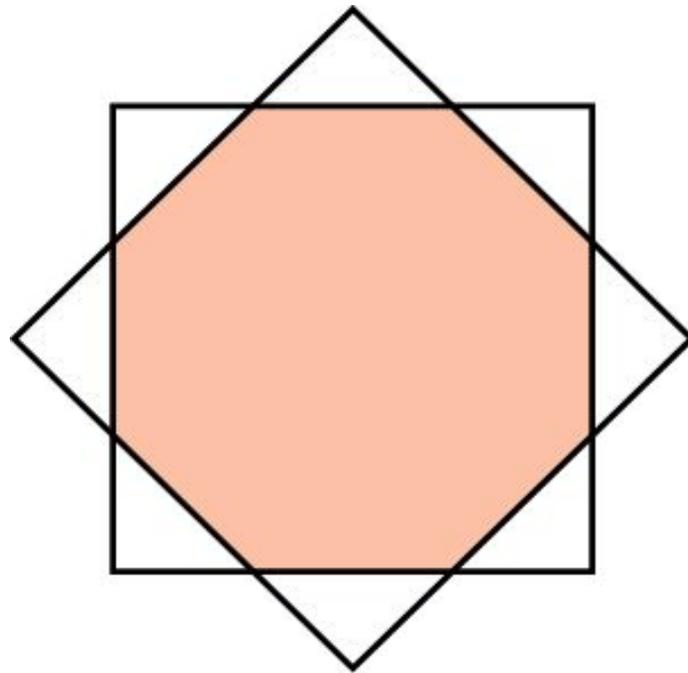
Правильный треугольник повернули на  $60^\circ$  вокруг центра описанной окружности. Какая фигура является общей частью полученного и исходного треугольников?



**Ответ:** Правильный шестиугольник.

## Упражнение 3

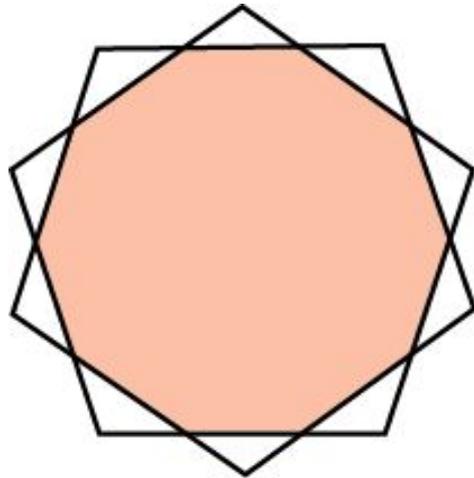
Квадрат повернули вокруг точки пересечения диагоналей на угол  $45^\circ$ . Какая фигура является общей частью полученного и исходного квадратов?



**Ответ:** Правильный восьмиугольник

## Упражнение 4

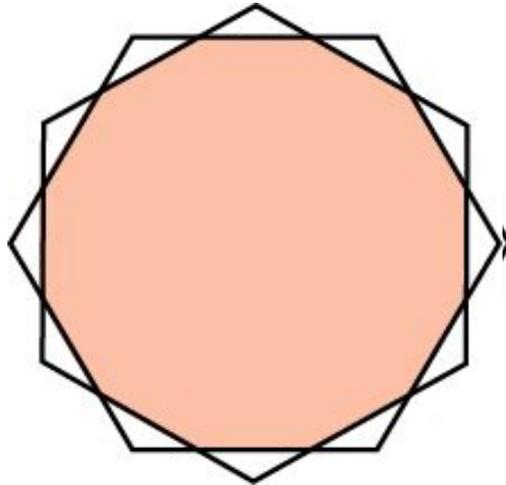
Правильный пятиугольник повернули вокруг центра описанной окружности на угол  $36^\circ$ . Какая фигура является общей частью полученного и исходного пятиугольников?



**Ответ:** Правильный десятиугольник

## Упражнение 5

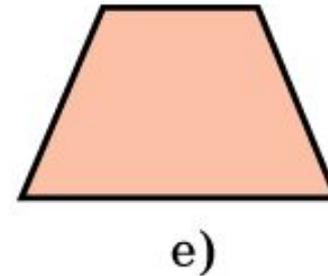
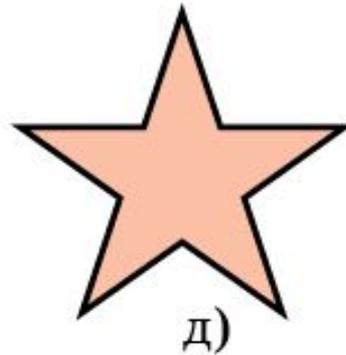
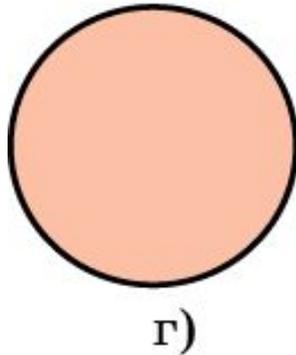
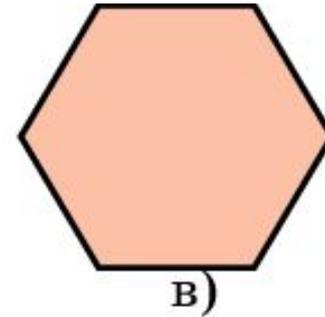
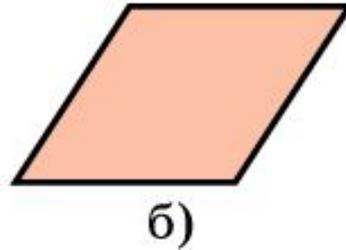
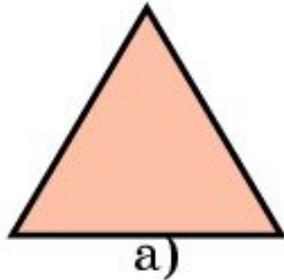
Правильный шестиугольник повернули вокруг центра описанной окружности на угол  $30^\circ$ . Какая фигура является общей частью полученного и исходного шестиугольников?



**Ответ:** Правильный двенадцатиугольник

## Упражнение 6

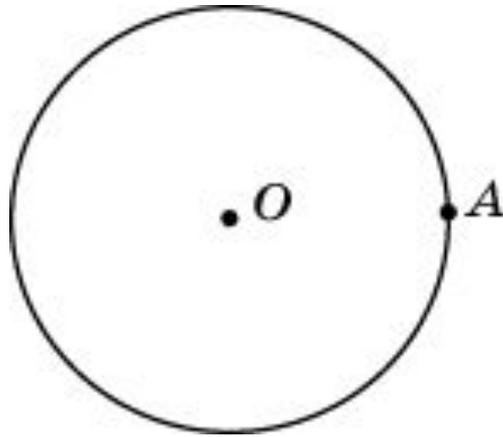
Какие фигуры, изображенные на рисунке, при повороте переходят сами в себя? Укажите центры и углы поворота.



- Ответ:** а) Центр описанной окружности,  $120^\circ$ ;  
б) точка пересечения диагоналей,  $180^\circ$ ;  
в) центр описанной окружности,  $60^\circ$ ;  
г) центр окружности, произвольный угол;  
д) центр описанной окружности,  $72^\circ$ .

## Упражнение 7

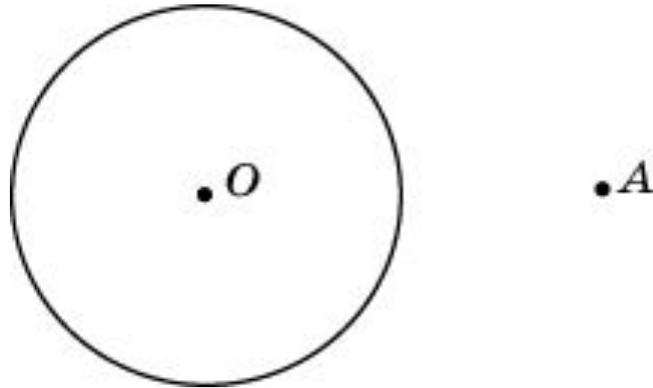
На какой наименьший угол нужно повернуть окружность вокруг точки  $A$ , ей принадлежащей, чтобы повернутая окружность касалась исходной?



Ответ:  $180^\circ$ .

## Упражнение 8

Точка  $A$  удалена от центра окружности радиуса 2 на расстояние 4. На какой наименьший угол нужно повернуть окружность вокруг точки  $A$ , чтобы повернутая окружность касалась исходной?



Ответ:  $60^\circ$ .

## Упражнение 9

На рисунке укажите буквы латинского алфавита, имеющие центр симметрии 2-го порядка.

A B C D E F G H I J K L M  
N O P Q R S T U V W X Y Z

Ответ: H, I, N, O, S, X, Z.

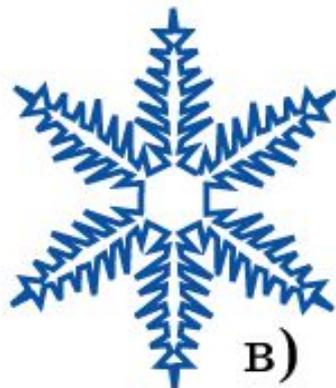
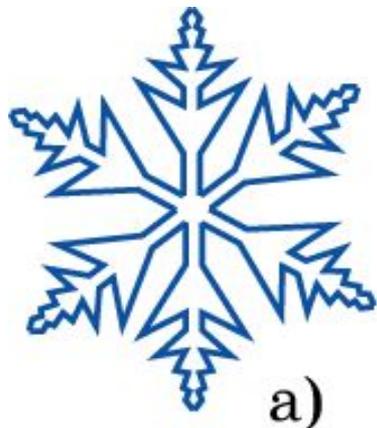
## Упражнение 10

Центром симметрии какого порядка является точка пересечения диагоналей: а) параллелограмма; б) ромба; в) прямоугольника; г) квадрата; д) правильного пятиугольника?

**Ответ:** а) 2-го порядка;  
б) 2-го порядка.  
в) 2-го порядка.  
г) 4-го порядка.  
д) 5-го порядка.

## Упражнение 11

Симметрией какого порядка обладают снежинки?



**Ответ:** 6-го порядка.

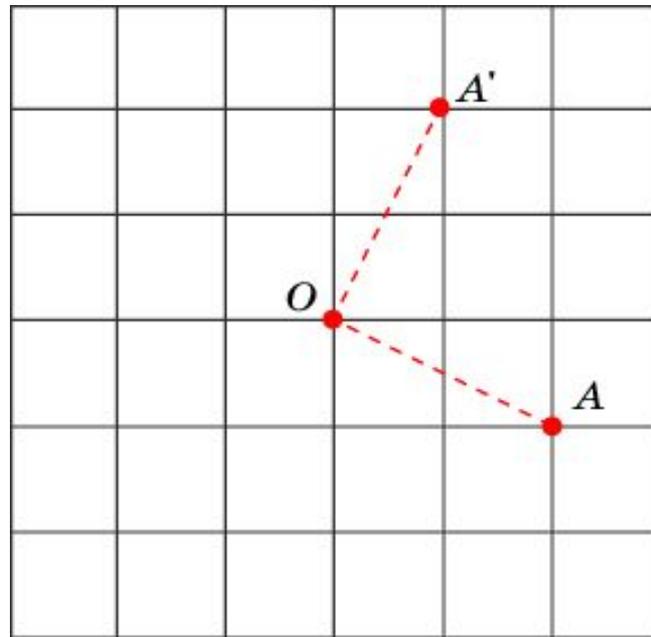
## Упражнение 12

Может ли центр симметрии  $n$ -го порядка фигуры не принадлежать ей?

Ответ: Да.

## Упражнение 13

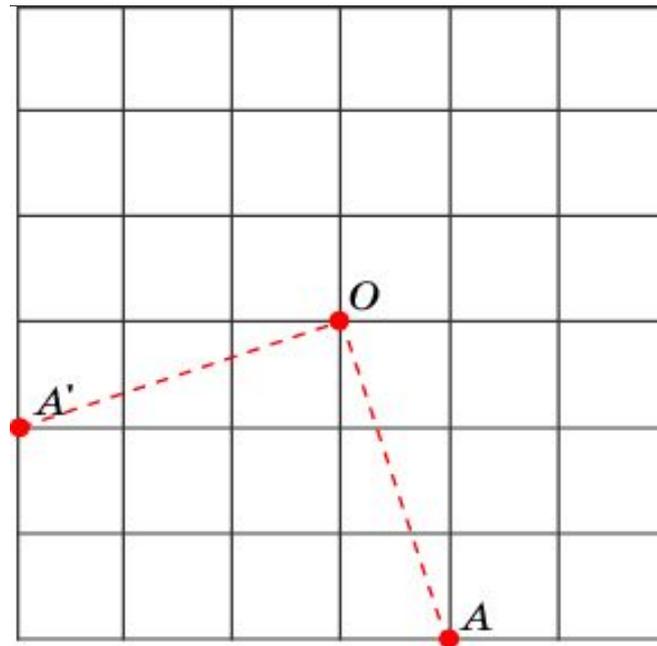
Изобразите точку  $A'$ , полученную из точки  $A$  поворотом вокруг точки  $O$  на угол  $90^\circ$  против часовой стрелки.



Ответ:

## Упражнение 14

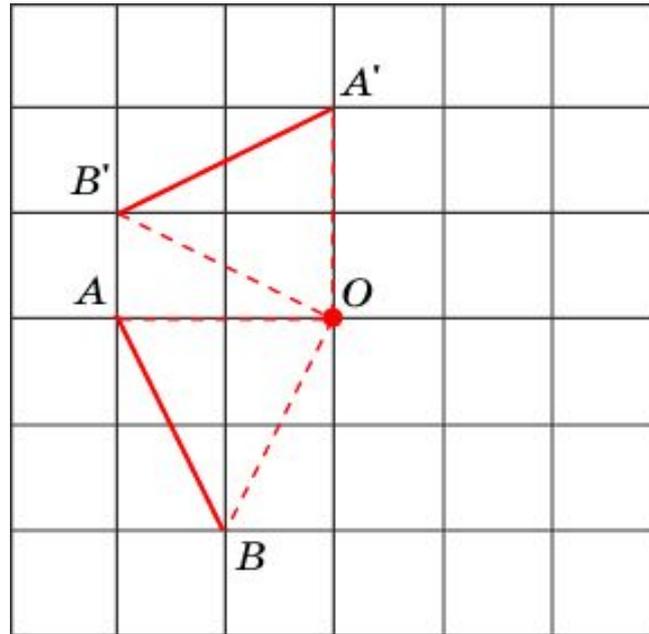
Изобразите точку  $A'$ , полученную из точки  $A$  поворотом вокруг точки  $O$  на угол  $270^\circ$  против часовой стрелки.



Ответ:

## Упражнение 15

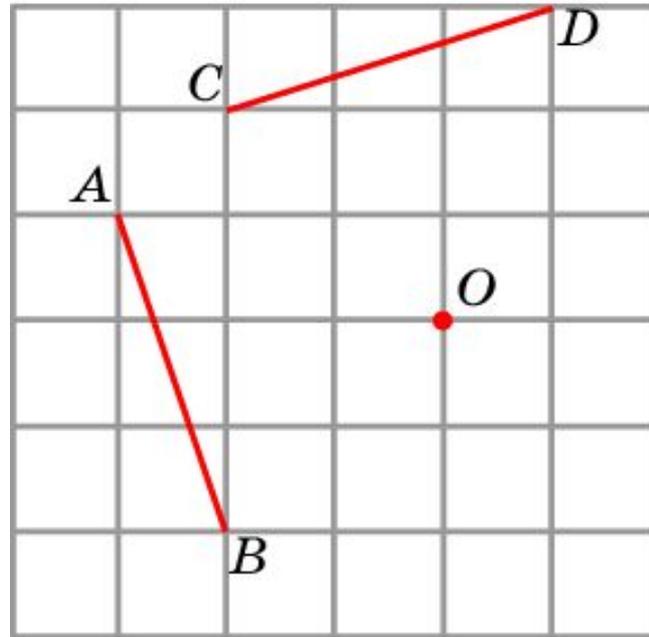
Изобразите отрезок  $A'B'$ , полученный из отрезка  $AB$  поворотом вокруг точки  $O$  на угол  $90^\circ$  по часовой стрелке.



Ответ:

## Упражнение 16

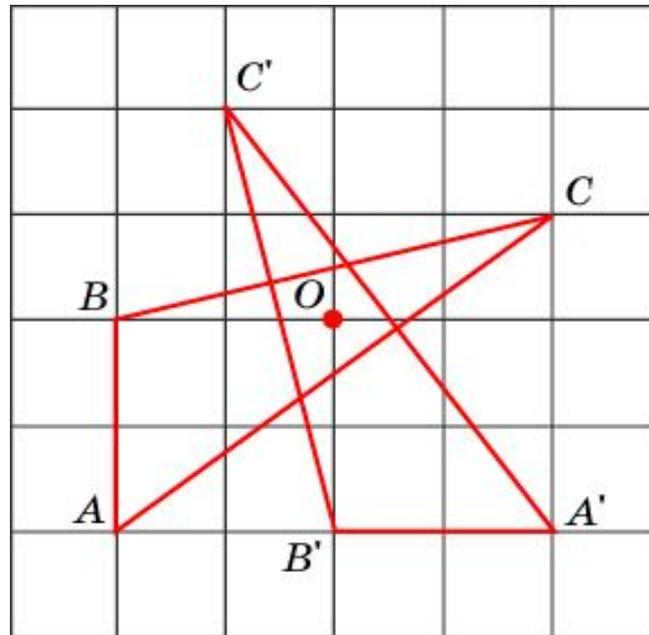
Отрезок  $CD$  получен поворотом отрезка  $AB$  на угол  $90^\circ$  по часовой стрелке. Укажите центр поворота.



Ответ:

## Упражнение 17

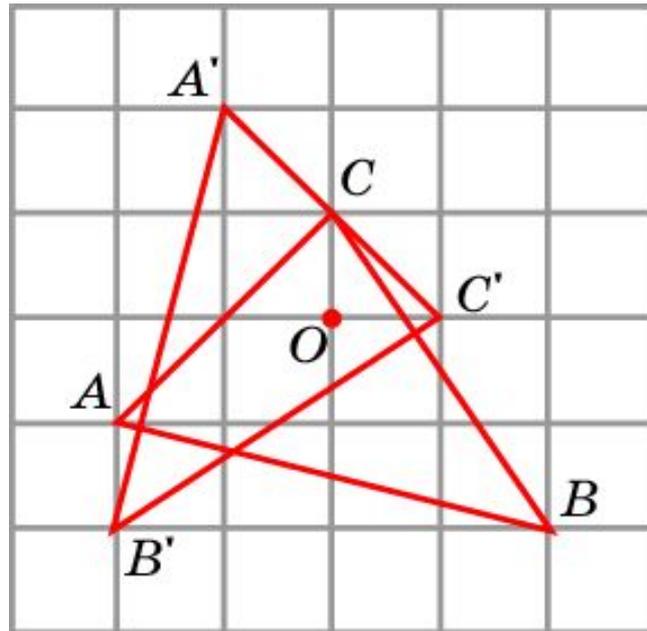
Изобразите треугольник  $A'B'C'$ , полученный из треугольника  $ABC$  поворотом вокруг точки  $O$  на угол  $90^\circ$  против часовой стрелки.



Ответ:

## Упражнение 18

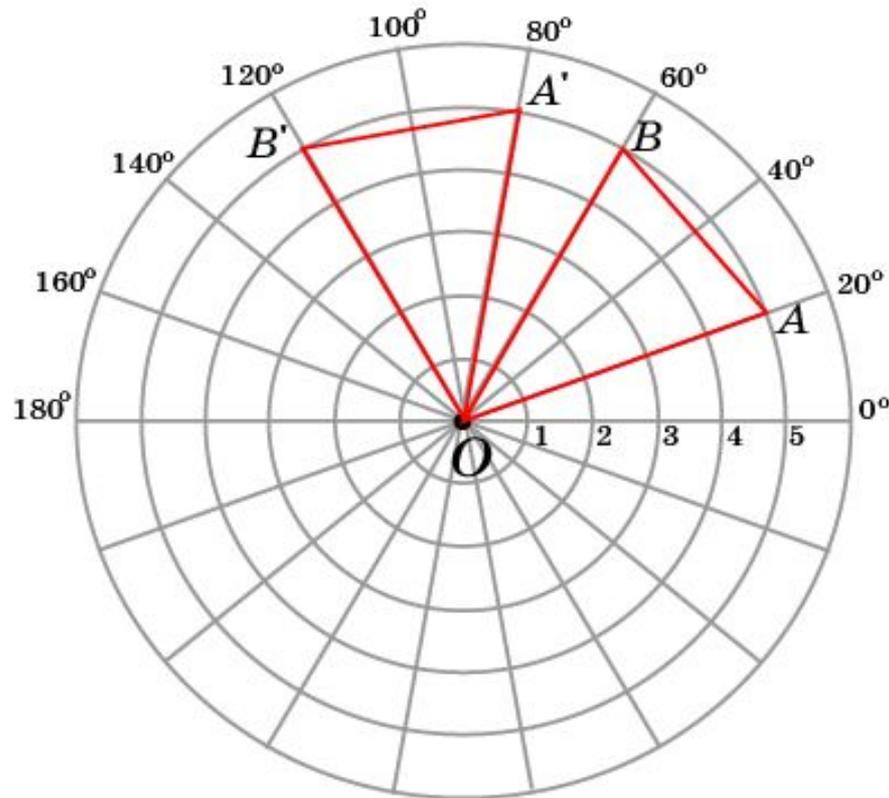
Изобразите треугольник, полученный поворотом треугольника  $ABC$  вокруг точки  $O$  на угол  $90^\circ$  по часовой стрелке.



Ответ:

## Упражнение 19

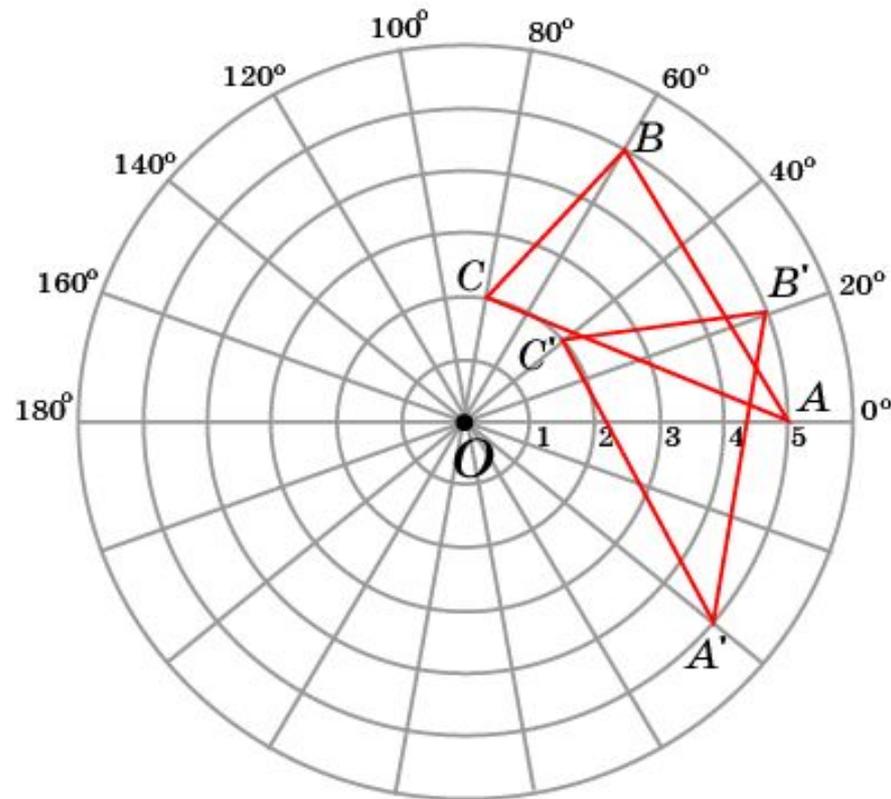
Изобразите треугольник, полученный из треугольника  $OAB$  поворотом вокруг точки  $O$  на угол  $60^\circ$  против часовой стрелки.



Ответ:

## Упражнение 20

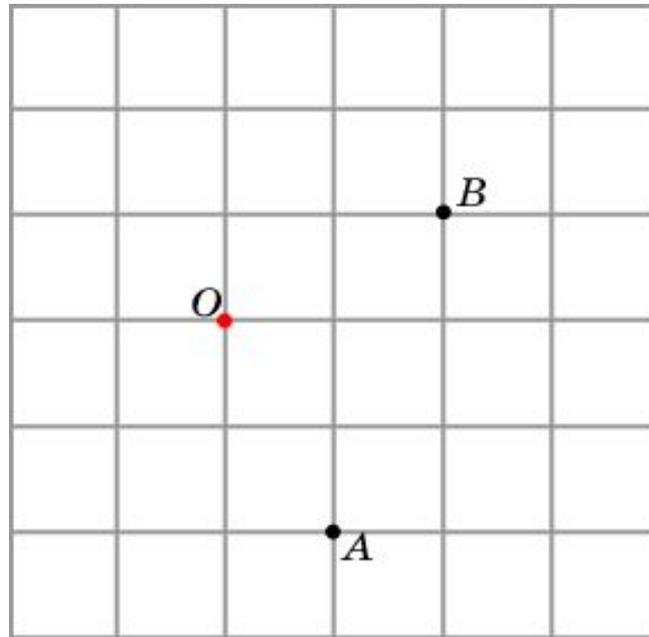
Изобразите треугольник, полученный из треугольника  $ABC$  поворотом вокруг точки  $O$  на угол  $40^\circ$  по часовой стрелке.



Ответ:

## Упражнение 21

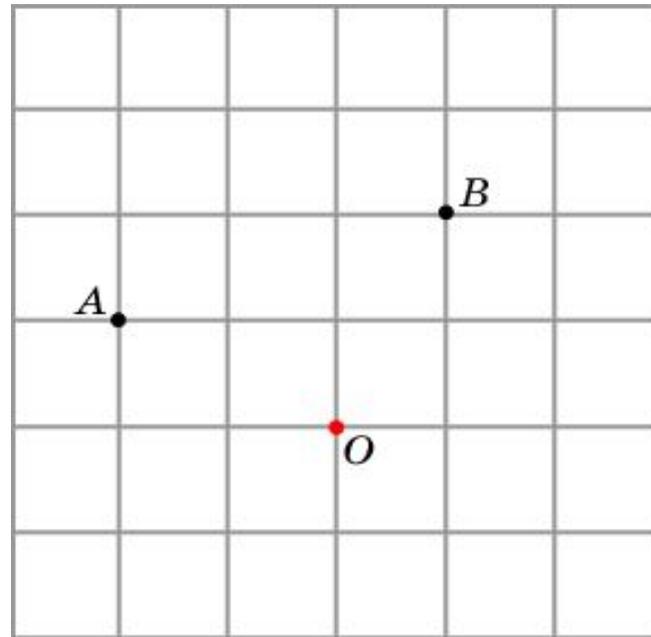
Точка  $B$  получена поворотом точки  $A$  на угол  $90^\circ$  против часовой стрелки. Укажите центр поворота.



Ответ:

## Упражнение 22

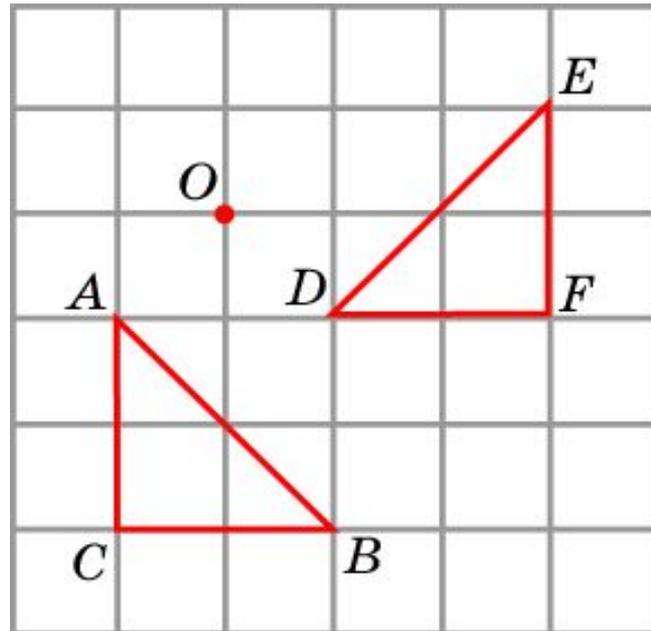
Точка  $B$  получена поворотом точки  $A$  на угол  $90^\circ$  по часовой стрелке. Укажите центр поворота.



Ответ:

## Упражнение 23

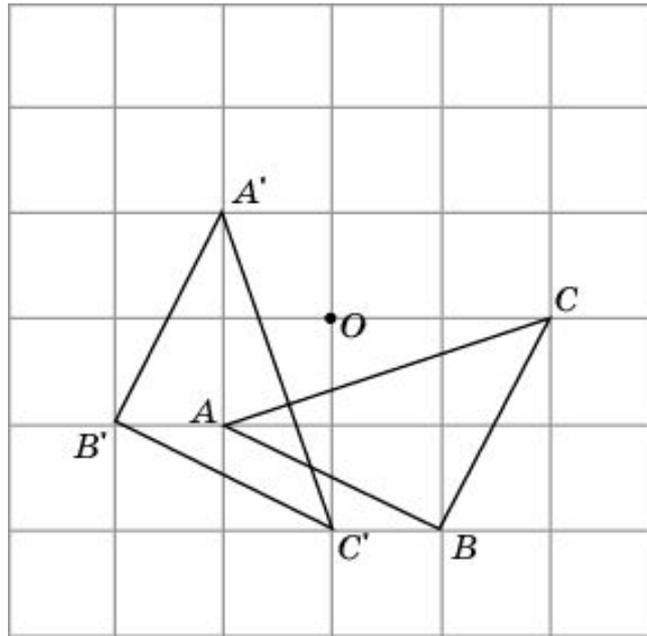
Треугольник  $DEF$  получен поворотом треугольника  $ABC$  на угол  $90^\circ$  против часовой стрелки. Укажите центр поворота.



Ответ:

## Упражнение 24

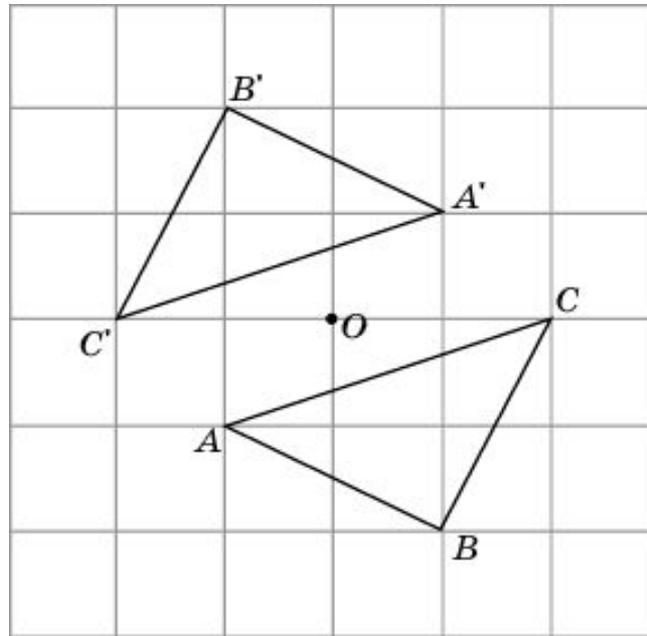
Треугольник  $A'B'C'$  получен поворотом треугольника  $ABC$  по часовой стрелке вокруг точки  $O$ . Найдите угол поворота.



Ответ:  $90^\circ$ .

## Упражнение 25

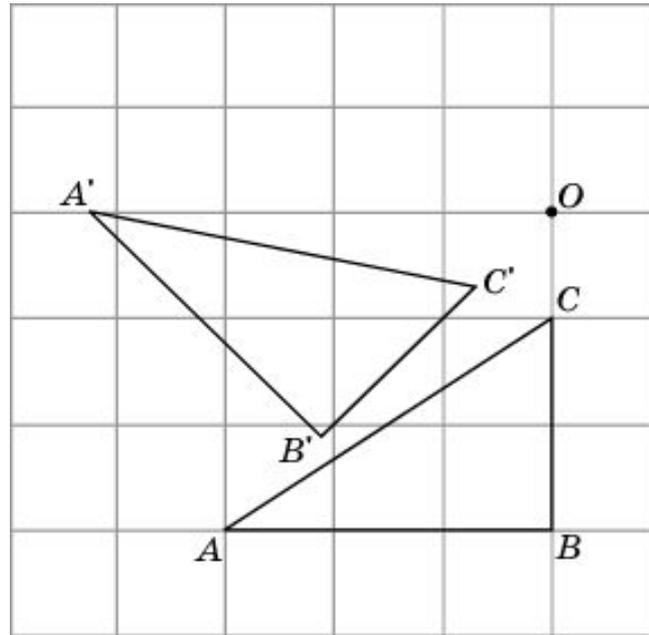
Треугольник  $A'B'C'$  получен поворотом треугольника  $ABC$  по часовой стрелке вокруг точки  $O$ . Найдите угол поворота.



Ответ:  $180^\circ$ .

## Упражнение 26

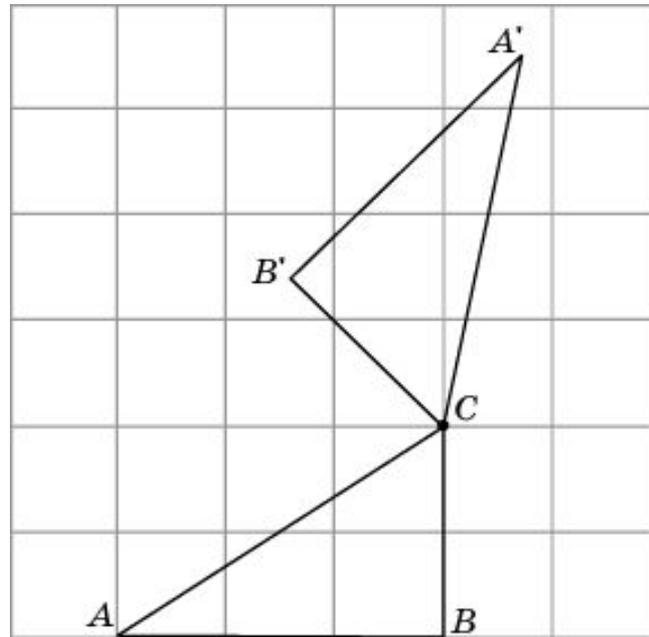
Треугольник  $A'B'C'$  получен поворотом треугольника  $ABC$  по часовой стрелке вокруг точки  $O$ . Найдите угол поворота.



Ответ:  $45^\circ$ .

## Упражнение 27

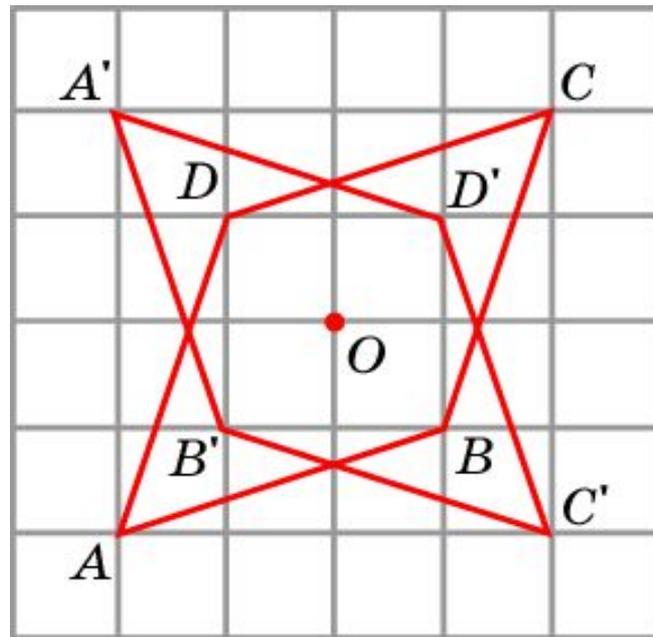
Треугольник  $A'B'C$  получен поворотом треугольника  $ABC$  против часовой стрелки вокруг точки  $C$ . Найдите угол поворота.



Ответ:  $135^\circ$ .

## Упражнение 28

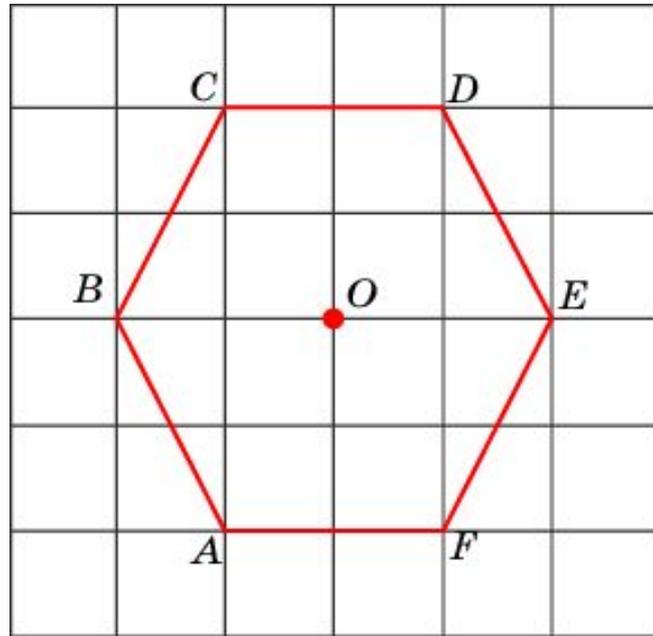
Изобразите четырехугольник, полученный поворотом четырехугольника  $ABCD$  вокруг точки  $O$  на угол  $270^\circ$  против часовой стрелки.



Ответ:

## Упражнение 29

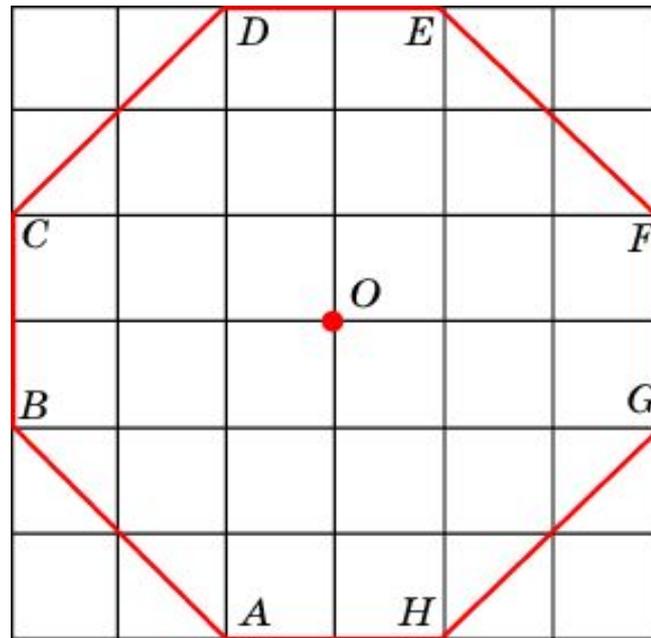
Центром симметрии какого порядка является точка  $O$  для шестиугольника, изображенного на рисунке?



**Ответ:** Второго.

## Упражнение 30

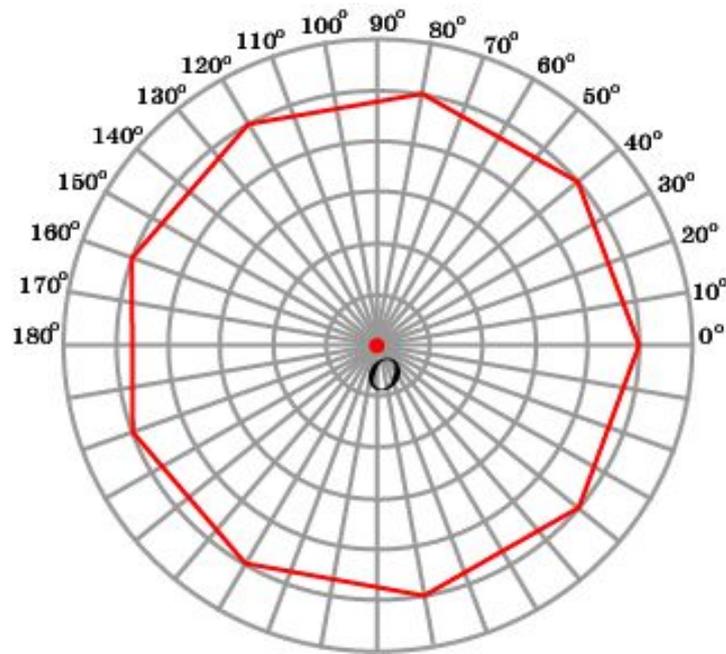
Центром симметрии какого порядка является точка  $O$  для восьмиугольника, изображенного на рисунке?



**Ответ:** Четвертого.

# Упражнение 31

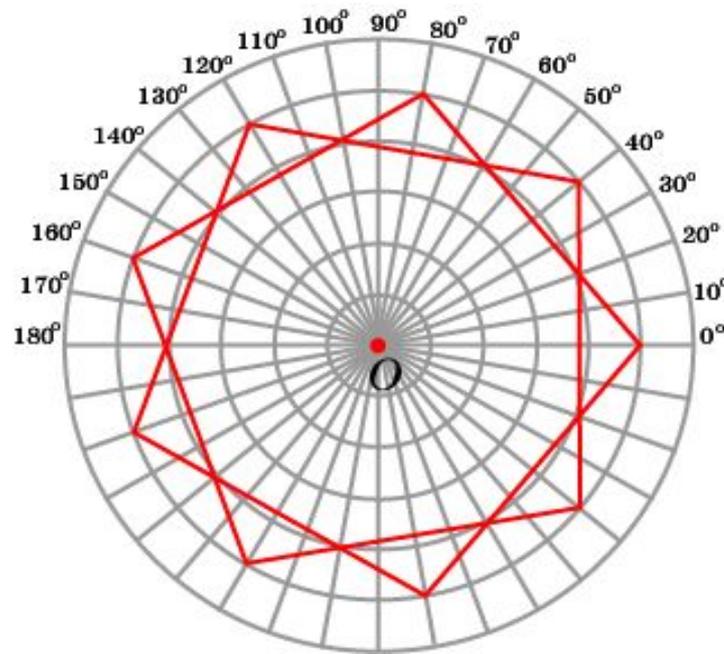
Центром симметрии какого порядка является точка  $O$  для многоугольника, изображенного на рисунке?



**Ответ:** Девятого.

## Упражнение 32

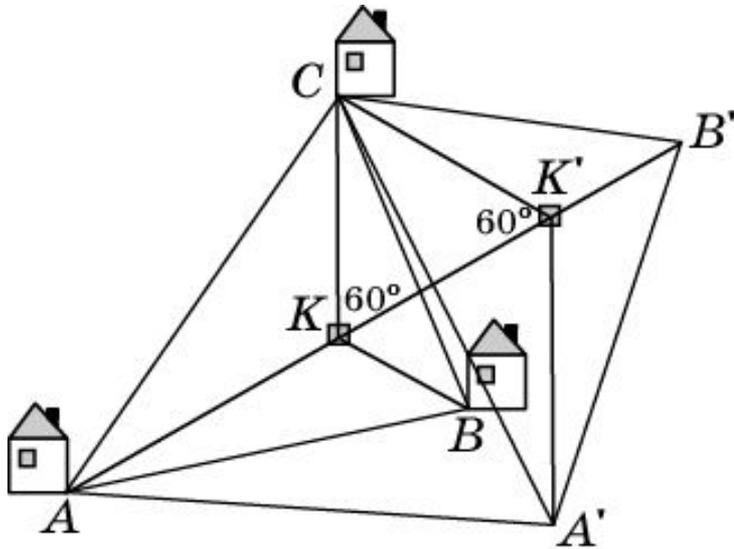
Центром симметрии какого порядка является точка  $O$  для звездчатого многоугольника, изображенного на рисунке?



**Ответ:** Девятого.

## Упражнение 33\*

Три соседа по дачным участкам решили вырыть общий колодец и проложить от него дорожки к своим домикам. Где нужно расположить колодец, чтобы суммарная длина дорожек была наименьшей?



**Решение:** Повернём треугольник  $ABC$  вокруг вершины  $C$  на угол  $60^\circ$ . При этом точка  $A$  перейдёт в точку  $A'$ , точка  $B$  – в точку  $B'$ , точка  $K$  – в точку  $K'$ . Треугольник  $CKK'$  – равносторонний, следовательно  $CK = KK'$ .

Сумма расстояний  $AK + BK + CK$  равна длине ломаной  $AKK'B'$ , длина которой будет наименьшей, если точки  $A, K, K', B'$  принадлежат одной прямой. Это будет, если углы  $AKC$  и  $BKC$  равны  $120^\circ$ , т. е. если колодец  $K$  расположен в точке Торричелли.